Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias

Yunus A. Çengel | William J. Palm III

Mc Graw Hill Education

Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias

Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias

YUNUS A. ÇENGEL
University of Nevada, Reno

WILLIAM J. PALM III
University of Rhode Island

Revisión técnica

Natella Antonyan
Departamento de Física y Matemáticas
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Ciudad de México

Amado Salvador Granados Aguilar
Departamento de Matemáticas
Facultad de Química
Universidad Nacional Autónoma de México

Edmundo Palacios Pastrana
Departamento de Física y Matemáticas
Universidad Iberoamericana

Mc Graw Hill Education

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SAO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director General México: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha Martínez
Editora de desarrollo: Karen Estrada Arriaga
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traducción: Sergio Sarmiento Ortega

ECUACIONES DIFERENCIALES
PARA INGENIERÍA Y CIENCIAS

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.

Mc Graw Hill Education

DERECHOS RESERVADOS © 2014, respecto a la primera edición en español por:
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES S.A. DE C.V.
Edificio Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Pisos 16 y 17, Colonia Desarrollo Santa Fe
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-0989-5

Translated from the first edition of *Differential equations for engineers and scientists*, by Çengel, Yunus A., and William J. Palm III, Copyright © 2013, by The McGraw-Hill Companies Inc.
All rights reserved. 978-0-07-338590-7.

1234567890 2356789014

Impreso en México *Printed in Mexico*

CONTENIDO

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior 177

Capítulo 5

Ecuaciones diferenciales lineales: coeficientes variables 209

Capítulo 6

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales: metodología escalar 287

---

*MuPAD® es una marca registrada de Sciface Software GmbH & Co.

Capítulo 7

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales: método de matrices 319

Capítulo 8

Transformada de Laplace 419

Capítulo 9

Resolución númerica de ecuaciones diferenciales 483

---
[*]MATLAB® es una marca registrada de The MathWorks, Inc.
[**]Maple® es una marca registrada de Waterloo Maple, Inc.
[†]Mathematica® es una marca registrada de Wolfram Research, Inc.

PREFACIO

Desde hace tiempo, las ecuaciones diferenciales han sido una parte esencial del programa de estudio de la mayoría de las disciplinas en ciencias físicas e ingeniería en todo el mundo. Los científicos y los ingenieros a menudo estudian sistemas que experimentan variaciones, y las ecuaciones diferenciales les permiten estudiar dichos cambios en las variables claves de un sistema y obtener una comprensión más profunda de los fenómenos físicos subyacentes. Este libro tiene el propósito de servir como libro de texto para un primer curso sobre ecuaciones diferenciales, principalmente para estudiantes de ciencias e ingeniería. Es el resultado de los apuntes de clase desarrollados por el primer autor durante años de enseñar ecuaciones diferenciales a estudiantes de ingeniería en la Universidad de Nevada, en Reno; y de tareas hechas en computadora y ejemplos de ingeniería desarrollados por el segundo autor mientras impartía cursos en la Universidad de Rhode Island. El texto cubre los temas convencionales sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, con un acervo de aplicaciones tomadas de la ingeniería y de las ciencias.

Enfoque pedagógico Este libro está concebido como una introducción amistosa a las ecuaciones diferenciales en las ciencias y la ingeniería. Se apoya más en la *intuición* que en el rigor. Se enfatizan los argumentos conceptuales con el objetivo de desarrollar un entendimiento intuitivo del tema de que se trata. El texto intenta ser *sencillo* y *comprensible*, y fomenta el pensamiento creativo. Los autores consideran que los documentos legales tales como los contratos de arrendamiento, que son para gente común, deberían redactarse en español ordinario en vez de escribirse en un lenguaje legal preciso que está más allá de la comprensión de la mayoría de las personas y que necesita la traducción de un abogado. De modo similar, un libro de texto sobre ecuaciones diferenciales debe escribirse para que el *estudiante* lo lea y lo comprenda. Los profesores no necesitan libros de texto; los alumnos sí. Es común que los estudiantes hojeen un libro de texto de matemáticas solo cuando tratan de encontrar un ejemplo similar al problema que se les ha asignado. A menudo se dice que los conceptos matemáticos se deben explicar en lenguaje ordinario para que dejen una impresión duradera. Debemos ser capaces de explicar a los alumnos que resolver una ecuación diferencial es básicamente una integración, y que esta es básicamente una sumatoria, en vez de usar un lenguaje abstracto en aras de la precisión y el rigor.

El material del texto se introduce a un nivel que un alumno promedio puede seguir cómodamente. Se dirige a los estudiantes, no por encima de ellos; de hecho, es autodidáctico. Esto permite que el profesor ocupe el tiempo de clase en forma más productiva. Los temas están ordenados de tal manera que fluyen bien en un orden lógico, y cada uno motiva a abordar el siguiente. Se ha tratado, por todos los medios, de hacer que este sea un texto de matemáticas “legible”, y de fomentar el aprendizaje y la comprensión. El propósito de todo este proyecto ha sido ofrecer un libro introductorio de ecuaciones diferenciales que los estudiantes lean con interés y entusiasmo en vez de un texto que se usa como guía de referencia para resolver problemas.

ORGANIZACIÓN

DESCRIPCIÓN DE CAPÍTULOS

- El capítulo 1 comienza con una introducción a las ecuaciones diferenciales y su clasificación. Luego demostramos cómo surgen las ecuaciones diferen-

ciales en las ciencias y cómo se modelan los problemas en las ciencias y en la ingeniería. Concluimos este capítulo explicando cómo resolver ecuaciones diferenciales por integración directa.
- En el capítulo 2 explicamos las ecuaciones diferenciales de primer orden y las técnicas de resolución correspondientes. Al final de este capítulo, presentamos un procedimiento paso a paso para resolver una ecuación diferencial dada.
- El capítulo 3 trata principalmente de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes, que son el tipo de ecuaciones que se encuentran más frecuentemente en las ciencias y la ingeniería. Además explicamos la ecuación de Euler, ya que se puede transformar en una ecuación diferencial con coeficientes constantes. El método de coeficientes indeterminados para resolver ecuaciones no homogéneas se desarrolla de manera intuitiva.
- Las discusiones se extienden a las ecuaciones lineales de orden superior en el capítulo 4.
- En el capítulo 5, consideramos las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables y su solución por serie de potencias. En este capítulo, desarrollamos los polinomios de Legendre y las funciones de Bessel como soluciones para ciertas ecuaciones diferenciales, y explicamos sus características.
- En el capítulo 6, explicamos la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales usando un método escalar.
- El capítulo 7 introduce los métodos matriciales para resolver conjuntos de ecuaciones.
- En el capítulo 8, introducimos las transformadas de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales.
- Finalmente, en el capítulo 9, presentamos las soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales usando diversas técnicas.

CARACTERÍSTICAS

Uso de las computadoras Los principales softwares que se usan actualmente para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias son MATLAB® (con The Symbolic Math Toolbox™,[1] que contiene MuPAD®), Maple™ y Mathematica®.[2] Usando uno de estos paquetes, los estudiantes pueden resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales o en la frontera especificadas en forma simbólica (siempre y cuando sean de forma estándar), y numéricamente, para obtener la solución en forma tabular y gráfica. Los alumnos pueden experimentar y plantear preguntas de tipo "¿Qué pasaría si...?" de forma interactiva, a menudo sin programación o con una mínima programación. Al final de cada capítulo hay una sección que muestra cómo usar estos softwares para resolver los problemas que se tratan en cada capítulo.

Ilustraciones Las figuras son herramientas de aprendizaje importantes que ayudan al estudiante a "captar la idea". El texto usa eficazmente las gráficas en toda su extensión. La mayoría de las ilustraciones de este texto no son figuras en el sentido tradicional, sino que sirven como medio para destacar conceptos claves que de otra manera pasarían desapercibidos, o bien como resúmenes de ideas principales.

Ejemplos de ciencia e ingeniería Cada capítulo contiene numerosos ejemplos resueltos que clarifican el material e ilustran el uso de los principios. Para la solu-

[1] The Symbolic Math Toolbox es una marca registrada de MathWorks, Inc.
[2] Los ejemplos de software en este texto son compatibles con las siguientes versiones de software: MATLAB (versión 7.13), Symbolic Math Toolbox (versión 5.7), MuPAD (versión 5.7), Maple (versión 15) y Mathematica (versión 8).

ción de todos los ejemplos se usa un enfoque congruente y sistemático, en el cual se da especial atención a las limitaciones y a las generalizaciones.

Hay varios ejemplos que se toman de varias aplicaciones en la ciencia, pero una característica *exclusiva* del texto es el número de ejemplos de *ingeniería*. Éstos ilustran aplicaciones en diversos campos de la disciplina tales como dinámica newtoniana, transferencia térmica, circuitos y motores eléctricos, vibraciones mecánicas, suspensiones de vehículos e hidráulica.

Resúmenes de capítulo Se da un resumen detallado y desglosado al final de cada capítulo, para un repaso rápido de conceptos básicos y relaciones importantes.

Repaso de sección Al final de cada sección, hay un repaso en el cual se presentan problemas relativamente sencillos que cubren los temas que aborda cada sección. Con los problemas se dan las respuestas, de modo que los estudiantes puedan verificar su trabajo de inmediato.

Problemas de fin de capítulo Los problemas de fin de capítulo se agrupan por sección, en el orden en que se han cubierto, para facilitar la selección de problemas, tanto para los instructores como para los estudiantes. Los problemas dentro de cada grupo comienzan con preguntas conceptuales, marcadas por una "C", para verificar el nivel de comprensión de los conceptos básicos por parte de los estudiantes. Los problemas de repaso son de naturaleza más amplia, y no están directamente ligados a ninguna sección específica de un capítulo.

RECURSOS EN LÍNEA

Visite www.mhhe.com/cengel para todos los textos de la serie Cengel y para los valiosos recursos disponibles para los estudiantes y los instructores que usan este texto.

AGRADECIMIENTOS

Merece un agradecimiento especial Tahsin Engin de la Universidad de Sakarya, por sus valiosas contribuciones en todas las etapas de la producción de este libro y la preparación del manual de soluciones.

A los autores nos gustaría agradecer especialmente a Bill Stenquist, de McGraw-Hill, por todo lo que nos ha ayudado y alentado como nuestro editor durante muchos años.

Además, queremos agradecer a los siguientes revisores por sus útiles comentarios y sugerencias:

Antonio Campo
Universidad de Texas en San Antonio
Dr. Harry Hardee
Universidad Estatal de Nuevo México
Eleanor Jenkins
Universidad Clemson
Allen Plotkin
Universidad Estatal de San Diego
David Rubenstein
Universidad Estatal de Oklahoma
Scott Strong
Escuela de Minería de Colorado
Aleksandra Vinogradov
Universidad Estatal de Montana
Ridvan Oz
Universidad de Fatih

Y. A. Çengel
W. J. Palm III

CAPÍTULO

1

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

A diferencia de las ecuaciones algebraicas, las ecuaciones diferenciales incluyen derivadas de funciones; su estudio exige una buena comprensión del cálculo. Por dicha razón le pedimos al estudiante que repase algunos temas importantes (tales como variables dependientes e independientes, funciones continuas y discontinuas, derivadas ordinarias y parciales, diferenciales, incrementos e integrales). Iniciamos este capítulo con un análisis sobre la importancia de las ecuaciones diferenciales en la ciencia y en la ingeniería, y el valor de la modelación matemática en la resolución de problemas reales. Luego continuamos con ejemplos acerca de cómo las ecuaciones diferenciales surgen en problemas prácticos, y explicamos sus soluciones. Después de un breve repaso de algunos conceptos del cálculo, clasificamos las ecuaciones diferenciales y explicamos las ecuaciones lineales y no lineales, así como las ecuaciones con coeficientes constantes y variables. En seguida mostraremos la metodología para resolver algunas ecuaciones diferenciales sencillas por integración directa. Finalmente, mostramos cómo usar algunos software populares para resolver ecuaciones diferenciales sencillas y para graficar sus soluciones.

OBJETIVOS

Al terminar este capítulo usted deberá ser capaz de:

1. Apreciar el valor de las ecuaciones diferenciales y entender cómo éstas surgen en las ciencias y en la ingeniería.
2. Identificar funciones continuas y discontinuas.
3. Realizar operaciones básicas de cálculo, como la derivación y la integración.
4. Clasificar ecuaciones diferenciales conforme a su orden, linealidad o no, si sus coeficientes son variables o constantes, o si se trata de ecuaciones homogéneas o no homogéneas.
5. Clasificar las soluciones de ecuaciones diferenciales como generales, particulares, singulares, explícitas o implícitas.
6. Resolver ecuaciones diferenciales simples mediante integración directa.
7. Usar un software para resolver ecuaciones diferenciales simples de primer orden y graficar sus soluciones.

1-1 ▪ LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN LAS CIENCIAS Y EN LA INGENIERÍA

Una expresión matemática con un signo de igual se llama **ecuación**. Una ecuación que incluye las derivadas de una o más funciones se llama **ecuación diferencial**. En otras palabras, una ecuación diferencial expresa una relación entre funciones y sus derivadas. El término *ecuación diferencial* se utiliza desde 1676, cuando Leibniz lo empleó por primera vez; desde entonces, los científicos y los ingenieros han usado extensamente las ecuaciones diferenciales para modelar y resolver una amplia gama de problemas prácticos.

Probablemente usted se pregunte por qué estudiamos ecuaciones diferenciales. Después de todo, parece que podríamos resolver prácticamente cualquier problema mediante ecuaciones algebraicas. Bueno, bastará con decir que, hasta este punto, usted se enfrentó principalmente a problemas cuyo modelo matemático resultaba en ecuaciones algebraicas. Ahora, está a punto de entrar a un nuevo mundo de problemas ubicados en diversos campos de la ciencia y la ingeniería, cuyas formulaciones dan por resultado ecuaciones diferenciales y cuya solución depende de la resolución de dichas ecuaciones.

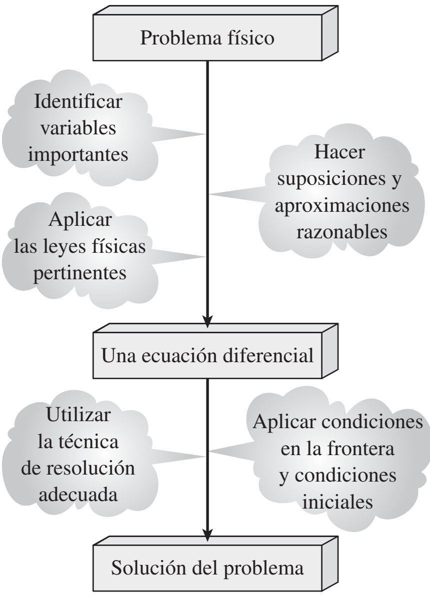


FIGURA 1-1
Modelación matemática de problemas físicos.

La descripción de la mayoría de los problemas científicos implica relaciones que conectan entre sí los *cambios* en algunas variables claves; usualmente, cuanto menor es el incremento elegido en las variables cambiantes, más general y exacta será la descripción. En el caso límite de *cambios infinitesimales* o *diferenciales* en las variables, obtenemos ecuaciones diferenciales que proporcionan formulaciones matemáticas precisas para los principios físicos y las leyes físicas representando la rapidez de los cambios como derivadas. Por tanto, las ecuaciones diferenciales se usan para investigar una amplia variedad de problemas en ciencias e ingeniería, y el estudio de las ecuaciones diferenciales es, desde hace tiempo, parte integral de la formación de científicos e ingenieros.

El estudio de los fenómenos físicos implica dos pasos importantes. En el primero se identifican todas las variables que afectan a los fenómenos, se realizan suposiciones y aproximaciones razonables, y se estudia la interdependencia de dichas variables. Se hace referencia a las leyes físicas y a los principios físicos pertinentes, y el problema se formula matemáticamente, usualmente en forma de ecuación diferencial. Esta ecuación en sí misma aporta mucha información porque muestra el grado de dependencia de algunas variables con respecto a otras, y la importancia relativa de varios términos. En el segundo paso se resuelve la ecuación diferencial mediante un método adecuado, y se obtiene la relación para la función desconocida en términos de las variables independientes (figura 1-1).

Muchos procesos que en la naturaleza parecen ocurrir al azar y sin ningún orden están, en realidad, gobernados por algunas leyes físicas francamente visibles o que no lo son tanto. Ya sea que las percibamos o no, estas leyes están ahí, rigiendo en forma coherente y predecible lo que parecen ser eventos ordinarios. La mayoría de ellas están bien definidas y bastante entendidas por los científicos. Esto permite predecir el desarrollo de un evento antes de que realmente suceda; o estudiar matemáticamente diversos aspectos de un evento, sin necesitad de realizar experimentos costosos y prolongados.

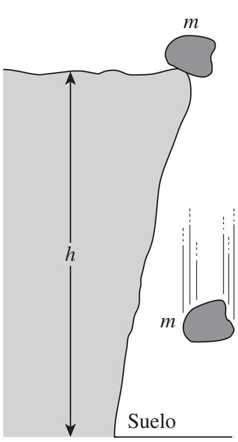


FIGURA 1-2
Caída libre de una roca desde un acantilado.

Considere, por ejemplo, la caída libre de una roca desde un acantilado, como se muestra en la figura 1-2. Digamos que nos gustaría saber el tiempo que ésta tarda en llegar al suelo. Una manera de averiguarlo es, por supuesto, registrar la hora en que se deja caer y la hora del impacto, para después determinar la diferencia.

Otra manera es preparar un modelo matemático de este proceso usando todas las leyes físicas aplicables para formular el problema, y resolverlo para encontrar la cantidad que nos interesa (en este caso, el tiempo de caída). Cuanto más realista sea el modelo matemático, más exacto será el resultado que se obtenga. Como recordará, en física, la caída libre de un cuerpo está regida por la ley de gravedad, y el tiempo de caída se determina como $\Delta t = \sqrt{2h/g}$, donde h es la distancia vertical y g es la aceleración gravitacional local.

Si se trata de problemas prácticos importantes se pueden obtener resultados muy exactos al usar un modelo matemático adecuado y realista; por ejemplo, al analizar la respuesta a la temperatura de una papa en un horno tratándola como si tuviera las mismas propiedades térmicas del agua (figura 1-3). La preparación de tales modelos exige un conocimiento adecuado de los fenómenos naturales involucrados y las leyes pertinentes, así como tener un razonamiento correcto. Es obvio que un modelo no realista dará resultados inexactos y, por tanto, inaceptables.

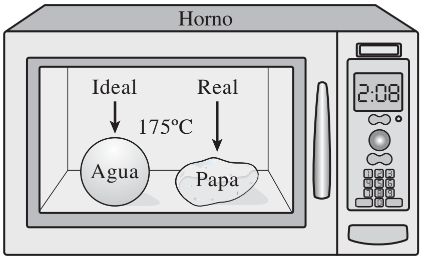


FIGURA 1-3
La modelación es una poderosa herramienta que proporciona comprensión y simplicidad a costa de perder algo de exactitud.

Es frecuente que un analista necesite decidir entre un modelo muy exacto (pero complejo) y uno sencillo (pero no tan exacto). La selección correcta es el modelo más simple depende de la situación real. La elección correcta usualmente es el modelo que produzca resultados adecuados. No es difícil preparar modelos sumamente exactos y complejos. Sin embargo, tales modelos no son tan útiles para un analista si son demasiado difíciles de resolver. Al menos, el modelo matemático debe reflejar la característica esencial del problema físico que representa.

Dicho proceso de caída libre se formula considerando solamente el efecto de la gravedad, sin tener en cuenta la resistencia del aire y la variación de la aceleración gravitacional g con la altura. Estas simplificaciones son muy razonables para la mayoría de objetos que caen, y nos permiten obtener una solución muy sencilla del problema; sin embargo, es obvio que dichas simplificaciones son inaceptables para objetos que caen cuando experimentan una gran resistencia del aire (por ejemplo, un paracaídas).

Hay muchos problemas importantes reales que pueden analizarse mediante un modelo matemático sencillo. Se debe recordar que los resultados obtenidos de un análisis matemático no son más exactos que las suposiciones hechas al simplificar el problema; por tanto, la solución obtenida no debe aplicarse a situaciones para las cuales no sean válidas las suposiciones originales.

Una solución incongruente con la naturaleza observada del problema indica que el modelo matemático empleado es demasiado burdo. En ese caso, se debe preparar un modelo más realista mediante la eliminación de una o más de las suposiciones cuestionables. Esto dará por resultado una ecuación con mayor grado de complejidad que, por supuesto, será más difícil de resolver. Por tanto, cualquier solución de una ecuación diferencial debe interpretarse dentro del contexto en que surgió dicha ecuación.

Repaso de la sección

Los problemas marcados con una “C” son conceptuales para análisis

1-1C ¿Por qué usamos a menudo ecuaciones diferenciales en vez de ecuaciones algebraicas para modelar problemas importantes reales?

1-2C Describa lo que implica la preparación de modelos matemáticos prácticos para problemas reales.

1-2 ▪ ¿CÓMO SURGEN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES?

Como se mencionó antes, las ecuaciones diferenciales surgen al aplicar las leyes y los principios físicos pertinentes a un problema, mediante la consideración de cambios infinitesimales en las variables de interés. Por tanto, para obtener la ecuación diferencial rectora para un problema específico se necesita tener un conocimiento adecuado de la naturaleza del problema, las variables que participan, las suposiciones simplificadoras adecuadas y tanto las leyes como los principios físicos aplicables, y hacer un análisis cuidadoso. Aquí se ilustran algunos ejemplos del procedimiento para obtener ecuaciones diferenciales en ciertas áreas.

EJEMPLO 1-1 Segunda ley del movimiento de Newton

Mediante la segunda ley del movimiento de Newton, obtenga una ecuación diferencial que describe la posición s de una masa m a lo largo de una línea recta influida por una fuerza F que actúa en la dirección del movimiento.

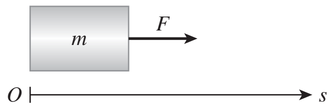


FIGURA 1-4
Esquema para el ejemplo 1-1.

Solución La segunda ley de Newton es una relación entre cantidades que tienen tanto *magnitud* como *dirección* y, por tanto, se expresa correctamente en forma *vectorial*. Sin embargo, cuando hablamos de movimiento en línea recta en la dirección de la fuerza, como se muestra en la figura 1-4, podemos expresarlo en forma *escalar* usando sólo magnitudes, pues la dirección ya está especificada. En este caso, las cantidades en direcciones opuestas se indican mediante signos contrarios.

Recordemos que la velocidad V y la aceleración a se definen como

$$V = \frac{ds}{dt}$$

y

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Entonces, la ecuación diferencial para la distancia s recorrida se obtiene mediante la segunda ley de Newton, que es: fuerza = masa × aceleración, o

$$F(t) = ma(t) = m\frac{d^2s}{dt^2} \tag{1-1}$$

Reacomodando se obtiene

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{F(t)}{m} \tag{1-2}$$

que es la ecuación diferencial deseada. Observe que, por simplicidad, a veces omitimos la notación que indica explícitamente la dependencia de una función incógnita o desconocida con respecto a la variable independiente y escribimos F en vez de $F(t)$.

Aquí, $F(t)$ es una función dada que describe la variación de la fuerza con el tiempo.

Como caso especial, considere la caída libre de un cuerpo bajo la influencia de la gravedad. Sin tener en cuenta la resistencia del aire, la única fuerza que actúa en el cuerpo es la fuerza de gravedad. Tomando la dirección vertical ascendente como la dirección positiva z, la fuerza gravitacional puede expresarse como $F = -mg$, donde g es la aceleración gravitacional local que actúa hacia abajo (en la dirección z negativa). Entonces, reemplazando z por s y $F(t)$ por $-mg$ en la ecuación 1-2, y simplificando, obtenemos

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -mg \tag{1-3}$$

donde z es la distancia vertical desde un nivel de referencia como el suelo. La caída libre de un cuerpo con resistencia del aire se considera en el capítulo 2.

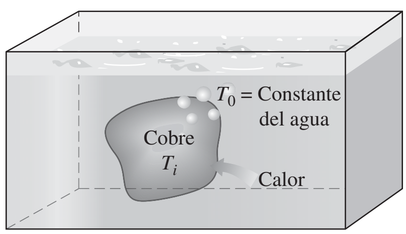


FIGURA 1-5
Esquema para el ejemplo 1-2.

EJEMPLO 1-2 Ley de enfriamiento de Newton

Considere una bola pequeña de cobre macizo de masa m y radio R, que inicialmente está a una temperatura de $T_i = 20°C$. La bola se deja caer en un recipiente grande, lleno de agua caliente a $T_0 = 70°C$, como se muestra en la figura 1-5.

Como es de esperar, el calor del agua se transfiere a la bola y la temperatura de ésta comienza a elevarse. Se sabe que el *calor específico* del cobre cerca de la temperatura ambiente interior es $c = 0.39$ kJ/kg°C. Es decir, se necesitan 0.39 kJ de energía para elevar 1°C la temperatura de 1 kg de cobre. También se sabe que el *coeficiente de transferencia de calor* durante este proceso es $h = 0.02$ kW/°C × m². Es decir, se transfieren 0.02 kJ de calor al cobre por unidad de tiempo por unidad de superficie de la bola y por unidad de diferencia de temperatura entre el agua y la bola. Obtenga una ecuación diferencial que rija la variación de la temperatura de la bola en el tiempo t.

Solución En general, la temperatura de un cuerpo varía con la ubicación dentro de éste, así como con el tiempo. Pero para objetos metálicos pequeños como el de este caso, la variación de temperatura con la ubicación es muy pequeña y puede no tomarse en cuenta. En otras palabras, puede suponerse que la temperatura del objeto es la misma en cada punto en un tiempo dado. Así, es posible considerar la temperatura de la bola solamente como función del tiempo. Observe que esta suposición no es realista para objetos grandes, en especial cuando están hechos de materiales que conducen el calor de manera deficiente.

Sabemos por experiencia que cuando un objeto frío se deja en un ambiente más tibio aumenta su temperatura de forma gradual y finalmente llega a la del ambiente; por tanto, en cualquier tiempo t, ésta estará comprendida entre 20 y 70°C, pero no sabemos exactamente en qué valor. La predicción exacta de la temperatura de la bola, digamos en $t = 30$ s necesita la formulación exacta del problema, la cual se obtiene aplicando la ley de enfriamiento de Newton y el principio de conservación de la energía.

La **ley de enfriamiento de Newton** se expresa como

$$Q = hA(T_0 - T) \tag{1-4}$$

donde

Q = rapidez de transferencia de calor a la bola en el tiempo t,
A = área superficial de la bola, $A = 4\pi R^2$
h = coeficiente de transferencia de calor entre la bola y el ambiente,
T = temperatura de la bola en el tiempo t,
T_0 = temperatura del ambiente.

El **principio de conservación de la energía** establece que la energía no se crea ni se destruye; por tanto, el aumento en el contenido de energía de la bola debe ser igual a la cantidad total del calor que se le transfiere. Durante un intervalo de tiempo Δt, la temperatura de la bola se elevará en la cantidad ΔT, donde m es la masa de la bola y c es su calor específico. El calor total transferido a la bola durante Δt es simplemente $Q\Delta t$, ya que Q es la rapidez de transferencia de calor (es decir, calor transferido por unidad de tiempo). Así,

$$\begin{pmatrix} \text{Aumento en el} \\ \text{contenido de} \\ \text{energía de la bola} \\ \text{durante } \Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Transferencia} \\ \text{total de calor} \\ \text{a la bola} \\ \text{durante } \Delta t \end{pmatrix}$$

o $mc\Delta T = hA(T_0 - T)\Delta t$. Dividiendo entre Δt, obtenemos

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{hA}{mc}(T_0 - T)$$

Al tomar el límite como $\Delta t \to 0$, se obtiene

$$\frac{dT}{dt} = \frac{hA}{mc}(T_0 - T) \tag{1-5}$$

Ésta es la ecuación diferencial deseada, ya que describe la variación de la temperatura con el tiempo. La solución de tal ecuación diferencial dará una función para la temperatura de la bola en términos del tiempo. Esto se resolverá en el capítulo 2.

Es importante observar que las ecuaciones diferenciales describen fenómenos físicos en un intervalo concreto de las variables independientes. Así, la solución de una ecuación diferencial solo es aplicable dentro de ese intervalo. Por ejemplo, en la ecuación 1-5 se describe la variación de la temperatura con respecto al tiempo, solo dentro de la bola de cobre. Por tanto, la solución que se obtiene para $T(t)$ se limita al interior de la bola de cobre y no puede usarse para determinar la temperatura en un punto externo. Asimismo, la ecuación diferencial describe el proceso que comienza cuando la bola se deja caer al agua ($t = 0$) y, por tanto, la solución es aplicable en el intervalo $0 \leq t < \infty$. La solución no puede usarse para predecir la temperatura antes de soltar la bola en el agua.

EJEMPLO 1-3 Interés compuesto continuamente

Una persona deposita un monto de dinero A en un banco a una tasa de interés anual de r. Suponiendo que la composición es instantánea, obtenga una ecuación diferencial que rija la variación de la cantidad de dinero A en el banco con respecto al tiempo t.

Solución Para colocar las bases para deducir la ecuación, considere que una persona deposita $A_0 = \$100$ en un banco a una tasa de interés anual de 4%, de modo que $r = 0.04$. Suponiendo una composición anual, el dinero aumentará en $\$4$ durante ese periodo. Si la persona deposita $\$200$ en vez de $\$100$, el dinero aumentará en $\$8$. Si deposita el dinero durante dos años a tasa compuesta cada dos años, el aumento en el dinero sería nuevamente doble.

Por tanto, concluimos que el aumento en el monto que está en el banco al final del periodo de composición es proporcional a la cantidad de dinero A y al periodo de composición en años. La constante de proporcionalidad es la tasa anual de interés r. Por tanto, $\Delta A = rA\Delta t$.

o

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = rA$$

Tomando el límite $\Delta t \to 0$, obtenemos la ecuación diferencial que describe el cambio en la cantidad de dinero en el banco con respecto al tiempo como resultado del interés compuesto continuamente:

$$\frac{dA}{dt} = rA \tag{1-6}$$

Aquí, r es la tasa de interés anual expresada como número decimal, y t es el tiempo en años. Como verá en el capítulo 2, la solución de esta ecuación diferencial es

$$A = A_0 e^{rt} \tag{1-7}$$

donde A_0 es la cantidad depositada en el tiempo $t = 0$.

EJEMPLO 1-4 Ley de absorción de Lambert

Se sabe que cuando la luz o cualquier otra radiación pasa a través de un medio, parte de ella es absorbida por éste. Cuanto más lejos viaja la luz en el medio, más de ella se absorbe. Llamando E a la energía radiante de un rayo de luz, obtenga la ecuación diferencial que describa el debilitamiento de la luz con la distancia s.

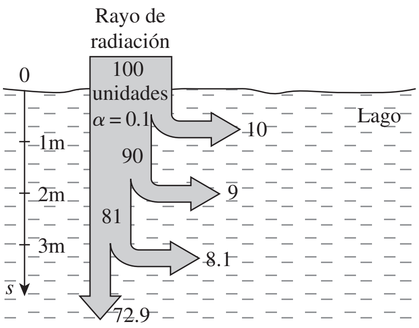


FIGURA 1-6
La absorción de radiación de luz al propagarse a través de un lago.

Solución Se observa que cuando la luz o cualquier otra radiación pasa a través de un medio homogéneo, se absorbe una fracción constante de la radiación por unidad de longitud en la dirección de la propagación, como se ilustra en la figura 1-6 para la luz que penetra en un lago. Éste es otro modo de decir que la absorción de la radiación por unidad de longitud es proporcional a la magnitud de la radiación. Así, siguiendo el razonamiento en el ejemplo 1-3, la ecuación diferencial que rige el proceso de absorción puede expresarse como

$$\frac{dE}{ds} = -\alpha E \tag{1-8}$$

donde α es la fracción de radiación absorbida por unidad de longitud, denominada **coeficiente de absorción** y tiene la unidad metro^{-1}. La variable independiente s es la distancia en la dirección de propagación, y E es la energía radiante del rayo en cuestión. Por analogía con el ejemplo 1-3, la solución de esta ecuación diferencial es

$$E = E_0 e^{-\alpha s} \tag{1-9}$$

donde E_0 es la energía radiante del rayo en $s = 0$. Los detalles de la solución se presentarán en el capítulo 2.

EJEMPLO 1-5 Una reacción química

Los químicos y los ingenieros deben ser capaces de predecir los cambios en la concentración química de una reacción. Un modelo que se usa para muchos procesos de un solo reactivo es:

$$\text{Rapidez de cambio de la concentración química} = \frac{dC}{dt} = -kC^n$$

donde C es la concentración química y k es la constante de rapidez. El orden de la reacción es el valor del exponente n. Los siguientes datos describen la reacción de primer orden que combina bromuro de terbutilo y agua para producir alcohol tert-butílico y bromuro de hidrógeno:

$$(CH_3)_3CBr + H_2O \rightarrow (CH_3)_3COH + HBr$$

Por datos experimentales, el valor de k se estimó como $k = 0.0537/\text{h}$. Determine la concentración después de 2 h si $C(0) = 0.1\ \text{mol/L}$.

Solución Usando $n = 1$ y $k = 0.0537$ en la ecuación diferencial, tenemos

$$\frac{dC}{dt} = -0.0537C$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación (1-8) y, por analogía, podemos deducir que la solución es $C(t) = C(0)e^{-kt}$ o $C(t) = 0.1\,e^{-0.0537t}$.

Sustituyendo $t = 2$ h en esta ecuación obtenemos $C(2) = 0.1\ e^{-(0.0537)2} = 0.0892\ \text{mol/L}$.

EJEMPLO 1-6 Un circuito RC

En la figura 1-7 se muestra un circuito con una resistencia y un capacitor. El voltaje de batería V es constante y el capacitor está inicialmente descargado. Al inicio, el interruptor está cerrado en el punto B. En $t = 0$, el interruptor se mueve repentinamente del punto B al punto A. Obtenga el modelo de ecuación diferencial para el voltaje del capacitor v_1 en función del tiempo.

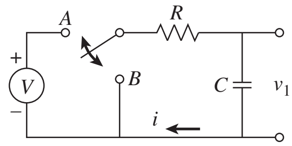


FIGURA 1-7
Un circuito *RC* con un voltaje de batería.

Solución La relación voltaje-corriente para un capacitor establece que el voltaje $v_1(t)$ es la integral en el tiempo de la corriente $i(t)$ dividida entre la capacitancia C, más el voltaje inicial, que en este caso es cero. Entonces,

$$v_1(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$$

Tomando la derivada de ambos lados obtenemos

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{C}i$$

Por la relación voltaje-corriente de la resistencia, obtenemos

$$i = \frac{V - v_1}{R}$$

Al sustituir esto en la primera ecuación y al reacomodarla se obtiene

$$RC\frac{dv_1}{dt} + v_1 = V \qquad \textbf{(1-10)}$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden cuya solución puede hallarse usando los métodos del capítulo 2.

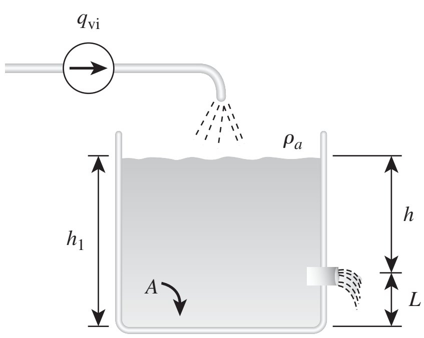


FIGURA 1-8
Un contenedor de líquido con un orificio.

EJEMPLO 1-7 Flujo a través de un orificio

En la figura 1-8 se muestra un contenedor de líquido con lados verticales y un área inferior A. El líquido se alimenta por la parte superior con un flujo volumétrico q_{vi}. Accidentalmente se perfora un agujero en la pared del tanque, y el líquido se derrama por éste. Obtenga el modelo de ecuación diferencial de la altura de líquido h.

Solución Alrededor de 1640, Torricelli descubrió que el flujo a través de un orificio es proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de presiones. Mediante el principio de conservación de la masa con una densidad de masa líquida ρ, vemos que la rapidez de cambio de la masa líquida en el tanque, $\rho A h_1$, debe ser igual a la diferencia entre el flujo másico de entrada q_{mi} y el flujo másico de salida q_{mo}. Es decir,

$$\frac{d(\rho A h_1)}{dt} = q_{mi} - q_{mo}$$

Observe que $q_{mi} = \rho q_{vi}$ y $h_1 = h + L$ de modo que $dh_1/dt = dh/dt$. Por tanto,

$$\rho A\frac{dh}{dt} = \rho q_{vi} - q_{mo}$$

Como la presión atmosférica p_a rodea el tanque, la caída de presión a través del orificio es $\rho g h$, y entonces, por el principio de Torricelli, tenemos

$$q_{mo} = k\sqrt{\rho g h}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Por tanto, el modelo es

$$\rho A\frac{dh}{dt} = \rho q_{vi} - k\sqrt{\rho g h} \qquad \textbf{(1-11)}$$

Como verá más adelante en este capítulo, ésta se llama *ecuación no lineal* porque la variable dependiente h aparece dentro de la raíz cuadrada. Su solución se explica en la sección 1-6.

Repaso de sección

1-3C ¿Qué necesitamos saber para obtener una ecuación diferencial precisa para un problema dado?

1-4C ¿Por qué a menudo debemos usar suposiciones simplificadoras cuando deducimos ecuaciones diferenciales?

1-5 Imagine que un paracaídas cae en el aire a una velocidad constante de V_0. Mediante la segunda ley del movimiento de Newton, obtenga una ecuación diferencial que describa la posición z del paracaídas relativa al nivel del suelo en función del tiempo. Considere la dirección ascendente como positiva.

(*Respuesta:* $\frac{d^2Z}{dt^2} = z'' = 0$ con una condición inicial de $z'(0) = V(0) = -V_0$).

1-6 Una persona deposita una cantidad A en un banco con una tasa anual r compuesta de forma continua y, al mismo tiempo, retira dinero de la cuenta a una tasa constante a. Obtenga una ecuación diferencial que describa la cantidad de dinero $A(t)$ que está en el banco como una función del tiempo.

(*Respuesta:* $\frac{dA}{dt} = rA - a$).

1-3 ▪ BREVE REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS*

El estudio de las ecuaciones diferenciales exige una buena comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo; en esta sección repasaremos algunos de esos conceptos al grado necesario. Usted puede consultar cualquier libro de cálculo para obtener explicaciones exhaustivas.

Variables dependientes e independientes

En general, una ecuación puede tener una o más variables. Como el nombre lo indica, una **variable** es una cantidad que puede tomar distintos valores durante un estudio. Una cantidad cuyo valor permanece fijo durante un análisis recibe el nombre de **constante**; usualmente éstas se representan con las primeras letras del alfabeto, como a, b, c y d, y las variables se representan con las últimas letras, como t, x, y o z. Una variable cuyo valor puede cambiarse arbitrariamente se llama **variable independiente** o **argumento**; pero si su valor depende del de otras variables y, por tanto, no puede cambiarse de manera independiente se llama **variable dependiente** o **función** (figura 1-9).

Una variable dependiente y que depende de una variable x, usualmente se escribe como $y(x)$ para mayor claridad. Sin embargo, esta notación se vuelve muy incómoda y estorbosa cuando y se repite varias veces en una misma expresión. En tales casos es deseable representar $y(x)$ simplemente como y cuando es claro que y es función de x. Esta simplificación en la notación mejora el aspecto y la legibilidad de las ecuaciones. El valor de y en un número fijo a se representa por $y(a)$.

Durante un estudio, usualmente restringimos el dominio de una variable para que solo tome valores que estén comprendidos entre dos números concretos. El conjunto de valores que una variable puede tomar entre dos números específicos constituye el **intervalo** de dicha variable. Un intervalo consiste en un conjunto de números mayores que un número especificado y menores que otro. Se dice que un intervalo es cerrado si incluye los números terminales o extremos; de otro modo, se dice que es abierto. Por ejemplo, si limitamos el radio r en la ecuación $P = 2\pi r$ para que tome valores comprendidos entre $r_1 = 3$ y $r_2 = 7.5$, incluyendo los números de los extremos, decimos que el intervalo de r es de 3 a 7.5 y lo expresamos

Función $y(x) = x^2 + 1$	
Variable independiente x	Variable dependiente y
1	2
2	5
2.5	7.25
8	65

FIGURA 1-9
El valor de una variable dependiente depende del valor de la variable independiente.

* Esta sección se incluye como recordatorio para los estudiantes. Puede omitirse sin perder la continuidad.

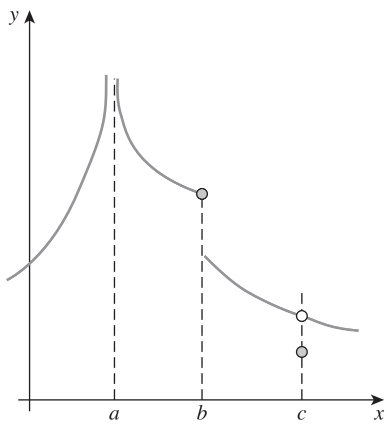


FIGURA 1-10
Una función que tiene discontinuidades en a, b y c.

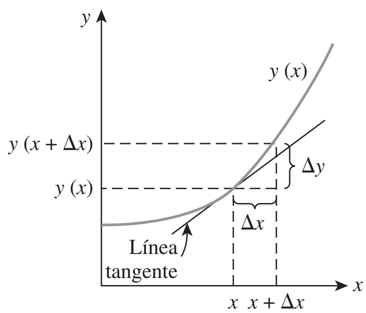


FIGURA 1-11
La derivada de una función en un punto específico representa la pendiente de la función en dicho punto.

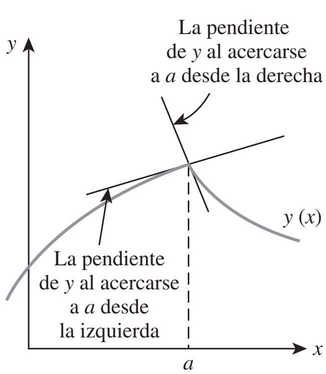


FIGURA 1-12
Una función que tiene dos pendientes en un punto no es diferenciable (no tiene derivada) en ese punto.

como $3 \leq r \leq 7.5$; el cual es un intervalo cerrado, ya que incluye los números extremos del intervalo.

Funciones continuas y discontinuas

Al estudiar y caracterizar funciones, un concepto de gran importancia es la continuidad. Se dice que una función y es **continua** en un número a si: 1) la función está definida en ese número (es decir, $y(a)$ tiene un valor finito), 2) el límite $\lim_{x\to a} y(x)$ existe, y 3) este límite es igual al valor de la función en a. Es decir, una función y es continua en a si

$$\lim_{x\to a} y(x) = y(a) \tag{1-12}$$

Si una función no es continua en a, entonces se dice que es **discontinua** en a o que tiene una **discontinuidad** en a. Se dice que una función es continua en un intervalo cerrado si es continua en cada número de ese intervalo. Se dice que una función es discontinua en un intervalo cerrado aun cuando sea discontinua en un solo número dentro de ese intervalo.

Es posible imaginar las funciones continuas como funciones que pueden graficarse sin levantar el lápiz del papel. Las funciones discontinuas usualmente tienen saltos repentinos, o tienden al infinito en algún número dentro del intervalo. En la figura 1-10 se muestra la gráfica de una función que es discontinua en tres puntos a, b y c. Observe que esta función es continua en cualquier intervalo que carezca de estos tres números.

Derivadas y diferenciales

Explicaremos brevemente las derivadas y las diferenciales, ya que son fundamentales para las ecuaciones diferenciales. La **derivada** de una función $y(x)$ en un punto es equivalente a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto, y se define como (figura 1-11).

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \tag{1-13}$$

Se dice que una función es **diferenciable** en x si existe este límite y que una función es diferenciable en un intervalo cerrado si es diferenciable en cada número dentro de tal intervalo. Que una función sea continua no es ninguna garantía de su diferenciabilidad. Una función no es diferenciable cuando experimenta un cambio repentino en su pendiente (una esquina). Por ejemplo, la función graficada en la figura 1-12 no es diferenciable en a, ya que su pendiente en a cuando nos acercamos a ésta desde la izquierda, es diferente de su pendiente en a cuando nos acercamos a ella desde la derecha.

En la definición dada, Δx representa un cambio (pequeño) en la variable independiente x, y se llama **incremento** de x. El cambio correspondiente en la función y se llama **incremento** de y, y se representa como Δy. Esto se expresa como

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \tag{1-14}$$

Mediante la notación de incrementos, la derivada de una función también puede expresarse como

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1-15}$$

Por tanto, la derivada de una función puede visualizarse como la razón del incremento Δy con respecto del incremento Δx de la variable independiente para Δx

muy pequeño. Observe que Δy (y por tanto $y'(x)$) será cero si la función no cambia con x.

El incremento Δx de la variable independiente x también se representa como dx, y se llama **diferencial** de la variable independiente. Entonces, la **diferencial** dy de la variable dependiente se define como

$$dy = y'(x)\,\Delta x = y'(x)\,dx \tag{1-16}$$

Observe que el incremento Δx y la diferencial dx de la variable independiente x son idénticos. Pero éste no es el caso para la variable dependiente y, a menos que sea una función lineal de x (es decir, una línea recta). El incremento Δy representa el cambio real en la función y correspondiente a un cambio Δx en x; mientras que la diferencial dy constituye la cantidad en que se eleva la recta tangente (o disminuye si dy es negativo) cuando x cambia de x a $x + \Delta x$, como se ilustra en la figura 1-13. Asimismo, observe que cuando Δx es pequeño, entonces $\Delta y \approx dy$, y dy puede usarse como aproximación al cambio exacto Δy. Esta observación es la base del popular método numérico para resolver ecuaciones diferenciales conocido como *método de diferencias finitas*. La experiencia demuestra que, con algo de cuidado, se pueden obtener resultados muy precisos de esta manera.

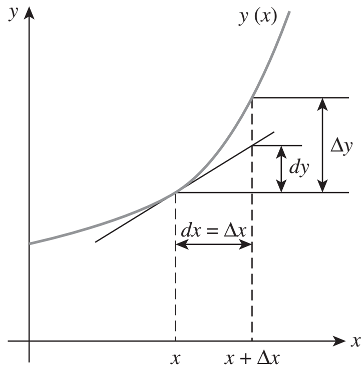


FIGURA 1-13
Representación gráfica del incremento Δy y la diferencial dy de una función $y(x)$.

Para $dx \neq 0$, la ecuación 1-16 puede reescribirse como

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{1-17}$$

que es otra notación que se usa comúnmente para la derivada en términos de diferenciales. Esta notación se le debe a Leibniz, quien la usaba en su trabajo a finales del siglo XVII.

Al derivar una función complicada como

$$y(x) = (2x^2 - 3x)^3 + 5 \tag{1-18}$$

es muy conveniente definir una nueva variable como $u = 2x^2 - 3x$, de modo que $y = y(u)$ o $y = y[u(x)]$. La derivada de una función compuesta como ésta se determina fácilmente aplicando la **regla de la cadena**, que se expresa así: si $y = y(u)$ y $u = u(x)$ y existen tanto dy/du como du/dx, entonces la derivada de la función compuesta y con respecto a x está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{1-19}$$

En nuestro caso, $y = u^3 + 5$ y $u = 2x^2 - 3x$, de tal forma que al aplicar de la regla de la cadena resulta en (figura 1-14)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (3u^2)(4x - 3) = 3(2x^2 - 3x)^2(4x - 3) \tag{1-20}$$

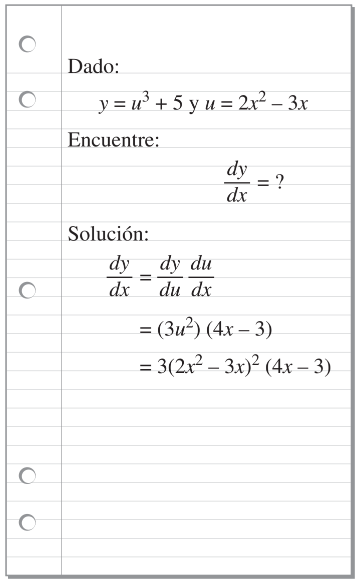


FIGURA 1-14
Una manera de encontrar la derivada de una función y que depende de u y que, a la vez, depende de x aplicando la regla de la cadena.

La mayoría de los problemas reales tienen cantidades que cambian con el tiempo t, y sus primeras derivadas con respecto al tiempo representan la **rapidez de cambio** de dichas cantidades. Por ejemplo, si $N(t)$ representa la población de una colonia bacteriana en un tiempo específico, entonces la primera derivada $N' = dN/dt$ representa la rapidez de cambio de la población, o sea, la cantidad en que aumenta o disminuye la población por unidad de tiempo.

Si la derivada de la primera derivada de una función y existe, se llama **segunda derivada** de y, y se representa así: y''. De modo similar, la derivada de la segunda derivada de y se llama **tercera derivada** de y, y se representa como y'''. En general, la derivada de la $(n - 1)$ésima derivada de y se llama ***n*-ésima derivada** de y, y se representa como $y^{(n)}$. Las derivadas de orden más alto también se representan usando la notación diferencial

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ y''' = \frac{d^3y}{dx^3},\ \cdots,\ y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} \tag{1-21}$$

Aquí, n es un número entero positivo y se llama **orden** de la derivada. El orden n no debe confundirse con el **grado** de una derivada. Por ejemplo, y''' es la derivada de tercer orden de y, pero $(y')^3$ es el tercer grado de la primera derivada de y. El orden de una derivada se indicará con números romanos, como y^{IV}, o por un superíndice encerrado entre paréntesis, como y', y'', $y^{(n-2)}$ y $y^{(n)}$. Observe que la primera derivada de una función representa la *pendiente* o la *rapidez de cambio* de la función con respecto a la variable independiente, y la segunda derivada representa la *rapidez de cambio de la pendiente* de la función con respecto a la variable independiente.

Cuando una función y depende de dos o más variables independientes (como x y t), algunas veces conviene examinar la dependencia de la función respecto a una sola de las variables. Esto se hace tomando la derivada de la función con respecto a esa variable mientras las otras variables se mantienen constantes. Tales derivadas se llaman **derivadas parciales**. Las primeras derivadas parciales de la función $y\,(x, t)$ respecto a x y t se representan como y_x y y_t, respectivamente, y se definen como

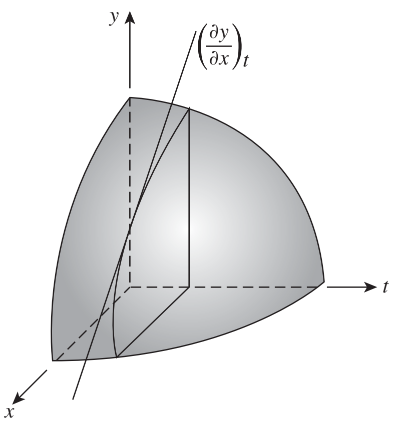


FIGURA 1-15
Representación gráfica de la derivada parcial $(\partial y/\partial x)$.

$$y_x(x, t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x, t) - y(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x} \tag{1-22}$$

y

$$y_t(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(x, t + \Delta t) - y(x, t)}{\Delta t} = \frac{\partial y}{\partial t} \tag{1-23}$$

siempre y cuando existan los límites. Observe que, al buscar y_x, tratamos a x como constante y diferenciamos y con respecto a x. Del mismo modo, al buscar y_t, tratamos t como constante y diferenciamos y con respecto a t. En este caso, la diferencial dy de la variable dependiente $y\,(x,t)$ se define como

$$dy = y_x\,dx + y_t\,dt = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial t}dt \tag{1-24}$$

donde dx y dt son las respectivas diferenciales de las variables independientes x y t, (figura 1-15). En este texto, usualmente consideraremos funciones que solo dependen de una variable y, por tanto, trataremos principalmente con derivadas ordinarias.

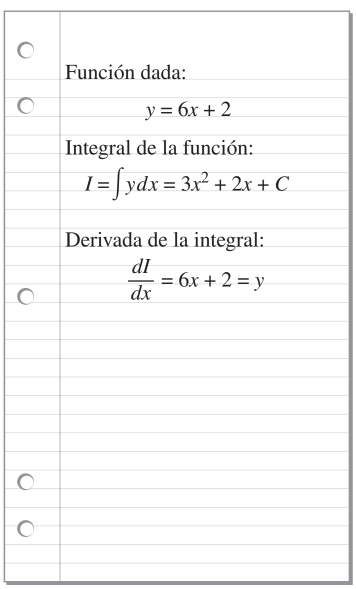


FIGURA 1-16
La derivación y la integración son procesos inversos, esta última puede verificarse derivando la integral.

Integración

La integración puede considerarse como el proceso inverso de la derivación (figura 1-16). La integración se usa comúnmente para resolver ecuaciones diferenciales, ya que solucionar una ecuación diferencial es esencialmente el proceso de encontrar $\int y'(x)dx$ cuando la derivada $y'(x)$ es dada. La integral de esta derivada se expresa como

$$\int y'(x)\,dx = \int dy = y(x) + C \tag{1-25}$$

ya que $y'(x)\ dx = dy$ (ecuación 1-16) y la integral de la diferencial de esta función es simplemente la función misma (más una constante, por supuesto). En la ecuación 1-25, x es la **variable de integración** y C es una constante arbitraria llamada **constante de integración**.

La derivada de $y(x) + C$ es $y'(x)$ sin importar cuál sea el valor de la constante C. Por tanto, dos funciones que difieren por una constante tienen la misma derivada, y siempre agregamos una constante C durante la integración para recuperar la constante que se pierde en la derivación. La integral en la ecuación 1-25 se llama **integral indefinida**, ya que el valor de la constante arbitraria C es indefinido.

La integral en la ecuación 1-25 puede extenderse a derivadas de orden superior (figura 1-17). Por ejemplo,

$$\int y''(x)\,dx = y'(x) + C \qquad \textbf{(1-26)}$$

Esto puede comprobarse definiendo una nueva variable $u(x) = y'(x)$, derivándola para obtener $u'(x) = y''(x)$ y luego aplicando la ecuación 1-25. Generalizando,

$$\int y^{(n)}(x)\,dx = y^{(n-1)}(x) + C \qquad \textbf{(1-27)}$$

Por tanto, el orden de una derivada disminuye en uno cada vez que se integra.

En esta sección hemos repasado brevemente algunos conceptos importantes de cálculo para asentar las bases para las ecuaciones diferenciales. Se le invita a leer más por su cuenta para tener una mayor comprensión de estos conceptos y así dominarlos. La experiencia del autor es que la mayoría de las dificultades que los estudiantes encuentran al estudiar las ecuaciones diferenciales se deben a una formación deficiente en cálculo. Por ejemplo, la ecuación

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C \qquad \textbf{(1-28)}$$

es correcta, al igual que la siguiente ecuación para una función $y(x)$:

$$\int y\,dy = \frac{y^2}{2} + C \qquad \textbf{(1-29)}$$

Pero la ecuación

$$\int y\,dx = \frac{y^2}{2} + C \qquad \textbf{(1-30)}$$

NO es correcta. Si lo fuera, no necesitaríamos ninguna tabla de integrales. Simplemente tomaríamos el cuadrado de la función dada, lo dividiríamos entre dos y le agregaríamos una constante arbitraria para obtener su integral. Sin embargo, muchos estudiantes no comprenden esto antes de cometer algunos errores graves.

$$\int dy = y + C$$

$$\int y'dx = y + C$$

$$\int y''dx = y' + C$$

$$\int y'''dx = y'' + C$$

$$\int y^{(n)}dx = y^{(n-1)} + C$$

FIGURA 1-17
Algunas integrales indefinidas que incluyen diferenciales y derivadas.

Repaso de la sección

1-7C ¿Qué es una variable? ¿Cómo se distingue una variable dependiente de una independiente en un problema?

1-8C ¿Cómo se identifican las funciones discontinuas?

1-9C ¿Cuál es la diferencia entre derivadas parciales y derivadas ordinarias?

1-10C ¿Cuál es la diferencia entre el grado y el orden de una derivada?

1-11C Examine una función $f(x)$ y su derivada df/dx. ¿Esta derivada puede determinarse al evaluar dx/df y tomar su valor inverso?

1-12 Determine los intervalos en los que las siguientes funciones son continuas:

a) $x + 2$ *b*) $(x - 1)\ln x$

c) $\dfrac{1}{x}$ *d*) $\dfrac{e^x}{x^2 - 1}$

(*Respuestas: a*) continua para todas las x, *b*) continua para todas las x positivas, *c*) continua para todas las x salvo $x = 0$, *d*) continua para todas las x salvo $x = \pm 1$).

1-13 Determine la derivada de las siguientes funciones:

a) $x \ln 2x$ *b*) $e^{-3x} \operatorname{sen} x$

c) $(x^2 - 1)^3 e^{\ln x}$ *d*) $\operatorname{sen}^2(x\sqrt{x})$

(*Respuestas: a*) $\ln(2x) + 1$, *b*) $-e^{-3x}(3 \operatorname{sen} x - \cos x)$, *c*) $(x^2 - 1)^2(7x^2 - 1)$, *d*) $\dfrac{3\sqrt{x}}{2} \operatorname{sen}(2x\sqrt{x})$).

1-14 Realice las siguientes integraciones:

a) $\displaystyle\int [x^2 + e^{-3x} + \operatorname{sen} 5x]dx$

b) $\displaystyle\int_1^5 \left[\ln 3x + \frac{5}{x}\right]dx$

(*Respuestas*: *a*) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{e^{-3x}}{3} - \dfrac{\cos 5x}{5} + C$, *b*) $4 \ln 3 - 4 + 10 \ln 5$).

1-4 ▪ CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Una ecuación diferencial que solo contenga derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente se llama **ecuación diferencial ordinaria**, y una ecuación diferencial que incluye derivadas parciales con respecto a dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial** (figura 1-18). En consecuencia, los problemas que incluyen una sola variable independiente resultan en ecuaciones diferenciales ordinarias; y los problemas que incluyen dos o más variables independientes, dan por resultado ecuaciones diferenciales parciales. Como en este texto limitaremos nuestras explicaciones a ecuaciones diferenciales ordinarias, los problemas que intentaremos resolver están automáticamente limitados a ecuaciones como

a) Una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx} = 2x^2 + 6$$

b) Una ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial v}{\partial t} = 2x^2 + e^t$$

FIGURA 1-18
Una ecuación diferencial ordinaria y una parcial.

$$y''' + 3x^2y' - 4y = xe^x + 2 \qquad \textbf{(1-31)}$$

que incluye una sola variable independiente. Aquí y es la variable dependiente (la función incógnita), y x es la variable independiente.

Una ecuación diferencial puede incluir distintas derivadas de varios órdenes de una función incógnita. El orden de la derivada más alta en una ecuación diferencial es el **orden de la ecuación**. Por ejemplo, el orden de $y''' + (y'')^6 = 4x^5$ es 3, ya que no contiene derivadas de cuarto orden o de orden superior.

Se dice que una ecuación diferencial está en **forma estándar** o **normalizada** si el coeficiente de su derivada de orden superior es 1. Por ejemplo, la ecuación diferencial en la ecuación 1-31 está en forma estándar, ya que el coeficiente de y''' (que es la derivada de orden más alto en esa ecuación) es 1. Una ecuación diferencial puede ponerse en forma estándar dividiendo la ecuación entre el coeficiente de la derivada de orden más alto.

Usted recordará, por álgebra, que la ecuación $3x - 5 = 0$ es mucho más fácil de resolver que la ecuación $x^4 + 3x - 5 = 0$, porque la primera es lineal y la segunda no lo es. Esto también aplica en las ecuaciones diferenciales. Por tanto, antes de comenzar a resolver una ecuación diferencial, usualmente verificamos primero la linealidad. Se dice que una ecuación diferencial es **lineal** si la variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado y sus coeficientes solo dependen de la variable independiente. En otras palabras, una ecuación diferencial es lineal si puede escribirse en una forma que no incluya lo siguiente:

(1) Ninguna potencia de la variable dependiente ni de sus derivadas (tales como y^3 o $(y'')^2$).
(2) Ningún producto de la variable dependiente ni de sus derivadas (tales como yy' o $y'y'''$).
(3) Ninguna otra función no lineal de la variable dependiente (tales como sen y o e^y)

De otra manera, es **no lineal**.

Una ecuación diferencial lineal puede contener lo siguiente:

(1) Potencias o funciones no lineales de la variable independiente (tales como x^2 y $\cos x$).
(2) Productos de una variable dependiente (o de sus derivadas) y funciones de una variable independiente (tales como x^3y', x^4y o $e^{-2x}y''$) (vea la figura 1-19).

Así, vemos que el modelo de un circuito RC, como en la ecuación (1-10), es lineal:

$$RC\frac{dv_1}{dt} + v_1 = V \tag{1-10}$$

El modelo de la cafetera que escurre (ecuación 1-11) es no lineal porque la variable dependiente h se eleva a la potencia $1/2$ debido a que está dentro de la raíz cuadrada.

$$\rho A\frac{dh}{dt} = \rho q_{\text{vi}} - k\sqrt{\rho g h} \tag{1-11}$$

Una ecuación diferencial lineal de orden n puede expresarse en la forma más general como

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = R(x) \tag{1-32}$$

Una ecuación diferencial que no puede plantearse de esta forma es no lineal.

Se dice que una ecuación diferencial lineal en y también es **homogénea** si $R(x) = 0$ para todas las x que se consideran. De otra manera, es **no homogénea** (figura 1-20). Es decir, cada término en una ecuación homogénea lineal contiene la variable dependiente o una de sus derivadas después de simplificar todo factor común de tal ecuación. El término $R(x)$ se conoce como **término no homogéneo**.

Una ecuación lineal homogénea de orden n puede expresarse en la forma general como

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = 0 \tag{1-33}$$

El término *homogéneo* también se usa con otro significado: para describir una clase especial de ecuación diferencial de primer orden, lo cual se explica en el capítulo 2.

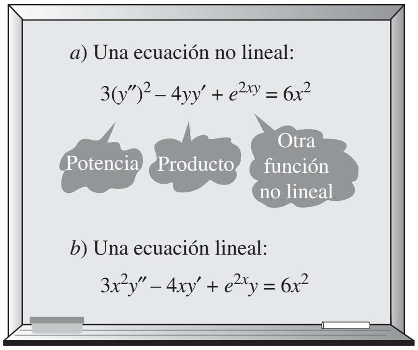


FIGURA 1-19
Una ecuación diferencial que es *a*) no lineal y *b*) lineal. Al decidir sobre la linealidad, solo revisamos la variable dependiente.

a) Una ecuación lineal no homogénea:

$$y'' + 3y' - 8x^2y = \underbrace{6e^{-2x} - 5}_{\text{No cero}}$$

b) Su ecuación homogénea relacionada:

$$y'' + 3y' - 8x^2y = \underset{\substack{\uparrow\\\text{Cero}}}{0}$$

FIGURA 1-20
Una ecuación diferencial no homogénea y su ecuación homogénea relacionada.

EJEMPLO 1-8 Clasificación de ecuaciones diferenciales

Determine el orden de las siete ecuaciones diferenciales siguientes e indique si son lineales o no. También especifique cuáles ecuaciones lineales son homogéneas.

1. $y'' + 3y = 0$
2. $y'' + 3y = 2x + 5$
3. $y'' + 3yy' = 0$
4. $y''' + 2(y')^2 + 3y = 5$
5. $y'' + 3x^4y = 0$
6. $y'' + 3xy^4 = e^{-2x}$
7. $y''' + y' + \text{sen}\, y = 0.2$

Solución Al examinar cuidadosamente las ecuaciones anteriores, llegamos a la siguiente conclusión:

1. Segundo orden, lineal, homogénea.
2. Segundo orden, lineal, no homogénea.
3. Segundo orden, no lineal.
4. Tercer orden, no lineal.
5. Segundo orden, lineal, homogénea.
6. Segundo orden, no lineal.
7. Tercer orden, no lineal.

Las ecuaciones diferenciales también se clasifican por la naturaleza de los coeficientes de la variable dependiente y sus derivadas. Se dice que una ecuación diferencial tiene **coeficientes constantes** si los coeficientes de todos los términos que incluyen la variable dependiente o sus derivadas son constantes. Se dice que esa ecuación tiene **coeficientes variables** (figura 1-21) si cualquiera de los términos con la variable dependiente o sus derivadas incluyen la variable independiente como coeficiente después de despejar todos los factores comunes. Todas las ecuaciones diferenciales del ejemplo 1-8 —salvo la (5) y la (6)— tienen coeficientes constantes.

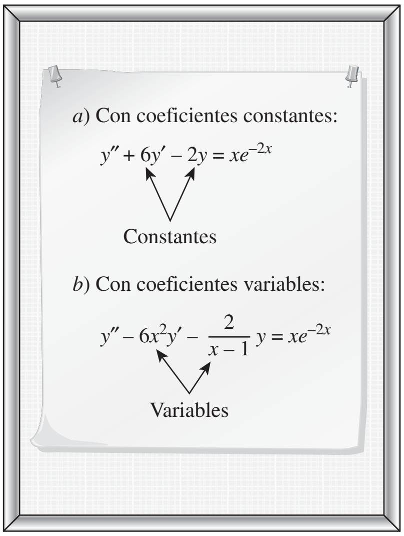


FIGURA 1-21
Una ecuación diferencial con *a*) coeficientes constantes y *b*) coeficientes variables.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias se caracterizan por tener una sola variable independiente. La mayoría de las ecuaciones diferenciales que estudiaremos tendrán también una sola variable dependiente o función incógnita. Sin embargo, algunas veces hay dos o más funciones incógnitas en dos o más ecuaciones diferenciales acopladas. Tales ecuaciones se llaman **sistemas de ecuaciones diferenciales** y usualmente se resuelven usando álgebra lineal; por ejemplo,

$$y'' + 3y' - 5z = 0$$
$$z'' - 2y - 2z - \operatorname{sen} x = 0$$

es un sistema de dos ecuaciones diferenciales en dos funciones incógnitas, z y y, con x como variable independiente.

Repaso de la sección

1-15C ¿Cuál es la diferencia entre una ecuación algebraica y una ecuación diferencial?

1-16C ¿Cuál es la diferencia entre una ecuación diferencial ordinaria y una ecuación diferencial parcial?

1-17C ¿Cómo se determina el orden de una ecuación diferencial?

1-18C ¿Cómo se distingue una ecuación diferencial lineal de una no lineal?

1-19 Determine el orden de cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes, ya sean lineales o no lineales, o que tengan coeficientes constantes o variables.

a) $y''' + 3y = 8x$ *b*) $y'' + 3xyy' = 0$

c) $y'' + x^4y' + y = 0$ *d*) $y'' + 2e^xy = 0$

e) $xy''' + 2xyy'' + 3xy = 5x^3$

(*Respuestas: a*) tercer orden, lineal, coeficientes constantes; *b*) segundo orden, no lineal, coeficientes variables; *c*) segundo orden, lineal, coeficientes variables; *d*) segundo orden, lineal, coeficientes variables; *e*) tercer orden, no lineal, coeficientes variables).

1-5 ▪ SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Resolver una ecuación diferencial puede ser tan simple como hacer una o más integraciones; pero las ecuaciones diferenciales sencillas son la excepción más que la regla. No hay un solo método general de resolución que sea aplicable a todas las ecuaciones diferenciales. Hay diferentes técnicas de resolución, y cada una aplica a distintas clases de ecuaciones diferenciales. A veces, para resolver una ecuación diferencial es necesario usar dos o más técnicas, así como ingenio y dominio de los métodos de resolución. Algunas ecuaciones diferenciales pueden resolverse mediante el uso de algunos trucos, mientras que otras simplemente no pueden solucionarse en forma analítica.

En álgebra, usualmente buscamos *valores* discretos que satisfagan una ecuación algebraica (tal como $x^2 - 7x + 10 = 0$). Sin embargo, tratándose de ecuaciones diferenciales, buscamos *funciones* que satisfagan la ecuación en un intervalo especificado. Por ejemplo, solo dos números satisfacen la ecuación algebraica $x^2 - 7x + 10 = 0$, los cuales son 2 y 5. Pero la función e^{7x} satisface la ecuación diferencial $y' - 7y = 0$ para cualquier valor de x (figura 1-22).

Considere la ecuación algebraica $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Obviamente, $x = 1$ satisface esta ecuación y, por tanto, es su solución. Sin embargo, no es la única solución a esta ecuación. Por sustitución directa podemos comprobar que $x = 2$ y $x = 3$ también satisfacen esta ecuación; por tanto, también son soluciones, pero son las únicas para esta ecuación. Por tanto, decimos que el conjunto 1, 2 y 3 forman el conjunto solución de esta ecuación algebraica.

La misma línea de razonamiento también se aplica a las ecuaciones diferenciales. Usualmente, las ecuaciones diferenciales tienen soluciones múltiples que contienen por lo menos una constante arbitraria. Cualquier función que satisfaga la ecuación diferencial en un intervalo se llama **solución** de esa ecuación diferencial. Una solución que incluya una o más constantes arbitrarias representa una familia de funciones que satisfacen la ecuación diferencial y se llama **solución general** o **solución completa** si *cada* solución de la ecuación puede obtenerse de ella como caso especial. Una solución que puede conseguirse a partir de una solución general mediante la asignación de valores específicos a las constantes arbitrarias se llama **solución particular** o **solución específica**. Una solución que no puede obtenerse a partir de la solución general asignando valores específicos a las constantes arbitrarias se llama **solución singular.**

En álgebra aprendimos que un número es una solución de una ecuación algebraica si satisface la ecuación. Por ejemplo, $x_1 = 2$ es una solución de la ecuación $x^3 - 8 = 0$ porque al sustituir la x por 2, el resultado es idéntico a cero. Del mismo modo, una función es una solución de una ecuación diferencial si dicha función satisface la ecuación diferencial. En otras palabras, una función solución da una identidad cuando se sustituye en una ecuación diferencial.

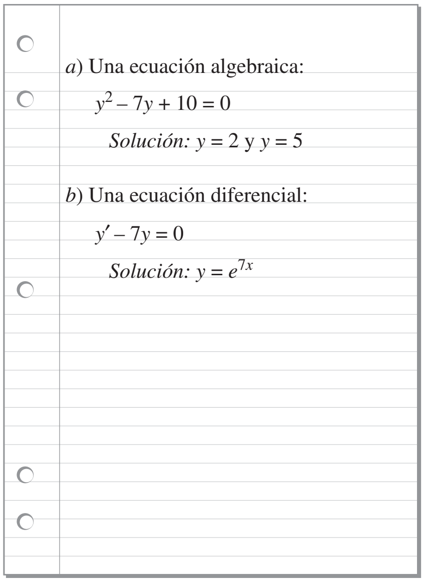


FIGURA 1-22
A diferencia de las ecuaciones algebraicas, las soluciones de las ecuaciones diferenciales usualmente son funciones en vez de valores discretos.

EJEMPLO 1-9 Solución de una ecuación diferencial

Compruebe que $y_1 = 3e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 4y = 0$.

Solución La función dada es una solución de la ecuación diferencial anterior si al restar 4 veces la función misma de su segunda derivada resulta cero. La primera y segunda derivadas de $y_1 = 3e^{-2x}$ son $y_1' = -6e^{-2x}$ y $y_1'' = 12e^{-2x}$.

Entonces tenemos $y'' - 4y = 12e^{-2x} - 4(3e^{-2x}) = 0$. Por tanto, y_1 es una solución de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 1-10 **Solución general de una ecuación diferencial**

Compruebe que $y_1 = Cxe^{2x} + 2x - 3$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 4y = 8x - 20$, sin importar cuál sea el valor de la constante arbitraria C.

Solución La primera y segunda derivadas de $y_1 = Cxe^{2x} + 2x - 3$ son

$$y_1' = C(e^{2x} + 2xe^{2x}) + 2 = Ce^{2x} + 2Cxe^{2x} + 2$$

y

$$y_1'' = 2Ce^{2x} + 2C(e^{2x} + 2xe^{2x}) = 4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y &= (4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x}) - 4(Ce^{2x} + 2Cxe^{2x} + 2) + 4(Cxe^{2x} + 2x - 3) \\ &= 4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x} - 4Ce^{2x} - 8Cxe^{2x} - 8 + 4Cxe^{2x} + 8x - 12 \\ &= 8x - 20 \end{aligned}$$

Por tanto, y_1 es una solución de la ecuación diferencial independientemente del valor de la constante C. Ésta es una solución general porque incluye una constante arbitraria.

Reexamine la ecuación diferencial que describe la elevación de temperatura de una bola de cobre con el tiempo cuando se le deja caer en agua caliente a una temperatura T_0 (ecuación 1-5). Como usted verá en el capítulo 2, la solución general de esta ecuación diferencial es

$$T(t) = T_0 - (T_0 - C)e^{-hAt/mc} \quad \textbf{(1-34)}$$

donde C es una constante arbitraria. Es posible comprobar por sustitución directa que esta solución satisface la ecuación 1-5 para cualquier valor de la constante C. En otras palabras, dicha ecuación, como cualquier otra ecuación diferencial, tiene un número infinito de soluciones, ya que la constante arbitraria C puede tener un número infinito de valores. Sin embargo, esto no es sorprendente porque la ecuación diferencial y su solución general no incluyen la temperatura inicial T_i y, como usted esperaría, la temperatura de la bola en un tiempo especificado t ciertamente dependerá de T_i. Para $t = 0$, la ecuación 1-34 da $C = T(0) = T_i$, ya que $T(0)$ indica la temperatura de la bola en $t = 0$, que es la temperatura inicial. Sustituyendo, la solución resulta en

$$T(t) = T_0 - (T_0 - T_i)e^{-hAt/mc} \quad \textbf{(1-35)}$$

En la figura 1-23 se grafican las curvas de la solución para un valor constante de hA/mc y para diferentes valores de T_i, formando una familia de curvas que no se intersecan. Observe que cada curva corresponde a un valor específico de T_i, el cual es el eje de temperatura (o la línea $t = 0$). Por tanto, una vez que se especifica la temperatura inicial T_i, la solución de la ecuación diferencial es obtenida. La respuesta que nos interesa es la que interseca el eje T en el valor T_i especificado.

Este ejemplo comprueba que, aunque un problema bien planteado usualmente tiene una solución única, la ecuación diferencial que describe ese problema puede tener un número infinito de soluciones. Esto se debe a que una ecuación diferencial es una relación entre los *cambios* en las variables dependientes e independientes, y no tiene información relacionada con los *valores* de una función ni de sus derivadas para algunos valores fijos de la variable independiente.

En consecuencia, muchos problemas diferentes relacionados con los mismos fenómenos físicos tienen la misma ecuación diferencial. Por ejemplo, la ecuación 1-35 es la ecuación diferencial para el calentamiento (o incluso enfriamiento) de una bola sólida en un entorno a T_0, sin importar la temperatura inicial de la bola sólida.

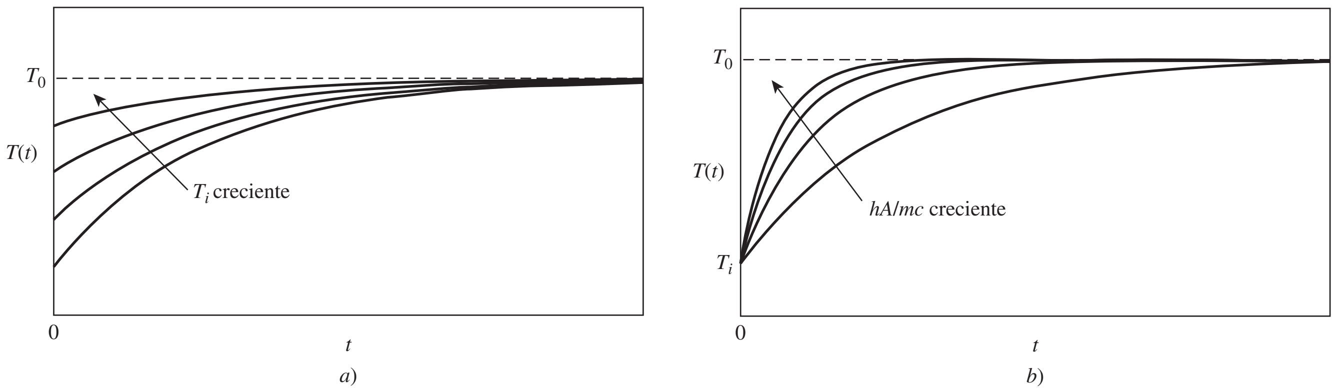


FIGURA 1-23
Curvas de solución para la temperatura como función del tiempo basadas en la ecuación 1-35. *a*) Comportamiento de la solución para hA/mc fijo con cuatro diferentes valores de la temperatura inicial T_i; *b*) comportamiento de la solución para una temperatura inicial fija T_i con cuatro valores diferentes de hA/mc.

De aquí se desprende que para obtener una solución única a un problema, necesitamos especificar más que solo la ecuación diferencial rectora. Debemos especificar algunas condiciones (tales como el valor de la función o el de sus derivadas para algún valor de la variable independiente) de modo que al forzar la solución para satisfacer estas condiciones se obtenga como resultado una solución única.

Pero, como la ecuación diferencial no tiene lugar para la información adicional ni para las condiciones necesarias, debemos proporcionarlas por separado. Éstas se llaman **condiciones iniciales** si todas ellas se especifican para el mismo valor de la variable independiente; y **condiciones en la frontera** si se especifican para dos o más valores de la variable independiente. Una ecuación diferencial acompañada de un conjunto de condiciones iniciales se conoce como **problema con valores iniciales**, mientras que una ecuación diferencial acompañada de condiciones en la frontera se conoce como **problema con valores en la frontera** (figura 1-24).

a) Un problema con valores iniciales:

$$y'' - 3y' + y = 2xe^{-4x}$$
$$y(2) = 5$$
$$y'(2) = -3$$

b) Un problema con valores en la frontera:

$$y'' - 3y' + y = 2xe^{-4x}$$
$$y(2) = 5$$
$$y(8) = -3$$

FIGURA 1-24
Problemas con valores iniciales y valores en la frontera.

EJEMPLO 1-11 Caída libre de un cuerpo

Cuando la resistencia del aire es despreciable, la caída libre de un cuerpo está regida por la ley de gravedad. Considere un objeto que inicialmente está a una altura $z = h$ y se deja caer libremente en el tiempo cero, como se muestra en la figura 1-25. Escriba la formulación matemática de este problema, y determine si es un problema de valores iniciales o de valores en la frontera.

Solución La formulación matemática de un problema implica escribir la ecuación diferencial rectora y las condiciones en la frontera o condiciones iniciales adecuadas. La ecuación diferencial para este problema se determinó en el ejemplo 1-1 (ecuación 1-3) como

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

donde z es la distancia vertical a partir de un nivel de referencia como el suelo, y g es la aceleración de la gravedad. En el tiempo $t = 0$, el objeto se especifica como estacionario (velocidad $V_0 = 0$) con altura h. Así, las condiciones iniciales para este problema pueden expresarse como

$$V(0) = \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = 0 \qquad \textbf{(1-36)}$$
$$z(0) = h$$

Ésta es la formulación completa del problema y, como verá usted en la siguiente sección, da por resultado una solución única para la función incógnita z.

Este problema se reconoce fácilmente como uno de valores iniciales, ya que ambas condiciones se especifican para el mismo valor de la variable independiente, $t = 0$.

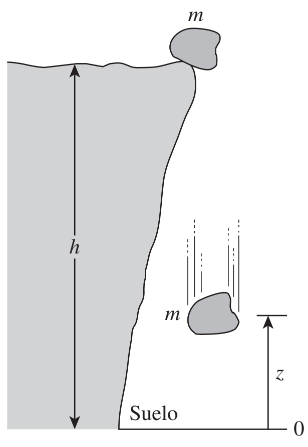


FIGURA 1-25
Ilustración para el ejemplo 1-11.

Pero, si la velocidad (o la posición) se especificara en un tiempo diferente (como $t = 15$ s), mientras la posición se determinara en $t = 0$, sería un problema de valores en la frontera.

Al resolver una ecuación diferencial, es muy conveniente obtener una solución de forma cerrada, que sea una expresión analítica para la función incógnita en términos de la variable independiente (como $y = y(x)$). Numerosas ecuaciones diferenciales de interés práctico tienen soluciones de forma cerrada y de fácil obtención, como usted verá en el siguiente capítulo. Pero la mayoría de las ecuaciones diferenciales no pueden resolverse mediante ninguno de los métodos conocidos y, por tanto, se necesita realizar un tratamiento de aproximación. Tales problemas pueden solucionarse con exactitud razonable usando un método numérico adecuado, como se explica en el capítulo 9. Cuando se emplea un método numérico, la solución se obtiene en puntos discretos y no como una función continua en todo el dominio

Observe que cualquier relación que satisfaga la ecuación diferencial y solo incluya la función incógnita y las variables independientes (sin derivadas) es una solución de la ecuación. Si la función incógnita nada más puede expresarse en términos de la variable independiente, se dice que la solución es **explícita**; en caso contrario, la solución es **implícita.** La relación $g(x, y) = 0$ define y implícitamente como función de x. Por ejemplo, una solución tal como $y = 3x^2 + \cos x + 5$ es una solución explícita; pero $y = e^{2xy} + 3xy^2 + 5$ es implícita, ya que en este caso no podemos expresar y explícitamente en términos de x solamente.

Repaso de la sección

1-20C ¿Qué son las condiciones en la frontera? ¿Cuál es su valor en la solución de las ecuaciones diferenciales?

1-21C ¿Cuándo se trata de un problema con valores iniciales y cuándo, de uno con valores en la frontera?

Compruebe que las funciones siguientes son soluciones de la ecuación diferencial dada en cada uno de los siguientes problemas

1-22 $y'' = 0,\ y_1 = 5x$, y $y_2 = 2x + 1$

1-23 $y' + 3y = 0,\ y_1 = e^{-3x}$, y $y_2 = 5e^{-3x}$

1-24 $y'' - 4y = 0,\ y_1 = e^{2x}$, y $y_2 = -3e^{-2x}$

1-25 $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0,\ y_1 = 1/x^3$, y $y_2 = 2/x$

1-6 ▪ RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR INTEGRACIÓN DIRECTA

Dado que las ecuaciones diferenciales incluyen derivadas y cada integración reduce el orden de una derivada en una unidad, es natural considerar que la integración directa es un método prometedor para resolver ecuaciones diferenciales. Sin embargo, la resolución de ecuaciones diferenciales por integración directa es una excepción más que la regla, ya que, en la práctica, la mayoría de las ecuaciones diferenciales no pueden solucionarse de esta manera.

Algunas ecuaciones diferenciales importantes son lineales, tienen un solo término con derivadas, y no poseen términos con la función incógnita como un factor. Tales ecuaciones diferenciales pueden resolverse por integración directa, suponiendo (por supuesto) que las integrales puedan resolverse. Algunas otras, incluyendo ciertas no lineales, pueden ponerse en esa forma y también pueden resolverse por integración directa. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$y''' - x^2e^{-6x} = 0 \tag{1-37}$$

puede solucionarse por integración directa, ya que tiene un solo término con una derivada de y, y no tiene términos con y. Pero la ecuación diferencial

$$y''' + 3xy - x^2e^{-6x} = 0 \tag{1-38}$$

no puede resolverse por integración directa pues tiene un término con la función incógnita y.

Al resolver una ecuación diferencial por integración directa, todos los términos de ésta se integran uno a uno aplicando las reglas de integración, y se agrega una constante de integración. Cada vez que se integra la ecuación, el orden de la derivada se reduce en uno, y se introduce una nueva constante de integración. Así, una ecuación diferencial de orden n (como en este caso) se resuelve mediante n integraciones sucesivas, y la solución incluye n constantes de integración.

EJEMPLO 1-12 Solución por integración directa

Determine si las siguientes ecuaciones pueden resolverse por integración directa, y obtenga la solución de las que puedan solucionarse.

a) $y' - 5y + 3 = 0$

b) $y'' - 6x^2 = 0$

c) $2yy' - 4 = 0$

Solución *a*) Esta ecuación diferencial no puede resolverse por integración directa, ya que el segundo término incluye la función incógnita y. Si intentásemos solucionarla por integración directa, obtendríamos

$$y - 5\int y\,dx + 3x = C_1$$

que no tiene derivadas. De modo que tiene la apariencia de una solución, pero a cambio de esto incluye la integral de la función incógnita, que tampoco se conoce; por tanto, ésta no es una solución real. Al integrar, simplemente convertimos la ecuación diferencial en una ecuación integral (figura 1-26).

b) Esta ecuación es lineal e incluye un solo término con derivadas y no tiene ninguno con la función incógnita *y* como factor; por tanto, puede resolverse por integración directa. Integrando una vez obtenemos $y' - 2x^3 = C_1$. Integrando nuevamente obtenemos $y - 0.5x^4 = C_1x + C_2$ o $y = 0.5x^4 + C_1x + C_2$, que es la solución deseada de la ecuación diferencial.

c) Esta ecuación diferencial es no lineal y parece que no puede resolverse por integración directa. Pero una revisión cuidadosa revela que el término $2yy'$ es la derivada de y^2. Por tanto, la integral del primer término es y^2, ya que la integración es simplemente lo contrario de la derivación. Así, cada término de esta ecuación puede integrarse, obteniendo $y^2 - 4x = C_1$ o $y = \pm\sqrt{4x + C_1}$, que es la solución deseada.

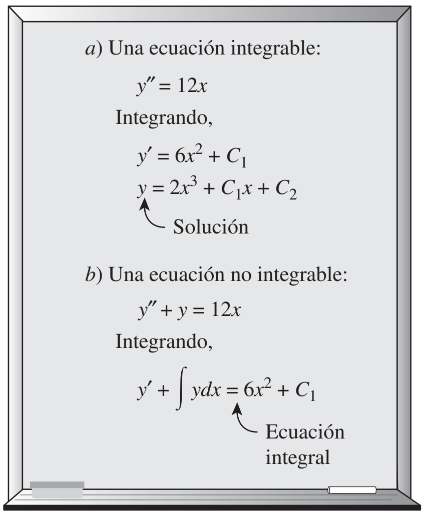


FIGURA 1-26
Algunas ecuaciones diferenciales pueden solucionarse integrando repetidamente cada término hasta que la ecuación no tenga derivadas.

EJEMPLO 1-13 Caída libre de un cuerpo

Un atrevido paracaidista equipado salta desde la cúspide de un edificio de 100 m en una ubicación donde la aceleración gravitacional es $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$. El paracaídas se abre 3 s después del salto. Despreciando la resistencia del aire, determine la altura del individuo cuando se abre el paracaídas.

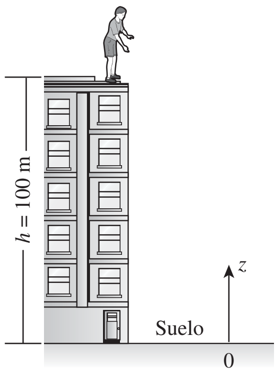


FIGURA 1-27
Ilustración para el ejemplo 1-13.

Solución Éste es un proceso de caída libre bajo la influencia de la gravedad, y el problema puede resolverse fácilmente usando las fórmulas adecuadas de la física. Pero lo vamos a resolver usando ecuaciones diferenciales para comprobar la solución de una ecuación diferencial y la aplicación de las condiciones de frontera o iniciales. Esto también nos ayudará a obtener una comprensión más profunda de esas relaciones físicas.

La función que queremos encontrar en este problema es la distancia vertical z como una función de la variable independiente t (tiempo). Tomamos el suelo como el nivel de referencia y medimos z desde el nivel del suelo, como se muestra en la figura 1-27. La ecuación diferencial rectora para este problema se determinó en el ejemplo 1-1 como (ecuación 1-3)

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

que es una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden. Una revisión rápida de dicha ecuación revela que tiene un solo término con derivadas y ningún término contiene la función incógnita z como factor. Por tanto, puede resolverse por integración directa. Como la ecuación diferencial es de segundo orden, la solución se obtendrá mediante dos integraciones sucesivas, lo cual introducirá dos constantes de integración.

Integrando una vez cada término de la ecuación, obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = -gt + C_1 \tag{1-39}$$

donde C_1 es la primera constante de integración. Observe que el orden de la derivada baja en una unidad con cada integración. Para comprobar, si derivamos esta ecuación, obtendremos la ecuación original directa. Esta ecuación todavía no es la solución, ya que incluye una derivada.

Integrando una vez más, obtenemos

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \tag{1-40}$$

que es la solución general de la ecuación diferencial (figura 1-28).

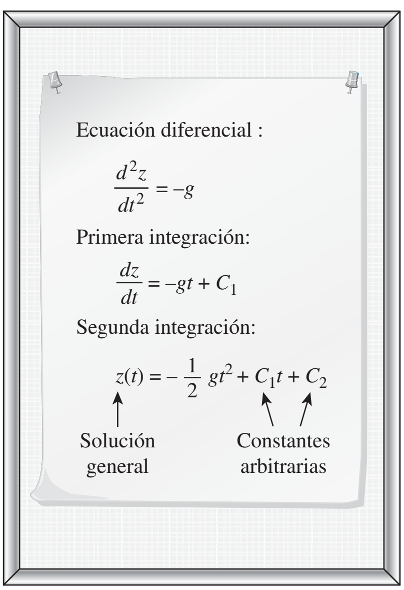


FIGURA 1-28
Obtención de la solución general de una ecuación diferencial sencilla de segundo orden por integración.

Podemos comprobar que contiene todas las soluciones de la ecuación diferencial. Observe que la solución de una ecuación diferencial es una relación entre la función incógnita y la variable independiente, y que no contiene derivadas.

La solución general para z contiene dos constantes arbitrarias y, por tanto, con esta relación no podemos determinar la distancia del individuo desde el suelo cuando se abre el paracaídas. Sin embargo, esto no es sorprendente porque dicha distancia dependerá de la altura del edificio, así como de la velocidad inicial del paracaidista, y la solución general no contiene tal información. Una ecuación diferencial es una relación entre los cambios en las variables dependiente e independiente, y no es afectada por las restricciones o condiciones impuestas a la variable dependiente para algunos valores de la variable independiente. Por ejemplo, si el edificio tuviera una altura de 200 m en vez de 100, la ecuación diferencial y la solución general seguirían siendo las mismas; pero la distancia entre el paracaidista y el suelo en un tiempo específico sería obviamente diferente. Así, las dos constantes arbitrarias en la solución general proporcionan la flexibilidad necesaria para que dicha solución se ajuste a situaciones diferentes.

La solución general contiene dos constantes desconocidas y, por tanto, necesitamos dos ecuaciones para determinarlas en forma única y para obtener la solución específica de nuestro problema. Estas ecuaciones se obtienen forzando la solución general para satisfacer las condiciones iniciales o condiciones de frontera especificadas. La aplicación de cada condición genera una ecuación y, de este modo, necesitamos dos condiciones para determinar las constantes C_1 y C_2. En nuestro caso, se especifica que inicialmente (en $t = 0$), la altura a la que está el paracaidista es 100 m y su velocidad es cero. Luego, como se explica en el ejemplo 1-8, ambas condiciones pueden expresarse matemáticamente como

$$V(0) = \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = 0$$
$$z(0) = 100$$

Al aplicar una condición inicial o de frontera a una ecuación, todas las apariciones de las variables dependiente e independiente y de cualquier derivada se reemplazan por los valores especificados. Así, las únicas incógnitas que contendrá la ecuación son las constantes arbitrarias.

La primera condición puede interpretarse como *tomar la derivada de la solución general y luego reemplazar todas las t y las dz/dt por cero*. Es decir,

$$\frac{dz}{dt} = -gt + C_1$$
$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = -g \times 0 + C_1$$
$$0 = 0 + C_1 \rightarrow C_1 = 0$$

La segunda condición puede explicarse como *en la solución general, reemplazar todas las t por cero y $z(t)$ por* 100. Es decir (figura 1-29)

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$
$$z(0) = -\frac{1}{2}g \times 0^2 + C_1 \times 0 + C_2$$
$$100 = 0 + 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 100$$

Sustituyendo los valores calculados de C_1 y C_2 en la solución general, obtenemos

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 100$$

que es la solución específica deseada porque no solo satisface la ecuación diferencial sino también las dos condiciones especificadas en el tiempo cero. Entonces, la distancia del paracaidista al suelo cuando se abre el paracaídas se determina sustituyendo $g = 9.8\ \text{m/s}^2$ y $t = 3$ s en esta solución,

$$z(3\ \text{s}) = -(1/2)(9.8\ \text{m/s}^2)(3\ \text{s})^2 + 100\ \text{m} = 55.9\ \text{m}$$

Es decir, el paracaidista estará a 55.9 m sobre el nivel del suelo cuando se abra el paracaídas.

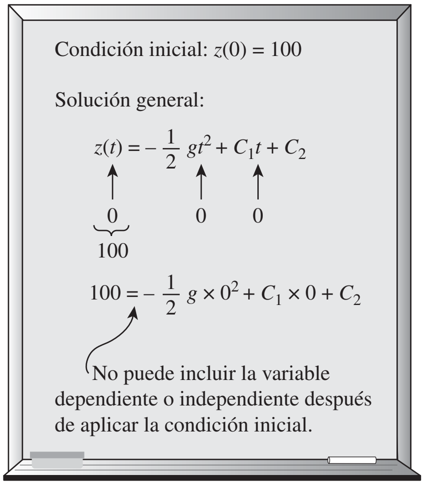


FIGURA 1-29
Al aplicar una condición de frontera y una inicial a la solución general en un número, todas las apariciones de las variables dependiente e independiente se deben reemplazar por sus valores especificados en ese número.

Incluso cuando una ecuación diferencial no puede resolverse por integración directa, todavía es posible reducir su orden por integraciones sucesivas. La reducción del orden se reconoce como una herramienta importante para resolver ecuaciones diferenciales, ya que solucionar ecuaciones de orden inferior usualmente es mucho más simple que cuando son de orden superior. Si una ecuación diferencial lineal incluye varias derivadas de la función incógnita, pero no a la función incógnita misma, su orden puede reducirse en m, donde m es el orden de la derivada de orden mínimo en la ecuación. Por ejemplo, la ecuación diferencial de tercer orden

$$y''' - 3y'' - 12x = 0 \tag{1-41}$$

puede reducirse a una ecuación diferencial de primer orden integrándola sucesivamente dos veces, lo cual produce

$$y'' - 3y' - 6x^2 = C_1$$

y

$$y' - 3y - 2x^3 = C_1 x + C_2 \tag{1-42}$$

Sin embargo, estas ecuaciones no pueden solucionarse por integración directa, puesto que el segundo término incluye ahora la función incógnita y.

EJEMPLO 1-14 Altura del líquido en un tanque que drena

Considere el modelo de altura de líquido h cuando cierto tanque tiene una abertura en la pared (ecuación 1-11 y figura 1-8).

$$\rho A \frac{dh}{dt} = \rho q_{\text{vi}} - k\sqrt{\rho g h}$$

Resuelva esta ecuación para $h(t)$ de tal forma que la tasa de entrada del flujo sea $q_{\text{vi}} = 0$.

Solución Con $q_{\text{vi}} = 0$, el modelo es

$$\rho A \frac{dh}{dt} = -k\sqrt{\rho g h}$$

Esta ecuación puede simplificarse combinando las constantes como

$$\frac{dh}{dt} = -b\sqrt{h},\ b = \frac{k}{A}\sqrt{\frac{g}{\rho}}, \quad \text{o} \quad \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{dh}{dt} = -b \tag{1-43}$$

Obteniendo que

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{dh}{dt} = 2\frac{d(\sqrt{h})}{dt} = -b$$

podemos integrar la ecuación como

$$\sqrt{h} = C - \frac{b}{2}t = \sqrt{h(0)} - \frac{b}{2}t$$

De modo que la solución es

$$h(t) = \left(\sqrt{h(0)} - \frac{b}{2}t\right)^2 \tag{1-44}$$

EJEMPLO 1-15 Diseño de una cafetera

Una cafetera para 15 tazas se colocó bajo una llave de agua y se llenó hasta la línea de capacidad máxima (vea figura 1-30). Con la válvula de salida abierta, se ajustó la tasa del flujo de salida de la llave hasta que el nivel de agua permaneció constante en la línea de 15 tazas, y se midió el tiempo que tardaba en salir de la cafetera el equivalente a una taza de agua. Se repitió el experimento con la cafetera llena hasta 12, nueve y seis tazas. Los datos se muestran en las primeras dos columnas de la siguiente tabla. El flujo se calcula en la tercera columna

Volumen líquido V (tazas)	Tiempo para llenar una taza (s)	Flujo de salida $f = dV/dt$ (tazas/s)	$c = f/\sqrt{V}$
15	6	1/6	0.043
12	7	1/7	0.041
9	8	1/8	0.042
6	9	1/9	0.045

a) En la tabla puede observarse que el tiempo de llenado disminuye al aumentar el volumen. El fabricante quiere ofrecer una cafetera con capacidad para 36 tazas; pero le preocupa que una taza se llene con de-

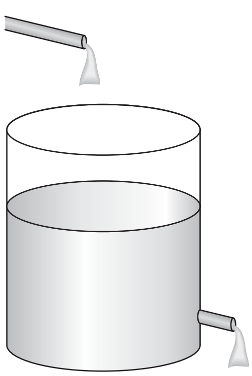


FIGURA 1-30
Una cafetera.

masiada rapidez y se derrame. Estime el tiempo para llenar una taza si dicha cafetera tiene una capacidad para 36 tazas.

b) Si la llave está abierta, ¿cuánto tiempo tardará la cafetera en vaciarse si inicialmente tiene 36 tazas?

Solución *a*) Por la ecuación (1-43) del ejemplo 1-14,

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{dh}{dt} = -b$$

Observe que el volumen V de líquido en la cafetera es $V = \rho A h$. Por tanto, la ecuación anterior puede expresarse en términos de V como

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{dV}{dt} = -b\sqrt{\rho A} = -c \qquad \textbf{(1-45)}$$

Usando la primera y la tercera columnas de la tabla, podemos calcular c para cada punto de datos. Estos valores se muestran en la cuarta columna, y el valor promedio es $c = 0.043$. Sustituyendo $v = 36$ tazas en la ecuación 1-45, y despejando la razón de flujo dV/dt, obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = -0.043(6) = -0.258$$

Entonces, el tiempo para llenar una taza es $1/0.258 = 3.88$ s. De hecho, el fabricante sí produjo una cafetera de 36 tazas, y ¡el tiempo medido para llenar fue de 4 s!

b) Siguiendo el mismo procedimiento que en el ejemplo 1-14, podemos obtener la siguiente solución para la ecuación 1-45:

$$V(t) = \left(\sqrt{V(0)} - 0.0215t\right)^2$$

El tiempo para vaciar la cafetera se encuentra al considerar que $V(t) = 0$ para obtener $t = \sqrt{V(0)}/0.0215 = \sqrt{36}/0.0215 = 279$ s.

Repaso de la sección

1-26C ¿Qué clase de ecuaciones diferenciales pueden resolverse por integración directa?

1-27C Considere una ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden que puede solucionarse por integración directa. ¿Cuántas constantes arbitrarias incluirá la solución?

1-28 Determine cuál de las siguientes ecuaciones diferenciales puede resolverse por integración directa. Obtenga la solución general de las que sí puedan solucionarse.

a) $y' = 0$ *b*) $y' + x = 0$

c) $y' + y = 0$ *d*) $e^x y' + xe^{3x} = 0$

e) $2yy' + \text{sen } 3x = 0$

(*Respuestas:* observe que C es una constante arbitraria. *a*) $y = C$, *b*) $y = \frac{x^2}{2} + C$, *c*) $y(t) = e^{C-t}$, *d*) $y = \frac{e^{2x}}{4}(2x - 1) + C$, *e*) $y = \pm\sqrt{C - (\cos 3x)/3}$).

1-7 ▪ INTRODUCCIÓN A MÉTODOS DE COMPUTADORA

Los software más populares que se usan para aplicaciones de ingeniería son: Maple, Mathematica, MATLAB, MATLAB Symbolic Math Toolbox y MuPAD, que es una interfaz de notebook que se suministra con MATLAB Symbolic Math Toolbox y usa el mismo "motor" que este último. En esta sección ilustramos cómo usar estos programas para resolver problemas (que se encuentran en este capítulo) del siguiente tipo:

- Graficación de soluciones.
- Realizar evaluaciones simbólicas de las integrales necesarias para resolver ecuaciones usando el método de integración directa.
- Interpretar las soluciones en términos de las funciones especiales de las matemáticas.
- Evaluación numérica de integrales.

Suponemos que usted está familiarizado con las operaciones básicas del software de su elección. Cuando use estos programas, asegúrese de elegir primero todas las variables pertinentes. No mostramos esta operación. Observe que Maple formatea sus entradas en notaciones matemáticas mientras usted teclea. Nuestros programas Maple muestran las entradas como usted las teclearía antes de realizar la ejecución. También observe que Mathematica requiere que usted oprima **Shift-Enter** para evaluar un comando, y no solo **Enter**, como lo piden otros software. Estas acciones no se muestran explícitamente en los programas en este texto.

Graficación de soluciones

En aplicaciones de ingeniería, una vez que usted tenga la solución de una ecuación diferencial en forma cerrada, a menudo deberá analizarla. Con frecuencia esto significa que usted necesitará graficar la solución. Aquí mostramos cómo usar los programas principales para hacer esto.

Considere la ecuación 1-35, que es la solución de la temperatura $T(t)$ de una bola de cobre después de dejarla caer en agua caliente. Es

$$T(t) = T_0 - (T_0 - T_i)e^{-rt} \tag{1-46}$$

TABLA 1-1

Gráfica generada por computadora de la ecuación 1-46.

MATLAB

```
t = linspace(0, 2, 300);
T1 = 50 -(50 - 10)*exp(-2*t);
T2 = 50 -(50 - 30)*exp(-2*t);
plot(t,T1,t,T2,'--'),xlabel('Time (s)'),...
   ylabel('Temperature (^oC)'),legend('T1','T2')
```

MuPAD

```
T1 := 50 - (50 - 10)*exp(-2*t):
T2 := 50 - (50 - 30)*exp(-2*t):
F1 := plot::Function2d(T1, t = 0 .. 2):F2 := plot::Function2d
   (T2, t = 0 .. 2):
plot(F1,F2, AxesTitles = ["Time (s)", "Temperature (C)"]):
```

Maple

```
T1 := t->50 - (50-10)*exp(-2*t):
T2 := t->50 - (50-30)*exp(-2*t):
plot({T1,T2},0..2)
```

Mathematica

```
T1 := 50 -(50-10)*Exp[-2*t]
T2 := 50-(50-30)*Exp[-2*t]
Plot[{T1,T2},{t,0,2}]
```

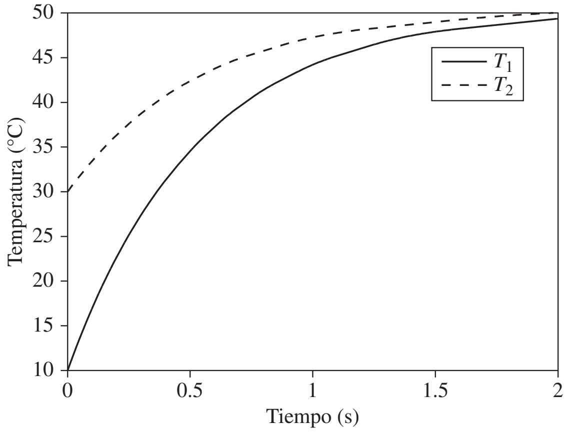


FIGURA 1-31
Gráfica de la temperatura de una bola de cobre sumergida en agua caliente.

donde $r = hA/mc$. Escogiendo los valores $r = 2$, $T_0 = 50$ °C y $T_i = 10$ y 30 °C, podemos usar el software que se presenta en la tabla 1-1 para obtener la gráfica que se muestra en la figura 1-31, que se creó con MATLAB.

Se puede producir una gráfica similar a ésta con otros programas, como se indica en la tabla 1-1.

Integración simbólica

El término **procesamiento simbólico** describe cómo una computadora produce una solución a un problema en forma simbólica o cerrada; es decir, como fórmula matemática. Por ejemplo, tales programas pueden realizar manipulaciones algebraicas y trigonométricas, resolver ecuaciones algebraicas y diferenciales, y evaluar integrales. Los programas de procesamiento simbólico más populares son Maple, Mathematica, MATLAB Symbolic Math Toolbox y MuPAD.

El software para procesamiento simbólico puede usarse para ayudar a obtener soluciones por integración directa. Por ejemplo, considere la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x^2 e^{-2x} \tag{1-47}$$

Su solución por integración directa es

$$y(x) = \int_0^x u^2 e^{-2u} du + y(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2) + y(0) \tag{1-48}$$

En la tabla 1-2 se muestra cómo obtener esta integral con diversos programas.

TABLA 1-2

Cálculo por computadora de la integral definida $x^2 e^{-2x}$.

MATLAB Symbolic Math Toolbox
`syms x` `int('x^2*exp(-2*x)',x, 0, x)`
MuPAD
`int(x^2*exp(-2*x),x=0..x)`
Maple
`int(x^2*exp(-2*x),x=0..x)`
Mathematica
`Integrate[x^2*Exp[-2*x],{x, 0, x}]`

Funciones especiales de las matemáticas

Algunas integrales que parecen sencillas no pueden evaluarse en forma cerrada pero, como se presentan con mucha frecuencia en las aplicaciones, se calcularon numéricamente y sus resultados se tabularon en manuales de matemáticas. Mediante la aproximación de estas integrales con series infinitas, sus valores ahora están disponibles en los software populares. Éstas se llaman *funciones especiales de las matemáticas*, para distinguirlas de las funciones elementales (tales como las exponenciales, logarítmicas y trigonométricas). Introducimos ahora el tema de las funciones especiales porque usted puede encontrarlas al usar un programa.

Un ejemplo de una función especial es la integral de coseno de Fresnel

$$C(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi x^2}{2}\, dx \tag{1-49}$$

Esta integral se debe calcular para resolver la ecuación diferencial $dy/dx = \cos x^2$ por integración directa. Si $y(0) = 0$, la solución en términos de $C(z)$ es

$$y(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\, C\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\pi}}\right) \tag{1-50}$$

Vea la tabla 1-3 para obtener la integral indefinida en la ecuación 1-50.

La función fresnelC(x) en MATLAB y Maple corresponde a la integral de coseno de Fresnel. C(x) y FresnelC(x) son las funciones correspondientes en MuPAD y Mathematica.

Los software usan representaciones seriales de las funciones especiales para evaluarlas numéricamente. Vea la tabla 1-4 para calcular la integral definida $y(\sqrt{2\pi})$. El resultado obtenido hasta con seis cifras decimales en todos estos programas es $y(\sqrt{2\pi}) = 0.611935$.

TABLA 1-3

Cálculo por computadora de la integral indefinida del coseno de Fresnel.

MATLAB	
`syms x` `int(cos(x^2),x)`	
Resultado	$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\ \text{fresnelC}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\pi}}\right)$
MuPAD	
`int(cos(x^2), x)`	
Resultado	$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\text{C}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\pi}}\right)$
Maple	
`int(cos(x^2), x)`	
Resultado	$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\ \text{fresnelC}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\pi}}\right)$
Mathematica	
`Integrate[Cos[x^2],x]`	
Resultado	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \text{FresnelC}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x\right)$

TABLA 1-4

Cálculo por computadora de la integral definida del coseno de Fresnel en $x = \sqrt{2\pi}$.

MATLAB

```
int(cos(x^2),x, 0, sqrt(2*pi));
double(ans)
```

MuPAD

```
int(cos(x^2), x):
subs(%, x = sqrt(2*PI)):
float(%)
```

Maple

```
evalf(int(cos(x^2),t=0..sqrt(2*pi))
```

Mathematica

```
Integrate[Cos[x^2],{x,0,Sqrt[2*Pi]}]//N
```

Integración numérica

Hemos visto varios ejemplos de cómo aplicar la integración directa para resolver una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = f(x)$. La solución puede expresarse formalmente como

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \tag{1-51}$$

Como hay casos en los que la integral no puede ser expresada en forma cerrada ni por una función especial, debemos recurrir a la evaluación numérica de la integral. Ahora resumimos algunas formas en que esto puede conseguirse. En cálculo aprendimos que una integral representa el área debajo de una curva, y que la manera más simple de calcular el área es dividirla en rectángulos y sumar sus áreas individuales (figura 1-32*a*). Si el ancho de los rectángulos es suficientemente pequeño, la suma de sus áreas es igual al valor aproximado de la integral. Este método se llama *integración rectangular*.

Un método más sofisticado consiste en usar elementos trapecios (figura 1-32*b*). MATLAB implementa la integración trapezoidal con la función `trapz`. Su sintaxis es `trapz(x,y)`, donde la matriz `y` contiene los valores de la función en los puntos contenidos en la matriz `x`. Usted no puede especificar directamente una función para integrarla con la función `trapz`; primero debe calcular y almacenar los valores de la función en una matriz. MATLAB también tiene la función `quad`, que

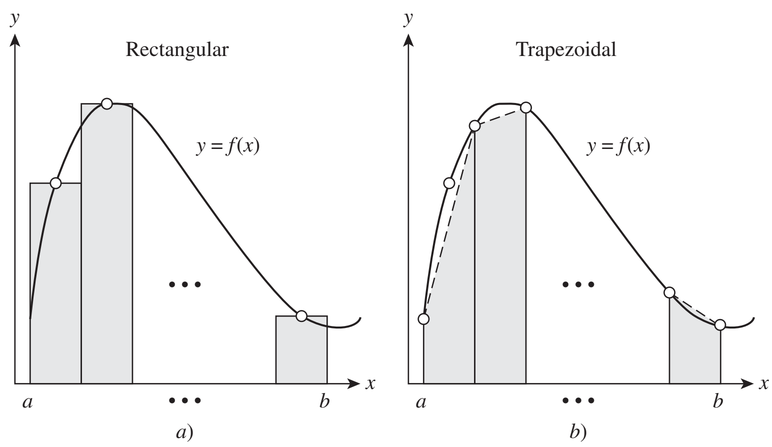


FIGURA 1-32
Ilustración de la integración *a*) rectangular y *b*) trapezoidal.

puede aceptar una función directamente; sin embargo, no puede manejar conjuntos de valores. De modo que las funciones se complementan mutuamente.

En cálculo aprendimos que otra forma de manejar la integración numérica es la *regla de Simpson*, que divide el intervalo de integración en un número par de subintervalos y usa una función cuadrática diferente para representar el integrando en cada subintervalo. Una función cuadrática tiene tres parámetros, y la regla de Simpson los calcula al hacer que los cuadráticos pasen a través de los tres puntos de la función correspondientes a los dos subintervalos adyacentes. Para obtener mayor exactitud, puede usar polinomios de grado mayor que 2. La función `quad` de MATLAB implementa una versión modificada de la regla de Simpson mediante el recurso de variar la anchura del subintervalo. El término *quad* es una abreviación de *quadrature* (cuadratura), que es un término para el proceso de medir áreas.

La función `quad(f,a,b)` de MATLAB calcula la integral de la función `f` entre los límites a y b. La entrada `f`, que representa el integrando $f(x)$, puede desempeñarse como una función que toma la función del integrando (el método preferido) o el nombre de la función en forma de cadena de caracteres (ejemplo, colocados entre comillas sencillas). La función $y = f(x)$ debe aceptar un argumento vectorial x y devolver el resultado vectorial y. Como la función `quad` llama a la función del integrando usando argumentos vectoriales, usted siempre debe usar operaciones de matrices al definirla.

El siguiente ejemplo muestra cómo hacer esto.

EJEMPLO 1-16 Evaluación numérica de una integral

Determine la solución de la ecuación 1-52 en $x = 1$ si $y(0) = 0$.

$$y' = x\tan(x) \tag{1-52}$$

Solución La ecuación puede resolverse por integración directa.

$$y(1) = \int_0^1 x\tan(x)dx \tag{1-53}$$

Lamentablemente, esta integral no tiene una solución en forma cerrada (un software expresará la respuesta en términos de una serie infinita). Por tanto, debemos usar un método numérico. A continuación demostramos dos formas de usar la función `quad`:

1. Para usar un archivo de funciones, defina el integrando con una función definida por el usuario, como lo muestra el archivo de funciones en la tabla 1-5.

   La función quad se llama así: `quad(@xtan,0,1)`. El resultado es $y(1) = 0.4281$.
2. Usando una función anónima, el programa es

```
quad(@(x)x.*tan x),0,1)
```

El resultado es $y(1) = 0.4281$. La ventaja de usar una función anónima es que no hay necesidad de crear ni guardar un archivo de funciones. Sin embargo, para funciones complicadas de integrandos, es preferible usar un archivo de funciones.

TABLA 1-5

Función MATLAB para $x \tan x$

```
function xt = xtan(x)
xt = x.*tan(x);
```

En la tabla 1-6 se muestra cómo usar los otros software para evaluar esta integral. Debido al error numérico de redondeo, usted podría obtener un resultado con una parte pequeña poco real, la cual hemos ignorado.

TABLA 1-6

Cálculo por computadora de la integral definida dada por la ecuación 1-53.

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
syms x
int(x*tan(x),x, 0, 1);
double(ans)
```

MuPAD

```
int(x*tan(x), x):
subs(%, x = 1):
float(%)
```

Maple

```
evalf(Int(x*tan(x),x=0..1))
```

Mathematica

```
Integrate[x*Tan[x],{x,0,1}]//N
```

Resultado en todos los programas:
0.4281

Consideraciones para solucionar una ecuación diferencial por computadora

El mejor método para resolver una ecuación diferencial depende de varias consideraciones:

1. ¿Se necesita una solución de forma cerrada (simbólica), o es aceptable obtener una respuesta numérica en un solo punto o como gráfica? A menudo requiere esfuerzo llegar a una solución de forma cerrada, aun cuando sea posible obtener una. Si el resultado final solo se usa para obtener la solución en un solo punto o para graficarla, entonces usualmente es más simple usar un software para resolver la ecuación en forma numérica.
2. Si se necesita una solución de forma cerrada, ¿se dan las condiciones iniciales, condiciones de frontera, o las constantes de la ecuación como valores numéricos específicos o en forma general? La solución de algunas ecuaciones tiene diferentes formas para distintas condiciones iniciales, varias condiciones de frontera o diversos valores de parámetros. Por ejemplo, considere la ecuación $dy/dt = c^2 - y^2(t)$ donde c es una constante. Si $y^2(0) \neq c^2$ y $c \neq 0$, la solución es

$$y(t) = c\frac{1 + Ae^{-2ct}}{1 - Ae^{-2ct}} \qquad A = \frac{y(0) - c}{y(0) + c} \tag{1-54}$$

Sin embargo, si $c = 0$, la solución tiene una forma diferente, que es

$$y(t) = \frac{y(0)}{1 + y(0)t} \tag{1-55}$$

3. Si se necesita una solución de forma cerrada pero la ecuación no puede resolverse (como sucede con muchas ecuaciones no lineales) considere reemplazar la ecuación no lineal por una lineal mediante una aproximación adecuada para el término no lineal. Por ejemplo, considere la ecuación $y' + y + 4$ sen $y = 0$. Si y es pequeña, podemos reemplazar sen y por y mediante el primer término diferente a cero en la expansión de la serie de Taylor para sen $y \approx y - y^3/6 + \cdots$. La ecuación diferencial se vuelve $y' + 5y = 0$, cuya solución es $y(x) = y(0)e^{-5x}$, mientras y sea pequeña.

4. Las soluciones simbólicas por computadora no son infalibles, de modo que asegúrese de verificar la solución sustituyéndola en la ecuación diferencial y revisando si satisface las condiciones iniciales o las condiciones de frontera.

Revisión de sección

1-29C ¿Se pueden encontrar todas las integrales en una tabla de integrales? ¿Por qué sí o por qué no?

1-30C Defina el procesamiento simbólico.

1-31C ¿Pueden resolverse en forma cerrada todas las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden? ¿Por qué sí o por qué no?

1-8 ▪ RESUMEN

Una ecuación que incluya las derivadas o las diferenciales de una o más funciones se llama *ecuación diferencial*.

Variables y funciones Una cantidad que puede tomar varios valores durante un análisis se llama *variable*; y si su valor puede cambiarse arbitrariamente, se conoce como *variable independiente* o *argumento*. Si su valor depende del de otras variables y, por tanto, no puede cambiarse en forma independiente, se le llama *variable dependiente* o *función*. El conjunto de valores que pueda tomar una variable entre dos números especificados constituye el *intervalo* de dicha variable.

Origen de las ecuaciones diferenciales. La descripción de la mayoría de los problemas científicos incluye relaciones que interrelacionan los *cambios* en algunas variables claves. Usualmente, cuanto menor es el incremento elegido para la variable independiente, más general y exacta es la descripción. En el caso límite de *cambios infinitesimales* en las variables, obtenemos ecuaciones diferenciales que proporcionan formulaciones matemáticas precisas para los principios y las leyes físicas al representar las tasas de cambios como derivadas.

Continuidad. Se dice que una función y es *continua* en un número a si: 1) la función está definida en ese número, 2) existe el límite $\text{lím}_{x\to a} y(x)$ y, 3) este límite es igual al valor de la función en a. Si una función no es continua en a, entonces se dice que es *discontinua* en a, o que tiene una *discontinuidad* en a. La función se considera continua en un intervalo si es continua en cada número dentro de ese intervalo.

Derivadas. La **derivada** de una función y en un punto es equivalente a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto y se define así:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Se dice que una función es *diferenciable* en x si existe este límite; y que es *diferenciable* en un intervalo si es diferenciable en cada número dentro de dicho intervalo. El incremento Δx de la variable independiente x también se representa como dx, y se llama *diferencial* de la variable independiente. Entonces, la diferencial dy de la variable dependiente y se define como $dy = y'(x)\,dx$.

Cuando una función depende de dos o más variables independientes, es posible tomar la derivada de la función con respecto a una de ellas mientras las otras variables se mantienen constantes. Tales derivadas se llaman *derivadas parciales* y se representan con el símbolo ∂. Para funciones que dependen solo de una variable, la derivada parcial y la derivada ordinaria son idénticas. El proceso inverso a la derivación es la *integración*. El orden de una derivada disminuye en uno cada vez que se integra.

Ecuaciones diferenciales. Una ecuación diferencial que solo incluye derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente se llama *ecuación diferencial ordinaria*, y una ecuación diferencial que incluye derivadas parciales con respecto a dos o más variables independientes se llama *ecuación diferencial parcial*. Por tanto, los problemas que implican una sola variable independiente dan por resultado ecuaciones diferenciales ordinarias, y los problemas que incluyen dos o más variables independientes resultan en ecuaciones diferenciales parciales.

Clasificación de las ecuaciones diferenciales ordinarias. El orden de la derivada de orden superior en una ecuación diferencial es el *orden* de dicha ecuación diferencial. Se dice que una ecuación diferencial está en la *forma estándar* si el coeficiente de su derivada de orden superior es 1. Se dice que una ecuación diferencial es *lineal* si la variable dependiente, y todas sus derivadas, son de primer grado y si sus coeficientes dependen solo de la variable independiente. En otras palabras, una ecuación diferencial es lineal si puede escribirse en una forma que no incluya: 1) ninguna potencia de la variable dependiente ni de sus derivadas, 2) ningún producto de la variable dependiente ni de sus derivadas y, 3) ninguna otra función no lineal de la variable dependiente. En caso contrario, es *no lineal*. Una ecuación diferencial lineal de orden n puede expresarse en la forma más general como

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_{n-1}(x)y + f_n(x)y = R(x)$$

Si una ecuación diferencial no puede expresarse así, es no lineal.

También se dice que una ecuación lineal en y es *homogénea* si $R(x) = 0$; en caso contrario, es *no homogénea*. Por otro lado, una ecuación diferencial tiene *coeficientes constantes* si los coeficientes de todos los términos que incluyen la variable independiente o sus derivadas son constantes. Si, después de quitar todos los factores comunes, cualquiera de los términos con la variable dependiente o sus derivadas incluyen la variable independiente como coeficiente, se trata de una ecuación con *coeficientes variables*.

Los modelos de ecuaciones diferenciales que incluyen dos o más de una función incógnita en dos o más ecuaciones diferenciales acopladas se llaman *sistemas de ecuaciones diferenciales*.

Clasificación de soluciones. Las ecuaciones diferenciales pueden tener soluciones múltiples. Cualquier función que satisfaga la ecuación diferencial en un intervalo se llama *solución* de esa ecuación diferencial. Una solución que incluya una o más constantes arbitrarias representa una familia de funciones que satisfacen la ecuación diferencial y se llama *solución general* de esa ecuación.

Una solución se llama *solución general* o *solución completa* si todas las soluciones de la ecuación pueden obtenerse mediante la asignación de valores específicos a las constantes arbitrarias. Una solución así se llama *solución particular* o *solución específica*. Una solución que no puede conseguirse a partir de la solución general mediante la asignación de valores específicos a las constantes arbitrarias se llama *solución singular*.

Al resolver una ecuación diferencial, es muy deseable obtener una solución de forma cerrada. Si la función incógnita puede expresarse en términos de la variable independiente, entonces se dice que la solución es *explícita*; en caso contrario, la solución es *implícita*.

Condiciones iniciales y condiciones de frontera. Para obtener una solución única a un problema, necesitamos especificar algunas condiciones además de la ecuación diferencial rectora. Estas condiciones se llaman *iniciales* si todas ellas se especifican al mismo valor de la variable independiente, o *en la frontera* si se especifican a dos o más valores de la variable independiente. Una ecuación diferencial acompañada de un conjunto de condiciones iniciales se llama *problema con valores iniciales*; pero si está acompañada de una serie de condiciones en la frontera se llama *problema con condiciones en la frontera*.

Solución por integración directa. Una ecuación diferencial incluye derivadas de varios órdenes de una función y, por tanto, a menudo se usa la integración para resolver una ecuación diferencial. La ecuación diferencial que posee un solo término con derivadas y no tiene términos que contengan la función incógnita como factor puede resolverse mediante *integración directa*, suponiendo que la integración sea posible.

Al resolver una ecuación diferencial por integración directa, todos los términos de ésta se integran uno a uno, usando las reglas de integración, y se suma una constante de integración. Incluso cuando una ecuación diferencial no puede resolverse por integración directa, todavía puede ser posible reducir su orden mediante integraciones sucesivas.

Métodos de computadora. Los programas de computadora son útiles para resolver problemas similares a los que se encuentran en el capítulo. Sus tareas incluyen graficación de soluciones, evaluaciones simbólicas de las integrales necesarias para resolver ecuaciones usando el método de integración directa, interpretación soluciones en términos de las funciones especiales de las matemáticas, y evaluación de integrales en forma numérica. El *procesamiento simbólico* describe cómo un software soluciona un problema en forma simbólica o cerrada; es decir, como una fórmula matemática. Por ejemplo, los programas de procesamiento simbólico pueden realizar manipulaciones algebraicas y trigonométricas, resolver ecuaciones algebraicas y diferenciales, y evaluar integrales.

Algunas integrales no pueden evaluarse en forma cerrada, pero se han aproximado con series infinitas. Las funciones resultantes se llaman *funciones especiales de las matemáticas*, para distinguirlas de las funciones elementales (tales como las exponenciales, logarítmicas y trigonométricas). Pueden calcularse con los software populares; sin embargo, hay casos en los que las integrales no pueden expresarse en forma cerrada ni por una función especial, y entonces debemos recurrir a la evaluación numérica de la integral. Los programas proporcionan diversas maneras de hacer esto.

Selección del método de solución. El mejor método para resolver una ecuación diferencial depende de diversas consideraciones: ¿se necesita una solución de forma cerrada (simbólica), o es aceptable obtener nada más una solución numérica en un solo punto o como una gráfica? Si se requiere una solución de forma cerrada, ¿se dan las condiciones iniciales, condiciones de frontera, o las constantes de la ecuación como valores numéricos específicos o en forma general?

La solución de algunas ecuaciones tiene diferentes formas para distintas condiciones iniciales o condiciones de frontera, o diversos valores de parámetros. Si se necesita una solución de forma cerrada pero la ecuación no puede resolverse (como es el caso de muchas ecuaciones no lineales), considere reemplazar la ecuación no lineal por una lineal usando una aproximación adecuada para el término no lineal; por ejemplo, sen $\theta \approx \theta$ para valores pequeños de θ.

PROBLEMAS

1-1 Las ecuaciones diferenciales en las ciencias y en la ingeniería

1-32C Explique cuándo es más adecuado usar un modelo más simplista en vez de uno más realista pero demasiado complejo.

1-2 ¿Cómo surgen las ecuaciones diferenciales?

1-33 Se arroja al aire una roca de masa m desde el suelo, con una velocidad inicial especificada V_i en el tiempo cero. Usando la segunda ley del movimiento de Newton, obtenga una ecuación diferencial que describa la posición z de la roca relativa al nivel del suelo, en función del tiempo. Tome la dirección ascendente como positiva.

1-34 Un objeto pesado de masa m está suspendido en una habitación mediante un resorte lineal cuya constante de resorte es k. Inicialmente, el objeto está apoyado, de modo que el soporte tiene su longitud libre (ni estirado ni comprimido), lo que se considera como $x = 0$. En el tiempo cero, se quita el apoyo para que el objeto oscile bajo la influencia tanto de la gravedad como de la fuerza del resorte. Usando la segunda ley del movimiento de Newton, obtenga una ecuación diferencial que describa la posición x de la masa m relativa al punto terminal no alterado del resorte en función del tiempo.

1-35 Considere un objeto metálico pequeño y caliente que inicialmente (en $t = 0$) está a una temperatura $T_i = 200°C$. El objeto se deja enfriar en un entorno a $T_0 = 25°C$. El calor específico del objeto es $c = 0.45$ kJ/kg°C, y el coeficiente de transferencia de calor por convección durante el proceso es $h = 0.01$ kW/m^2°C. Obtenga una ecuación diferencial que describa la temperatura de la bola en función del tiempo, $T(t)$.

1-36 Se observa que durante algunos periodos, la tasa de cambio de población de las sociedades humanas, las especies animales, los insectos y las colonias bacterianas, aumenta a una tasa proporcional a la población misma. Sea $N(t)$ la población en el tiempo t, y k la constante de proporcionalidad, obtenga una ecuación diferencial que describa el cambio en la población con el tiempo.

1-37 Se observa que los materiales radiactivos (tales como el plutonio, el radio y el isótopo de carbono C^{14}) se desintegran naturalmente para formar otro elemento u otro elemento isótopo del mismo elemento con una rapidez proporcional a la cantidad del material radiactivo presente. Sea $M(t)$ la cantidad de material radiactivo en el tiempo t, y k una constante positiva que represente la fracción del material que se desintegra por unidad de tiempo, obtenga una ecuación diferencial que describa el cambio en M con el tiempo.

1-3 Breve repaso de conceptos básicos

1-38C ¿Puede una ecuación incluir más de una variable independiente? ¿Puede incluir más de una variable dependiente? Dé ejemplos.

1-39C ¿Cuál es la interpretación geométrica de las derivadas?

1-40C Considere una función $f(x)$ cuya recta tangente se vuelve paralela al eje x en $x = 5$. ¿Qué puede usted decir acerca de la primera derivada de la función en ese punto?

1-41C Considere una función $f(x)$ cuya recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje x en $x = 0$. ¿Que puede usted decir respecto a la primera derivada de la función en ese punto?

1-42C Considere una función $f(x)$ cuya recta tangente se hace perpendicular al eje x en $x = 2$. ¿Qué puede decir acerca de la primera derivada en ese punto?

1-43C Considere una función $f(x, y)$ y su derivada parcial $(\partial f/\partial y)_x$. ¿En qué condiciones es igual esta derivada parcial a la derivada total df/dx?

1-44C Considere una función $f(x)$ y su derivada df/dx. ¿Esta derivada todavía será una función de x?

1-45C Un gas ideal es el que obedece la relación $Pv = RT$, donde P es la presión absoluta, v es el volumen específico (o inversa de la densidad), T es la temperatura absoluta y R es la constante de los gases. Para un gas ideal, compruebe que *a*) las líneas P = constante en un diagrama T-v son rectas y, *b*) las líneas de alta presión tienen mayor pendiente que las de baja presión.

1-46C ¿Cómo se relaciona la integración con la derivación?

Determine los intervalos en los que las siguientes funciones son continuas:

1-47 *a*) $x^2 - 1$ *b*) $\sqrt{x}$
c) $\dfrac{x}{\operatorname{sen} 2x}$ *d*) $\dfrac{e^{2x}}{x(x-1)}$

1-48 *a*) -2 *b*) xe^{3x}
c) $\dfrac{\cos x}{x^2}$ *d*) $\dfrac{x^2}{e^x - 4}$

1-49 Considere un gas que obedece la ecuación de Van der Waals de estado, dada como $(P + a/v^2)(v - b) = RT$, donde P es la presión absoluta, v es el volumen específico (o inversa de la densidad), T es la temperatura absoluta, R es la constante de los gases y a y b son dos constantes. Obtenga una relación para la pendiente de las rectas v = constante en un diagrama T-P para este gas.

1-50 Grafique una función $f(x)$ en el intervalo $0 < x < 5$ tal que *a*) su primera derivada siempre sea negativa, *b*) su primera y segunda derivadas sean siempre positivas, y *c*) su primera y segunda derivadas sean siempre positivas (salvo en $x = 3$, donde ambas son iguales a cero).

1-51 Grafique una función $f(x)$ en el intervalo $0 < x < 5$ tal que *a*) su primera derivada sea siempre positiva, *b*) su primera y segunda derivadas sean siempre negativas, y *c*) su primera y segunda derivadas sean siempre negativas (salvo en $x = 3$, donde ambas son iguales a cero).

1-52 Determine las derivadas parcial y ordinaria de la función $f = 5x^2 \operatorname{sen} 2t + xe^{-2x} - 4t$ con respecto a x.

1-53 Derive las siguientes funciones con respecto a x (nota: x y t son variables independientes):

a) $f_1 = 7x^4 - \operatorname{sen} 3x^3 + 2e^{-3x}$
b) $f_2 = 7x^4 - t \operatorname{sen} 3x^3 + t^2 e^{-3x}$
c) $f_3 = 7x^4 - x \operatorname{sen} 3t^3 + t^2 e^{-3t}$

1-54 Derive las funciones en el problema 1-53 con respecto a t.

Determine la derivada de las siguientes funciones:

1-55 *a*) $\ln(x^2 + 1)$ *b*) $x^4 \cos 2x$
c) $\dfrac{5x}{2x^3 \operatorname{sen} x}$ *d*) $\ln(e^{2x})$

1-56 *a*) $e^{2x}(2x - 1)^2$ *b*) $xe^{3x} \operatorname{sen} 2x$
c) $\dfrac{x^2}{\ln x^2}$ *d*) $\dfrac{x \cos 2x}{\sqrt{\ln x^2}}$

Obtenga las siguientes integraciones:

1-57 *a*) $\displaystyle\int_1^3 [x^{2t} + \operatorname{sen} 2\omega t + 3t^2 x]dx$

b) $\displaystyle\int [y''(x) + 3e^{-2tx} + \cosh 2\omega x]dx$

1-58 *a*) $\displaystyle\int \left[\frac{a}{x^3} - x \cos 3x + x^2 e^{-2x}\right]dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} [xe^{-3x} + \operatorname{senh} 2x - 1]dx$

c) $\displaystyle\int_3^x [y'(x) + t \ln 2x]dx$

d) $\displaystyle\int [2y''(x)y'''(x) + \operatorname{sen} x \cosh \omega t]dx$

1-59 *a*) $\displaystyle\int [3x^4 + xe^{2x} + \cosh 3x]dx$

b) $\displaystyle\int_2^4 \left[\frac{a}{x} + 4 \operatorname{sen} 3x \cos 3x - \operatorname{senh} 2x\right]dx$

c) $\displaystyle\int_x^8 [y''(x) + t^3 \operatorname{sen} 2\omega x + e^{-2tx}]dx$

d) $\displaystyle\int \left[4y(x)y'(x) + xy''(x) + \frac{be^{-3t}}{x^2}\right]dx$

1-4 Clasificación de las ecuaciones diferenciales

1-60C ¿Cómo reconoce usted una ecuación diferencial lineal homogénea?

1-61C ¿En qué difieren las ecuaciones con coeficientes constantes de las que tienen coeficientes variables?

1-62C Considere una función $y(x)$ y su pendiente $y' = 5$. ¿Esta relación es una ecuación diferencial? Explique.

Determine el orden de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, indique si son lineales o no y si tienen coeficientes constantes o variables:

1-63 *a)* $y'' + 2y' = \operatorname{sen} x + 1$
b) $y''' + y'e^{-2x}\operatorname{sen} x = 0$
c) $y''' + y''\operatorname{sen} 2x + x^4y = 0$
d) $xy'' + 3xy' - xy = \operatorname{sen} 3x$
e) $y'' + e^{2x-y} = 0$

1-64 *a)* $y' + 7y' = xe^{-2x}$
b) $y' + x^3y = 0$
c) $y'' + 3y' + e^{-3x}y = 0$
d) $yy'' + 2xe^xy'y - 5y = 0$
e) $y''' + 2y'' + e^x\operatorname{sen} y = 0$

1-5 Soluciones de ecuaciones diferenciales

1-65C ¿En qué se diferencian las soluciones de las ecuaciones algebraicas y diferenciales?

1-66C Explique las diferencias entre una *solución* de una ecuación diferencial y *la solución general* de una ecuación diferencial.

1-67C ¿Cuál es la diferencia entre las soluciones implícita y explícita de una ecuación diferencial?

Compruebe que las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial dada en cada problema

1-68 $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$, $y_1 = e^{-\ln x}$, y $y_2 = x^4$

1-69 $y'' + y = 0$, $y_1 = \operatorname{sen} x$, y $y_2 = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}$

1-70 $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$, $y_1 = \dfrac{1}{x^2}$, y $y_2 = \dfrac{\ln x}{x^2}$

1-71 $y'' - y = 0$, $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, y $y_3 = \cosh x$

1-72 $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $y_1 = \dfrac{1}{x}$, $y_2 = \dfrac{\ln x}{x}$, y
$y_3 = e^{-\ln x}\ln x$

1-73 $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$, y
$y_3 = 5xe^{-\ln x}e^{2x}$

1-74 $y'' - 2y' + 3y = 0$, $y_1 = e^x \operatorname{sen} \sqrt{2}x$, y
$y_2 = 3e^x(\operatorname{sen}\sqrt{2}x + \cos\sqrt{2}x)$

1-75 $y'' - 9y = 0$, $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$, y $y_3 = e^{5-3x}$

1-76 Una roca de masa m se lanza hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial especificada V_i en tiempo cero. Tomando el eje z como la dirección vertical hacia arriba, con su origen en la posición inicial de la roca, obtenga dos expresiones matemáticas que sirvan como condiciones iniciales de la ecuación diferencial rectora para la función $z(t)$, donde t es la variable independiente tiempo.

1-77 Considere un paracaídas descendiendo por el aire a una velocidad constante de V_0, comenzando en el tiempo cero. El movimiento del paracaídas puede describirse mediante una ecuación diferencial lineal de segundo orden para $z(t)$, donde z es la distancia vertical del paracaídas desde el nivel del suelo, y t es la variable independiente tiempo. Si se sabe que el paracaídas toca el suelo en el tiempo t_0, obtenga dos expresiones matemáticas que sirvan como las condiciones de frontera para la ecuación diferencial rectora.

1-6 Resolución de ecuaciones diferenciales por integración directa

1-78C Considere una ecuación diferencial lineal de quinto orden, no homogénea, que pueda resolverse por integración directa. ¿Cuántas constantes arbitrarias tendrá la solución?

Determine cuál de las siguientes ecuaciones diferenciales puede solucionarse por integración directa. Obtenga la solución general de las que pueden resolverse de esa forma.

1-79 *a)* $y'' = 0$ *b)* $y'' + 4ye^{-3x} = 0$
c) $y'' - 4xe^{-4x} = 0$ *d)* $y'' - xy = 0$
e) $4y'y'' - 8x^3 = 0$

1-80 *a)* $y''' = 0$ *b)* $y''' - 5y = 0$
c) $y''' - 5x = 0$ *d)* $y''' - y'' = 0$
e) $2y''y''' - 8e^{-2x} = 0$

1-81 *a)* $y'' - ax = 0$ *b)* $y''' + 4y \operatorname{senh} 2x = 0$
c) $y'' - b\ln ax = 0$ *d)* $y' - e^y\cos x = 0$
e) $xy'y'' - 8x^4 = 0$

1-7 Introducción a métodos de computadora

1-82C Describa una situación en la que no se necesite la solución cerrada de una ecuación diferencial porque los datos de la gráfica de la solución son suficientes.

1-83C ¿Qué tan pequeña debe ser θ (en radianes) para que la aproximación $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ tenga una exactitud de 5%?

1-84 Grafique la solución $V(t) = (\sqrt{V(0)} - 0.0215t)^2$ desarrollada en el ejemplo 1-15 donde $V(t)$ es el volumen de líquido en la cafetera expresado en tazas. Use $V(0) = 36$ tazas. Grafique la solución hasta que $V(t) = 0$.

1-85 La función $y = -2xe^{2x} + 2x - 3$ es la solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = 8x - 20$$

Para las condiciones de frontera, use $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$. Grafique la solución de $0 \le x \le 1$.

1-86 La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x^2e^{-2x}$$

tiene la solución

$$y(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2) + y(0)$$

Grafique la solución de tres valores de $y(0)$: 0, 5 y 10 en la misma gráfica. Elija un límite superior adecuado para x.

1-87 Resuelva la siguiente ecuación para obtener el valor $y(\sqrt{2\pi})$ si $y(0) = 0$.

$$y' = \text{sen } x^2$$

1-88 Use un software para evaluar numéricamente la siguiente integral:

$$\int_0^1 \sqrt{x^4 + 5}dx$$

1-89 Use un programa para obtener la solución de forma cerrada de las integrales dadas en el problema 1-57.

1-90 Use un software para obtener la solución de forma cerrada de las integrales dadas en el problema 1-58.

1-91 Use un programa para obtener la solución de forma cerrada de las integrales dadas en el problema 1-59.

1-92 Use un software para obtener la solución de forma cerrada de las integrales dadas en el problema 1-79.

1-93 Use un software para obtener la solución de forma cerrada de las integrales dadas en el problema 1-80.

1-94 Use un software para obtener la solución de forma cerrada de las integrales dadas en el problema 1-81.

Problemas de repaso

Determine los valores de m para los cuales las ecuaciones diferenciales dadas tienen una solución de la forma e^{mx}.

1-95 *a*) $y'' + y = 0$
b) $y'' + 2y' + y = 0$
c) $y'' - y = 0$

1-96 *a*) $y'' + \lambda^2 y = 0$
b) $y'' - 4y' + 4y = 0$
c) $y'' - \lambda^2 y = 0$

1-97 *a*) $y'' + 5y' + 4y = 0$
b) $y'' + 6y' + 9y = 0$
c) $y'' + y' + 3y = 0$

1-98 *a*) $y'' - 6y' + 9y = 0$
b) $y'' + 3y' + 4y = 0$
c) $y'' - 6y' + 4y = 0$

1-99 *a*) $y'' + 10y' + 25y = 0$
b) $y'' + 5y' + 25y = 0$
c) $y'' + 10y' - 25y = 0$

Determine los valores de r para que las siguientes ecuaciones diferenciales tengan una solución de la forma x^r.

1-100 *a*) $x^2y'' + y = 0$
b) $x^2y'' + xy' = 0$

1-101 *a*) $x^2y'' + 3xy' - 2y = 0$
b) $x^2y'' + xy' - 2y = 0$

1-102 *a*) $2x^2y'' + 6y' + 2y = 0$
b) $x^2y'' - y = 0$

1-103 *a*) $-2x^2y'' + 6xy' - 12y = 0$
b) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

1-104 Se lanza una roca hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial especificada de $V_i = 15$ m/s en el tiempo cero. La ecuación diferencial que gobierna este proceso es

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -g$$

donde z es la dirección vertical hacia arriba, con su origen en la posición inicial de la roca, y g es la aceleración gravitacional. Resolviendo la ecuación diferencial y aplicando las condiciones de frontera, obtenga una relación general para $z(t)$ y determine la posición de la roca después de 3 s para $g = 9.81$ m/s^2.

1-105 Considere que un paracaídas desciende por el aire a velocidad constante de V_0, comenzando en el tiempo cero a una altura de 20 m arriba del suelo. El movimiento del paracaídas lo puede describir la ecuación diferencial que lo gobierna

$$\frac{dz(t)}{dt} = a$$

donde z es la distancia vertical del paracaídas desde el nivel del suelo, t es la variable independiente tiempo, y a es una constante. Si se sabe que el paracaídas toca tierra en el tiempo $t_0 = 8$ s, determine el valor de a y obtenga la función $z(t)$ resolviendo la ecuación diferencial rectora.

1-106 Considere un material radiactivo homogéneo esférico, con radio $R = 0.04$ m, que genera calor a una tasa constante de $g_0 = 4 \times 10^7$ W/m^3. El calor generado se disipa uniformemente en el ambiente. La superficie externa de la esfera se mantiene a una temperatura uniforme de 80°C, y la conductividad térmica de la esfera es $k = 15$ W/m°C. La temperatura de la esfera cambia solo en la dirección radial, y por tanto $T = T(r)$. La distribución de temperatura dentro de la esfera está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{1d}{r^2dr}\left(r^2\frac{dT(r)}{dr}\right) + \frac{g_0}{k} = 0$$

Obtenga una relación para la distribución de temperatura $T(r)$ en la esfera resolviendo esta ecuación diferencial y aplicando las condiciones de frontera adecuadas. También determine la temperatura en el centro de la esfera.

1-107 Un alambre de resistencia largo y homogéneo de radio $R = 5$ mm se usa para calentar el aire en una habitación por el paso de corriente eléctrica. El calor se genera uniformemente en el alambre como resultado del calentamiento por resistencia, a razón de $g_0 = 5 \times 10^7$ W/m^3. Si la temperatura de la superficie externa del alambre permanece a 180°C, determine la temperatura a $r = 2.5$ mm, después de haberse alcanzado las condiciones de operación uniforme; tome la conductividad térmica de éste como $k = 8$ W/m°C. La distribución de temperatura en su interior está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT(r)}{dr}\right) + \frac{g_0}{k} = 0$$

1-108 Considere una pared larga y plana de espesor $L = 0.2$ m. Las superficies de la pared se mantienen a temperaturas $T_1 = 80$°C y $T_2 = 10$°C en $x = 0$ y $x = L$, respectivamente. No hay generación de calor en la pared; la temperatura dentro de ésta varía solo en la dirección x y está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = 0$$

Encuentre una fórmula para la distribución de temperatura $T(x)$ en la pared, en el estado estacionario.

1-109 Considere una pared larga y plana de espesor $L = 0.5$ m. La superficie de la pared en $x = 0$ está aislada, mientras que la superficie en $x = L$ se mantiene a 30°C de temperatura. La conductividad térmica de la pared es $k = 30$ W/m°C, y se genera calor en la pared a razón de $g(x) = g_0 e^{0.02x}$, donde $g_0 = 7 \times 10^4$ W/m^3. La temperatura dentro de la pared varía solo en la dirección x y está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} + \frac{g(x)}{k} = 0$$

Encuentre una fórmula para la distribución de temperatura $T(x)$ en la pared, en el estado estacionario, y determine la temperatura de la superficie aislada (nota: en una superficie aislada, el gradiente de temperatura dT/dx es igual a cero).

1-110 Los químicos y los ingenieros deben ser capaces de predecir los cambios en la concentración química en una reacción. Un modelo que se usa para muchos procesos de un solo reactivo es:

$$\text{Rapidez de cambio de concentración química} = \frac{dC}{dt} = -kC^n$$

donde C es la concentración química y k es la constante de rapidez. El orden de la reacción es el valor del exponente n.

a) Suponga que $n = 2$. En este caso, la ecuación diferencial para C es no lineal. A veces podemos obtener una solución con mayor facilidad al transformar variables. Use la sustitución $y(t) = 1/C(t)$ para convertir la ecuación diferencial en una ecuación lineal, despeje y y luego encuentre la solución en términos de C.

b) Obtenga la solución por otro método.

c) La siguiente fórmula describe la descomposición en fase gaseosa de dióxido de nitrógeno en óxido nítrico y oxígeno a 300°C, que es una reacción de segundo orden ($n = 2$).

$$2NO_2 \rightarrow 2NO + O_2$$

Por datos experimentales, se estimó el valor de k como $k = 0.5444$ s. Determine la concentración después de 5 s si $C(0) = 0.01$ mol/L.

1-111 Un modelo que se usa para muchos procesos de tercer orden, con un solo reactivo es:

$$\text{Rapidez de cambio de la concentración química} = \frac{dC}{dt} = -kC^3$$

donde C es la concentración química y k es la constante de rapidez; la cual es una ecuación no lineal.

a) Para obtener una ecuación lineal, use la sustitución $y(t) = 1/C^2$ para convertir la ecuación diferencial en lineal, despeje y y luego encuentre la solución en términos de C.

b) Obtenga la solución por otro método.

CAPÍTULO

2

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

En muchos problemas prácticos, la rapidez de cambio (la primera derivada) de una cantidad depende de la cantidad misma y de la variable independiente. Tales problemas a menudo pueden describirse mediante la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, donde y' representa la primera derivada y $f(x, y)$ representa a los demás términos.

La apariencia sencilla de las ecuaciones diferenciales de primer orden puede confundir a algunas personas y hacerlas creer que son fáciles de resolver. A veces lo son pero, frecuentemente, resolverlas no es un desafío menor que obtener la solución de una ecuación de orden superior. No existe un método general para dar respuesta exacta a todas las ecuaciones diferenciales de primer orden. Los métodos existentes de resolución son aplicables a ciertos tipos de ecuaciones diferenciales y, por tanto, es necesario clasificarlas y estudiarlas en grupos separados.

En este capítulo aprenderemos a reconocer los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden y a resolver cada uno de ellos. Primero consideraremos las ecuaciones *lineales* de primer orden, ya que éstas siempre pueden resolverse usando un enfoque sistemático; luego abordaremos las aplicaciones de tales ecuaciones. Después estudiaremos las ecuaciones *no lineales* y trataremos la existencia de soluciones en una región o geometría dada. En particular, examinaremos ecuaciones *separables*, *homogéneas* o *exactas*, porque tales ecuaciones pueden solucionarse analíticamente, sean lineales o no.

Algunas ecuaciones se pueden hacer exactas mediante el uso de *factores de integración*. Considerando que la primera derivada es simplemente la pendiente de la función incógnita, es posible obtener curvas de solución aproximada mediante *métodos gráficos*, aun cuando la ecuación diferencial no pueda resolverse analíticamente. Al final de este capítulo describiremos un procedimiento sistemático para resolver ecuaciones diferenciales. Pronto entenderá que resolver una ecuación diferencial a menudo exige algunos trucos, manipulaciones e ingenio.

Hay una gran variedad de software disponible que puede realizar estas manipulaciones por usted en ciertos casos. Al final de este capítulo mostramos cómo usar estos programas para obtener soluciones exactas y cómo implementar los métodos gráficos presentados en el capítulo.

Por último, cuando todo lo demás falla es posible usar una computadora para obtener la solución numérica de una ecuación diferencial. Estos métodos se explican en el capítulo 9.

OBJETIVOS

Al terminar este capítulo usted deberá ser capaz de:

1. Clasificar ecuaciones diferenciales de primer orden como separables, homogéneas o exactas.
2. Utilizar un factor de integración para resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden.
3. Resolver una ecuación separable o una ecuación exacta mediante integración directa.
4. Usar un software para obtener soluciones cerradas de ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones iniciales específicas o no específicas, y generar gráficas de contorno y de campo direccional.

2-1 ▪ DESCRIPCIÓN GENERAL DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Por definición, las ecuaciones diferenciales de primer orden solo tienen primeras derivadas. Considerando y como la variable dependiente (es decir, la función que queremos determinar) y x como la variable independiente, una ecuación diferencial puede expresarse en la forma más general como

$$f(x, y, y') = 0 \tag{2-1}$$

De modo que una ecuación diferencial de primer orden es *cualquier* ecuación que tenga las variables x, y y y' en *cualquiera* de sus formas, como en

$$3y' + \operatorname{sen}(2xy') - 5x^2y^2 + 3 = 0$$

Por simplicidad, en este capítulo nos limitaremos a abordar ecuaciones en las que y' puede expresarse explícitamente en términos de x y y. Es decir, consideraremos ecuaciones de la forma

$$y' = f(x, y) \tag{2-2}$$

donde $f(x, y)$ es una función estrictamente de dos variables: x y y. Lo primero que pensamos al resolver la ecuación 2-2 es *integrarla* y obtener

$$y = \int f(x, y)\,dx + C \tag{2-3}$$

donde C es la constante de integración. La integración en el lado derecho (en general) no puede realizarse a menos que la función f sólo dependa de x. Por tanto, aunque al integrar la ecuación diferencial se quita la derivada, no se obtiene la solución real porque el lado derecho ahora tiene la integral de la función incógnita y. En otras palabras, en la mayoría de los casos la integración simplemente convierte la ecuación *diferencial* en una *integral*. Para el caso especial en que f es una función estrictamente de x o es nada más una constante, entonces $y' = f(x)$, y la solución de la ecuación diferencial se obtiene simplemente al realizar la integración indicada

$$y(x) = \int f(x)\,dx + C$$

La figura 2-1 da un ejemplo específico.

Cualquier solución general de una ecuación diferencial de primer orden incluirá una constante arbitraria C. La solución específica de un problema de valor inicial se obtiene determinando C mediante el uso de la condición inicial expresada como

$$y = y_0 \quad \text{en} \quad x = x_0$$

o

$$y(x_0) = y_0 \tag{2-4}$$

Recuerde que una ecuación diferencial de primer orden con una condición inicial se denomina: problema de valor inicial.

En la siguiente sección usted verá que la solución de ecuaciones lineales es sencilla; pero ese no es el caso para ecuaciones no lineales (a menos que estén en forma exacta, separable u homogénea).

Vale la pena señalar que, al resolver una ecuación diferencial de primer orden, es posible seleccionar x o y como la variable dependiente. *Intercambiar* las variables dependiente e independiente a veces puede ofrecer alguna simplificación en la solución. Por ejemplo, la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \tag{2-5}$$

también puede expresarse, para $y \neq 0$, como

Ecuación diferencial:

$$y' = 6x^2 - 5$$

Su solución:

$$y = \int (6x^2 - 5)dx + C$$
$$= 2x^3 - 5x + C$$

FIGURA 2-1
Las ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma $y' = f(x)$ pueden resolverse por integración directa.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2}$$

que es lineal en x. En la figura 2-2 se muestra otro ejemplo.

Los métodos de solución para las ecuaciones diferenciales de primer orden que aquí se analizan pueden usarse para resolver ecuaciones de orden superior si incluyen dos derivadas sucesivas y si no incluyen la función incógnita como factor. Por ejemplo, dejando $u = y''$, la ecuación diferencial de tercer orden

$$y''' + 3y'' = 5x^3 \tag{2-6}$$

puede expresarse como $u' + 3u = 5x^3$, que es una ecuación de primer orden en u. Una vez que u está disponible, y puede determinarse mediante dos integraciones sucesivas.

No lineal en y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2y}}{(y^2+1)x + \text{sen } 3y + 1}$$

Lineal en x:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2+1}{e^{2y}}x + \frac{\text{sen } 3y + 1}{e^{2y}}$$

FIGURA 2-2
Algunas ecuaciones no lineales pueden hacerse lineales con solo intercambiar las variables dependiente e independiente.

Repaso de la sección

Los problemas marcados con "C" son conceptuales para discusión

2-1C ¿Qué clase de ecuaciones diferenciales se clasifican como de primer orden?

2-2C ¿Puede una ecuación diferencial de primer orden incluir *a*) y'', *b*) y'^2 o *c*) $\sqrt{(y')}$?

2-2 ▪ ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial lineal de primer orden puede expresarse, en forma general, como

$$y' + P(x)y = R(x) \tag{2-7}$$

donde P y R son dos funciones únicas de x que se suponen continuas en el intervalo de interés. Observe que una ecuación lineal no puede tener ningún término no lineal; por ejemplo, yy', y^3 o $\text{sen}(y')^2$.

Factor de integración

La ecuación 2-7 podría resolverse de forma simple si pudiéramos expresar de alguna manera su lado izquierdo como la derivada de un solo término. Resulta que siempre es posible hacer esto multiplicando la ecuación por un factor de integración adecuado; para determinar dicho factor se multiplica la ecuación 2-7 por una función $\mu(x)$. Esto da como resultado

$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)R(x) \tag{2-8}$$

Dado que

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)y' + \mu'(x)y \tag{2-9}$$

y al compararla con la ecuación 2-8, concluimos que si el lado izquierdo de la ecuación 2-7 se expresa como $[\mu(x)y]'$, entonces la función $\mu(x)$ debe satisfacer la condición $\mu'(x) = \mu(x)P(x)$.

Para $\mu(x) \neq 0$ en el intervalo que se considera, esta ecuación puede reacomodarse como

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = P(x)$$

Por tanto,

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int P(x)\,dx$$

Sea $v(x)$ otro factor de integración que incluya la constante de integración C_1. Entonces,

$$\ln|v(x)| = \int P(x)dx + C_1$$

Tome la exponencial de ambos lados,

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{\int P(x)dx + C_1} \\ &= e^{C_1}\, e^{\int P(x)dx} \\ &= C_2\mu(x) \end{aligned}$$

donde $\mu(x)$ está dada por la ecuación 2-10 y $C_2 = e^{C_1}$ es una constante que nunca es cero. Multiplicando la ecuación 2-7 por $v(x)$ da

$$[C_2\mu(x)y]' = C_2\mu(x)\,R(x)$$

Pero C_2 es una constante y puede obtenerse como factor de la derivada; entonces C_2 puede eliminarse por división para obtener

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)R(x)$$

la cual es la misma que la ecuación 2-11.

FIGURA 2-3
Demostración de que la constante de integración en el factor de integración puede tomarse como cero sin ninguna pérdida de generalidad.

Ecuación diferencial lineal:

$$y' + P(x)y = R(x)$$

Multiplicando por $\mu(x)$ y reacomodando,

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)\,R(x)$$

FIGURA 2-4
Multiplicar una ecuación lineal de primer orden por un factor de integración $\mu(x)$ permite expresar su lado izquierdo como la derivada de un solo término.

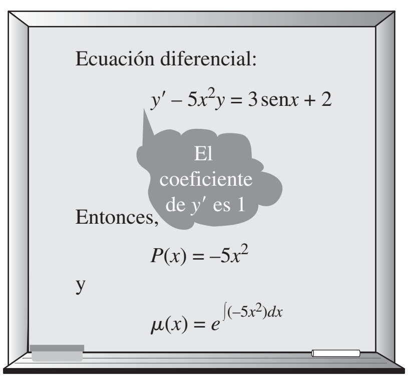


FIGURA 2-5
Identificación correcta de $P(x)$ al determinar el factor de integración.

Entonces, por integración, la función $\mu(x)$ se determina como

$$\ln|\mu(x)| = \int P(x)\,dx + C_1$$

Tomando la exponencial de ambos lados de esta ecuación y dado que $e^{\ln\mu} = \mu$ para $\mu > 0$, se obtiene

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \tag{2-10}$$

siempre que exista la integral. Hemos omitido aquí el signo de valor absoluto porque el lado derecho de la ecuación 2-10 siempre es positivo y, por tanto, $\mu(x)$ debe ser una cantidad positiva. También suprimimos la constante de integración C_1 porque no se necesita incluir en este caso, como se ilustra en la figura 2-3.

La función $\mu(x)$ definida por la ecuación 2-10 se llama **factor de integración**. Podemos expresar la ecuación 2-7 con la ayuda del factor de integración, como se muestra en la figura 2-4. Entonces,

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)R(x) \tag{2-11}$$

que es una forma fácilmente integrable; haciendo esto en ambos lados se obtiene

$$\mu(x)y = \int \mu(x)R(x)\,dx + C$$

Despejando y, tenemos

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)R(x)\,dx + C\right] \tag{2-12}$$

donde el factor de integración $\mu(x)$ está dado por la ecuación 2-10, y la constante arbitraria C va a determinarse mediante la condición inicial. La ecuación 2-12 es de gran importancia porque es una relación explícita para la solución general de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Observe que la ecuación 2-7 está en *forma estándar*, ya que el coeficiente de y' es 1. Por tanto, al usar este procedimiento para resolver una ecuación diferencial lineal, debemos garantizar que la ecuación esté en dicha forma antes de intentar identificar $P(x)$ y determinar el factor de integración $\mu(x)$ de la ecuación 2-10. También observe que $P(x)$ es el coeficiente de y cuando aparece en el lado izquierdo de la ecuación, y su signo debe incluirse al determinar el factor de integración, como se muestra en la figura 2-5. Por ejemplo, $P(x) = -2x$ para la ecuación $y' - 2xy = 3$.

Los pasos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden pueden resumirse así:

Paso 1. Verifique que el coeficiente de y' sea 1; en caso contrario, divida cada término de la ecuación entre ese coeficiente, para igualarlo a 1.
Paso 2. Determine el factor de integración $\mu(x)$ de la ecuación 2-10 y multiplique la ecuación diferencial por este factor.
Paso 3. Exprese el lado izquierdo de la ecuación como $[\mu(x)y]'$ e integre ambos lados de ésta.
Paso 4. Divida la ecuación resultante entre $\mu(x)$ para obtener una expresión explícita para y.
Paso 5. Aplique la condición inicial para determinar la constante de integración C.

Se le invita a dominar el método mediante el seguimiento de los pasos descritos al resolver un problema, en vez de simplemente usar la ecuación 2-12 para determinar la solución por sustitución directa.

EJEMPLO 2-1 **Uso de un factor de integración**

Resuelva el siguiente problema lineal de valor inicial:

$$y' - 3y = -9x$$
$$y(2) = 13$$

Solución Como el coeficiente de y' ya es 1, tenemos $P(x) = -3$. Entonces el factor de integración puede determinarse mediante la ecuación 2-10 como

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por e^{-3x} se obtiene

$$e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y = -9xe^{-3x}$$

o

$$[e^{-3x}y]' = -9xe^{-3x} \tag{2-13}$$

Integrando tenemos

$$e^{-3x}y = \int(-9xe^{-3x})\,dx = e^{-3x}(3x + 1) + C$$

Despejando y tenemos

$$y = 3x + 1 + Ce^{3x}$$

Aplicando la condición inicial $y(2) = 13$, tenemos

$$13 = 3 \times 2 + 1 + Ce^{3\times 2} \rightarrow C = 6e^{-6}$$

Sustituyendo tenemos

$$y = 6e^{3x-6} + 3x + 1 \tag{2-14}$$

que es la solución deseada.

Caso especial: Ecuaciones con coeficientes constantes y lado derecho constante

Muchos problemas de interés práctico dan como resultado ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes e incluyen una constante en su lado derecho. Al considerar el coeficiente de y' como $a = 1$, tales ecuaciones pueden expresarse como

$$\boxed{y' + by = c} \tag{2-15}$$

donde b y c son constantes. La solución de esta ecuación diferencial con condición inicial $y(0) = y_0$ se obtiene mediante el procedimiento usual como

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int b dx} = e^{bx}$$

$$e^{bx}\frac{dy}{dx} + e^{bx}by = ce^{bx}$$

$$\frac{d}{dx}[e^{bx}y] = ce^{bx}$$

$$e^{bx}y = \frac{c}{b}e^{bx} + C$$

$$y = \frac{c}{b} + Ce^{-bx} \tag{2-16}$$

Aplicando la condición inicial $y(0) = y_0$,

$$y_0 = \frac{c}{b} + C \rightarrow C = y_0 - \frac{c}{b}$$

Problema de valor inicial:

$$y' + by = c$$
$$y(0) = y_0$$

Su solución:

$$y = \frac{c}{b}(1 - e^{-bx}) + y_0 e^{-bx}$$

Caso especial: Si $c = 0$, entonces

$$y = y_0 e^{-bx}$$

FIGURA 2-6
Solución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes.

Sustituyendo,

$$y = \frac{c}{b}(1 - e^{-bx}) + y_0 e^{-bx} \tag{2-17}$$

Para el caso especial de $c = 0$, la solución se reduce a

$$y = y_0 e^{-bx} \tag{2-18}$$

Para valores positivos de b, esta ecuación representa una caída exponencial con x a partir del valor inicial de y_0. Para valores negativos de b, representa un crecimiento exponencial. Estos resultados se resumen en la figura 2-6.

Existencia y unicidad de las soluciones

Nuestra explicación de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden estaría incompleta sin una explicación sobre la generalidad de la solución dada por la ecuación 2-12. Esta solución debe ser bastante general y completa, considerando que comenzamos con una forma general de la ecuación con funciones generales $P(x)$ y $R(x)$, con el único requisito de que sean continuas. De modo que es justo decir que una ecuación diferencial lineal de primer orden *siempre* tiene una solución, y que *todas* las soluciones están incluidas en la ecuación 2-12.

Las demostraciones y los argumentos anteriores pueden resumirse en el siguiente teorema sobre la *existencia* y *unicidad* de la solución de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

TEOREMA 2-1 Existencia y unicidad de las ecuaciones lineales de primer orden

Si las funciones $P(x)$ y $R(x)$ son continuas en el intervalo abierto I que contiene el punto x_0, entonces la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y' + P(x)y = R(x)$$

con $$y(x_0) = y_0$$

tiene una solución única en I, dada por

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)R(x)dx + C\right] \qquad \textbf{(ecuación 2-12)}$$

donde $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ y la constante arbitraria C se determina por la condición inicial $y(x_0) = y_0$ dado que se pueden resolver las integrales requeridas.

El teorema 2-1 afirma claramente que, bajo condiciones específicas, el problema de valor inicial lineal de primer orden *tiene* una solución, y que tal solución es *única*.

Es fácil verificar que la ecuación diferencial 2-7 tiene, al menos, una solución con solo sustituir en ella la ecuación 2-12. Con la constante C determinada para la condición inicial, la ecuación 2-12 también representa una función única (una función continua en el intervalo abierto I que pasa por (x_0, y_0)). Además, todas las soluciones posibles de la ecuación diferencial están incluidas en la ecuación 2-12. Por tanto, la ecuación 2-12 representa la *solución general* de una ecuación diferencial lineal de primer orden con la condición de que $P(x)$ y $R(x)$ sean continuas. En otras palabras, la ecuación diferencial (2-7) *no* tiene una solución singular.

Como ejemplo, considere la ecuación diferencial $y' + 0.2y = 0$ en el intervalo $0 < x < \infty$. Mediante la ecuación 2-18, su solución general es $y(x) = y_0 e^{-0.2x}$, y se grafica como en la figura 2-7 para diferentes valores de y_0. Observe que $P(x) = 0.2$ y $R(x) = 0$, que son continuas en el intervalo $0 < x < \infty$. Por tanto, para una

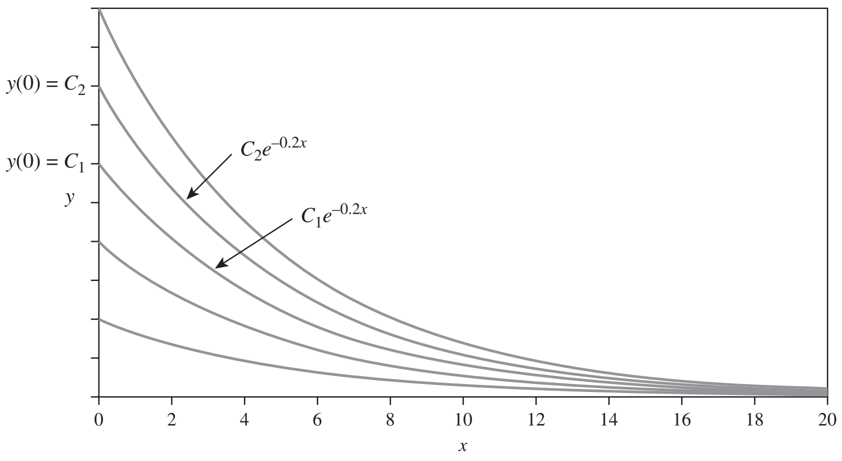


FIGURA 2-7
Curvas de solución para la ecuación diferencial $y' + 0.2y = 0$.

condición inicial dada $y(x_0) = y_0$, esta ecuación diferencial tiene una solución única: la curva de solución que pasa por el punto (x_0, y_0). En otras palabras, ninguna otra curva de solución pasará por el punto (x_0, y_0). Asimismo, la solución general $y(x) = Ce^{-0.2x}$ contiene *todas* las soluciones de la ecuación diferencial y, así, no hay soluciones singulares.

Funciones discontinuas. Probablemente usted se pregunte qué sucede si las funciones $P(x)$ o $R(x)$ no son continuas. Primero que nada, el teorema 2-1 todavía será aplicable en cualquier intervalo en el que las funciones $P(x)$ y $R(x)$ sean continuas. Pueden surgir problemas solo en los puntos de discontinuidad. Si el intervalo de interés está contenido en la parte del intervalo en el que tanto $P(x)$ como $R(x)$ son continuas, entonces podemos simplemente ignorar cualquier discontinuidad en las funciones, ya que, en lo que nos concierne, las funciones $P(x)$ y $R(x)$ son continuas. De no ser así, tendremos que lidiar con las discontinuidades. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2-2 Encuentre la solución única

Resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$(x + 1)y' + y = 5x^2(x + 1)$$
$$y(2) = 3$$

Solución En su forma actual, el coeficiente de y' no es 1. Por tanto, primero necesitamos dividir ambos lados de la ecuación entre $x + 1$, que es el coeficiente de y'. Esto da

$$y' + \frac{1}{x+1}y = 5x^2$$

Por supuesto, esta división es válida para $x + 1 \neq 0$ o $x \neq -1$.

Ahora tenemos $P(x) = 1/(x + 1)$, que es continua en todas partes, salvo en $x = -1$, y $R(x) = 5x^2$, que es continua en todo el eje real. De modo que necesitamos tener mucho cuidado al tratar con $P(x)$ en $x = -1$. Podemos evitar el punto de discontinuidad eligiendo que el intervalo sea $-\infty < x < -1$ o $-1 < x < \infty$. Por el teorema 2-1, un problema de valor inicial que comprenda la ecuación diferencial dada tiene una solución única en cualquiera de ambos intervalos (figura 2-8). Considerando que $x_0 = 2$ está en el intervalo $-1 < x < \infty$, nuestro problema de valor inicial tendrá una solución única en dicho intervalo.

La solución de este problema de valor inicial lineal de primer orden está determinada por el siguiente procedimiento de rutina,

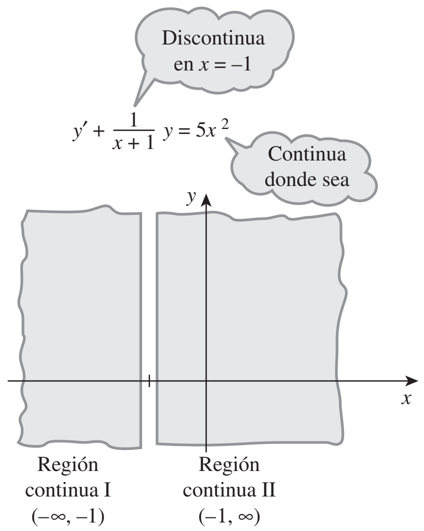


FIGURA 2-8
Los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ de una ecuación diferencial pueden considerarse como continuos en cualquier región que no incluya ningún punto de discontinuidad.

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{dx}{x+1}} = e^{\ln|x+1|} = |x+1|$$

$$[\,|x+1|y]' = |x+1|5x^2dx$$

$$|x+1|y = 5\int |x+1|x^2dx + C$$

Para $x > -1$, tenemos $|x+1| = x+1$. Entonces la solución en el intervalo $-1 < x < \infty$ se vuelve

$$(x+1)y = 5\int (x^3 + x^2)dx + C = 5\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right) + C$$

$$y = \frac{5x^3(3x+4)}{12(x+1)} + \frac{C}{x+1}$$

$$y(2) = 3 \rightarrow 3 = \frac{5 \times 8(6+4)}{12(2+1)} + \frac{C}{3} \rightarrow C = -\frac{73}{3}$$

Sustituyendo,

$$y = \frac{5x^3(3x+4)}{12(x+1)} - \frac{73}{3(x+1)}$$

que es la solución deseada.

Comentario Para comprender mejor la respuesta, graficamos las *curvas de solución* en ambos intervalos, $-\infty < x < -1$ y $-1 < x < \infty$ en la figura 2-9. Cada curva de solución es una gráfica de la solución para un valor específico de C, que depende del asignado a y en un valor específico de x. Observe que, en cualquiera de los dos intervalos, solo *una* curva pasa por un valor específico de x, indicando la *unicidad* de la solución del problema de valor inicial en cualquiera de los dos intervalos en los que tanto $P(x)$ como $R(x)$ son continuas. También observe que las curvas de solución divergen cuando $x \rightarrow -1$ desde cualquiera de las dos direcciones.

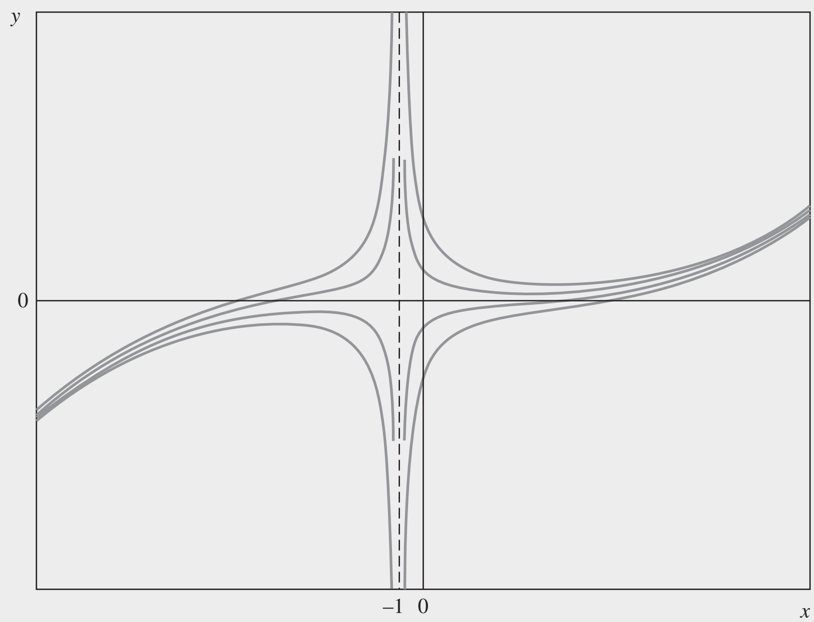


FIGURA 2-9
Curvas de solución de la ecuación diferencial lineal del ejemplo 2-2.

Repaso de sección

2-3C ¿En qué condiciones una ecuación diferencial lineal de primer orden puede resolverse por integración directa?

2-4C ¿Cuál es el papel del factor de integración al resolver ecuaciones lineales de primer orden?

2-5C ¿En qué condiciones tiene solución un problema de valor inicial lineal de primer orden? ¿Cuándo es única la solución?

2-6C ¿Son lineales las siguientes ecuaciones?

a) $y' + xe^y = 2$ *b*) $y' - x^2y + xy^2 = 5$

2-7 Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $y' - 3xy = 2x$ *b*) $(1 - x^2)y' - 2y = 0$

(*Respuestas: a*) $y = -\frac{2}{3} + Ce^{\frac{3}{2}x^2}$ *b*) $= C\frac{x+1}{x-1}$).

2-8 Resuelva los siguiente problemas de valor inicial:

a) $y' + y = 0 \quad y(0) = 1$ *b*) $y' + 3(y - 1) = 2x \quad y(0) = 4$

(*Respuestas: a*) $y = e^{-x}$ *b*) $y = \frac{7}{9} + \frac{2}{3}x + \frac{29}{9}e^{-3x}$).

2-3 ▪ APLICACIONES DE ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

En muchos problemas presentes en las ciencias físicas, biológicas y sociales, se observa que la rapidez de cambio de una cantidad es proporcional a la cantidad misma (figura 2-10).

Es decir, si y es la cantidad que interesa y t es el tiempo, entonces

$$\frac{dy}{dt} \propto y$$

o

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{2-19}$$

donde k es la constante de proporcionalidad que se determina experimentalmente o por observación. Por tanto, tales problemas se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Observe que la primera derivada dy/dt representa la rapidez de cambio de y con respecto a t.

La ecuación 2-19 es diferencial de primer orden con coeficientes constantes y, como se muestra en la sección anterior (ecuación 2-18), su solución es

$$y = y_0e^{kt} \tag{2-20}$$

donde y_0 es el valor de la función en el tiempo $t = 0$. Por tanto, una cantidad que cambia de acuerdo con la ecuación diferencial 2-19 durante un proceso aumentará (o disminuirá si k es negativa) en forma exponencial durante dicho proceso.

Los problemas que se encuentran en las ciencias físicas usualmente incluyen cantidades que cambian de manera continua. Pero muchos problemas comunes en las ciencias biológicas incluyen cantidades que cambian en forma discreta o discontinua. Por ejemplo, la población de una especie animal o una colonia bacteriana cambia en cantidades de números enteros. Sin embargo, cuando la población es muy grande, la población de una especie puede considerarse como una función continua del tiempo, con exactitud razonable. Entonces, las tasas de cambio pueden expresarse como derivadas. Por consiguiente, es posible describir el cambio poblacional de una especie mediante ecuaciones diferenciales.

En seguida hablaremos de diversos problemas similares en diversos campos.

$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$				
y	Δt	Δy	$\Delta y/\Delta t$	k
100	1	10	10	0.1
200	1	20	20	0.1
300	1	30	30	0.1

FIGURA 2-10
En muchos problemas físicos, la rapidez de cambio de una cantidad es proporcional a la cantidad misma.

EJEMPLO 2-3 Crecimiento poblacional: ley de Malthus

Se observa que en ciertos periodos la tasa de cambio poblacional de las sociedades humanas, de las especies animales, insectos y colonias bacterianas aumenta con una rapidez proporcional a la población misma. Suponiendo que $N(t)$ represente la población en el tiempo t, obtenga una ecuación diferencial que describa el cambio en la población con respecto al tiempo t; comente su solución. Suponga que la población inicial en el tiempo $t = 0$ es N_0.

Solución Dado que la tasa de cambio en la población es proporcional a la población misma, una ecuación diferencial que describa el cambio de población con respecto al tiempo puede expresarse como

$$\frac{dN}{dt} = kN \tag{2-21}$$

donde k es la tasa neta de población, es decir, la diferencia entre las tasas de nacimientos y muertes. A menudo, el valor de la constante k se calcula para varios países y se usa como medida de comparación para el crecimiento poblacional de tales naciones durante ciertos años, determinadas décadas o incluso algunos siglos. Por ejemplo, un valor de k de $0.015/\text{año}$ representa una tasa de crecimiento poblacional de 15 personas al año por cada mil personas.

La ecuación 2-21 es lineal de primer orden con coeficientes constantes. La condición inicial se especifica como $N(0) = N_0$. Entonces, por la ecuación 2-20, la solución de este problema de valor inicial es

$$N = N_0 e^{kt} \tag{2-22}$$

Por tanto, la suposición de que la cantidad de individuos aumenta con una rapidez proporcional a la población da como resultado el crecimiento exponencial con respecto al tiempo. Este modelo de cambio en la población se llama **ley de crecimiento exponencial** o **ley de Malthus**, por el economista británico Thomas Malthus (1766-1834), quien fue el primero en observar este fenómeno. A pesar de su simplicidad, se comprueba que la exactitud de dicha ley es notable al predecir el crecimiento poblacional de los seres humanos, diversas especies animales y colonias de bacterias, por lo menos durante periodos limitados. Pero en valores muy altos de t, predice que la población de ciertas especies tenderá al infinito (figura 2-11). Obviamente, esto es bastante irrealista, por las limitaciones de espacio vital, disponibilidad de alimentos y otros recursos. Más adelante en este capítulo se explica un modelo más realista de crecimiento poblacional llamado *ley de crecimiento logístico*.

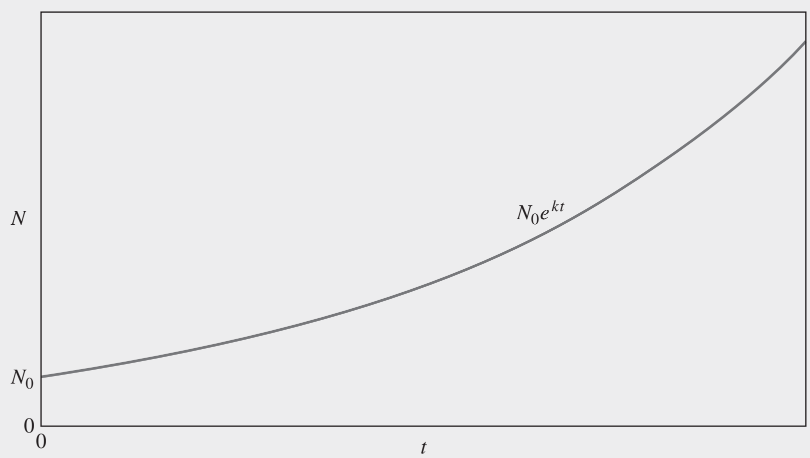


FIGURA 2-11
Ley de Malthus de crecimiento poblacional.

Estimación del tiempo de respuesta con la constante de tiempo

Como lo mostrarán los siguientes ejemplos, hay muchas aplicaciones para la ecuación $y' + by = c$ en las que la constante b es positiva y la variable independiente es el tiempo t. En este caso, la solución dada por la ecuación 2-17 puede interpretarse como sigue; la solución expresada en términos de t es

$$y(t) = \frac{c}{b}(1 - e^{-bt}) + y_0 e^{-bt}$$

Observamos de inmediato que, como $b > 0$, el término exponencial e^{-bt} desaparecerá cuando $t \to \infty$. Por tanto, el valor final, o *solución estacionaria*, de y es c/b, sin importar el valor de la condición inicial y_0. Pero suponga que quisiéramos estimar cuánto tarda y en alcanzar la solución de estado estacionario. La respuesta $t = \infty$ no tiene utilidad práctica. Para obtener una respuesta, primero reescriba la solución agrupando los términos exponenciales para obtener

$$y(t) = \frac{c}{b} + \left(y_0 - \frac{c}{b}\right)e^{-bt} = y_{ee} + \Delta e^{-bt}$$

donde definimos $y_{ss} = c/b$ (la solución de estado estacionario), y $\Delta = y_0 - y_{ss}$, que es la diferencia entre los valores inicial y final de y. Dado que $e^{-4} \approx 0.02$ hasta dos cifras decimales, y que $e^{-bt} \approx e^{-4}$ cuando $t = 4/b$, podemos ver que si $t = 4/b$,

$$y(4/b) - y_{ee} = 0.02\Delta$$

Es decir, cuando $t = 4/b$, solo queda 2% de la diferencia original entre el valor inicial y_0 y el valor final $y_{ss} = c/b$. Entonces podemos usar el valor $4/b$ como estimado del tiempo que la solución tarda en alcanzar el valor de estado estacionario.

Para este caso, $b > 0$, y es común definir un nuevo término τ como

$$\boxed{\tau = \frac{1}{b}} \quad \textbf{(2-23)}$$

El término τ se llama **constante de tiempo**. Así, podemos usar el término 4τ como un estimado de cuánto tarda la solución en alcanzar el valor de estado estacionario.

En la figura 2-12 se muestra la solución en términos de τ para cuando $y_0 = 0$. Observe que la solución llega a 63% del valor final en $t = \tau$ porque $e^{-1} = 0.37$ con dos cifras decimales, y por tanto $1 - e^{-1} = 0.63$ con dos cifras decimales. Observe también que

$$\frac{dy}{dt} = -b\Delta e^{-bt} = -\frac{\Delta}{\tau}e^{-t/\tau}$$

y, por tanto, $y'(0) = -\Delta/\tau = y_{ee}/\tau$ si $y_0 = 0$. Esta relación es útil para estimar τ a partir de datos experimentales si éstos cubren solo un corto intervalo de tiempo.

¿Por qué usar el criterio de 2% como medida de la cercanía de la solución al valor de estado estacionario? Es una elección común, pero algunas personas usan un criterio de 1%. Como $e^{-5} = 0.01$ con dos cifras decimales, tales personas pueden usar el término 5τ como estimado del tiempo que la solución tarda en alcanzar el valor de estado estacionario.

¿Qué sucede si $c = 0$? En este caso, la solución es

$$y(t) = y_0 e^{-bt} = y_0 e^{-t/\tau}$$

Como $e^{-t/\tau} \approx e^{-4} \approx 0.02$, podemos decir que la solución cayó a 2% de su valor inicial cuando $t = 4\tau$. Esto se usa a menudo como un estimado de cuánto tardará la solución en desaparecer; también se usa el valor 1%. Esto corresponde a $t = 5\tau$. En

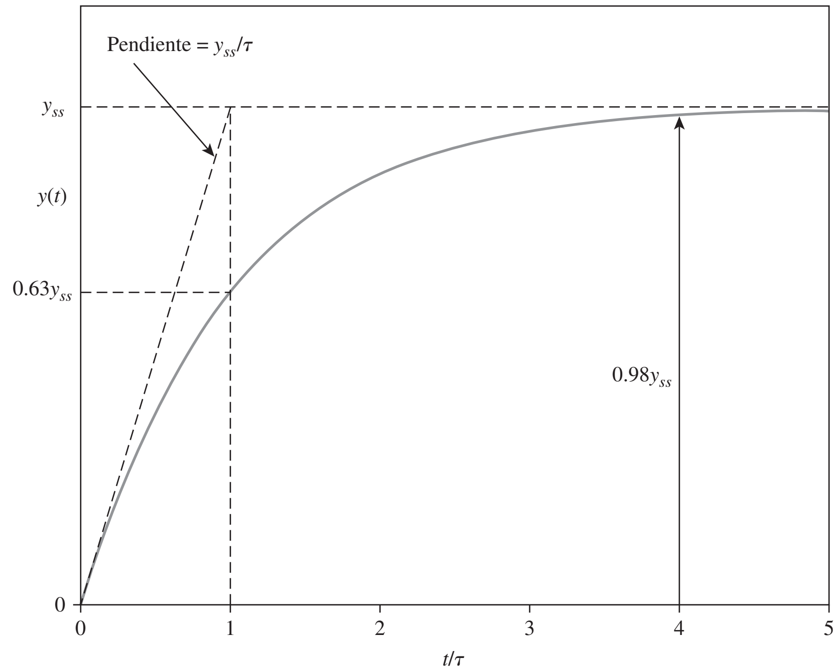


FIGURA 2-12
Respuesta de una ecuación lineal de primer orden con condición inicial cero.

la figura 2-13 se ilustra la solución. Observe también que la solución es 37% de su valor inicial en $t = \tau$ porque $e^{-1} \approx 0.37$.

Una ecuación lineal de primer orden siempre puede expresarse en la siguiente forma:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = R(t)$$

Así, cuando el coeficiente de y es 1, la constante de tiempo siempre puede reconocerse como el coeficiente de la derivada.

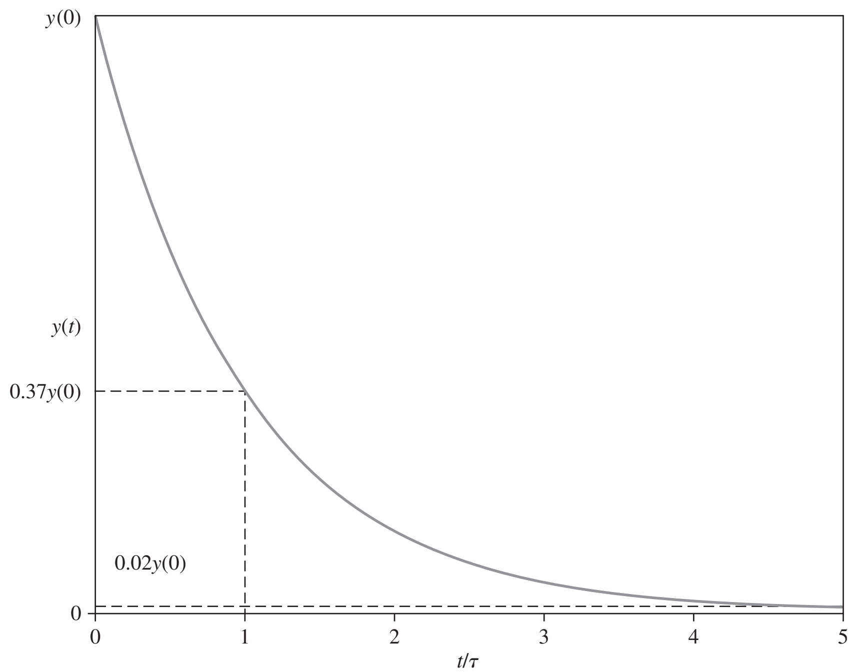


FIGURA 2-13
Solución homogénea de una ecuación lineal de primer orden.

EJEMPLO 2-4 Desintegración radiactiva y fechado por carbono

Se ha observado que los materiales radiactivos como el plutonio, el radio y el isótopo del carbono C^{14} se desintegran naturalmente para formar otro elemento u otro isótopo del mismo elemento con una rapidez proporcional a la cantidad del material radiactivo presente. Así, el proceso de desintegración radiactiva puede describirse mediante la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dM}{dt} = -kM \tag{2-24}$$

donde $M(t)$ es la cantidad de material radiactivo en el tiempo t y k es una constante positiva llamada *constante de desintegración* del material, que representa la fracción de la sustancia que se desintegra por unidad de tiempo. El signo negativo se debe a que $M(t)$ está disminuyendo con el tiempo. En consecuencia, dM/dt debe ser una cantidad negativa.

Un arqueólogo descubrió ciertos huesos cuyo contenido de C^{14} resultó ser 8% del que se encuentra en animales vivos. Tomando la constante de desintegración del C^{14} como $k = 1.24 \times 10^{-4}$ por año, estime la edad de esos huesos.

Solución La ecuación 2-24 es lineal de primer orden con coeficientes constantes. Tomando la cantidad de material radiactivo en el tiempo $t = 0$ como M_0, la solución de este problema de valor inicial resulta, por la ecuación 2-20,

$$M(t) = M_0 e^{-kt} \tag{2-25}$$

Entonces, si se conocen la masa inicial del material radiactivo M_0 y la constante de desintegración k, la masa restante del material radiactivo en cualquier tiempo t puede determinarse mediante la ecuación 2-25. Observe que el exponente kt debe ser una cantidad adimensional. Por tanto, si k se da por año, entonces t debe expresarse en años.

La solución anterior también puede manifestarse explícitamente para el tiempo como

$$t = -\frac{1}{k}\ln\frac{M(t)}{M_0} \tag{2-26}$$

La rapidez de desintegración del material radiactivo dM/dt es proporcional a su masa $M(t)$, que disminuye con el tiempo. En consecuencia, la rapidez del proceso de desintegración es elevada al principio pero disminuye con el tiempo. En vez de usar la constante de tiempo $\tau = 1/k$ para estimar la rapidez de desintegración, los físicos miden la rapidez de desintegración de los materiales radiactivos mediante la **vida media** del material, que se define como *el tiempo necesario para que la mitad del material radiactivo se desintegre* (figura 2-14).

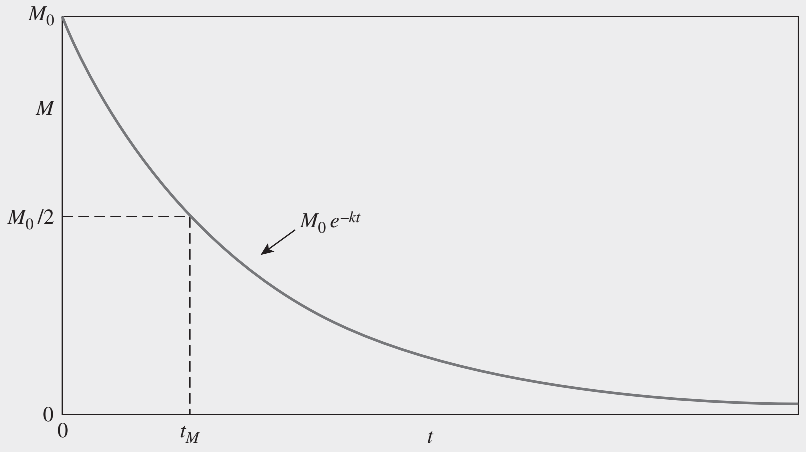


FIGURA 2-14
Desintegración de materiales radiactivos con el tiempo y la vida media t_M.

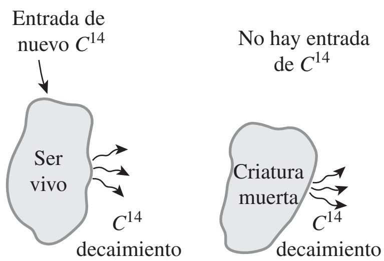


FIGURA 2-15
Cuando muere un ser vivo, deja de adquirir nuevo C^{14} y su contenido comienza a disminuir por la desintegración radiactiva.

Una relación para la vida media se determina fácilmente sustituyendo $M(t) = \frac{1}{2}M_0$ en la ecuación 2-25 y despejando t. Esto da

$$t_M = \frac{\ln 2}{k} \qquad \textbf{(2-27)}$$

En laboratorios se han medido las vidas medias de muchas sustancias radiactivas, y aparecen tabuladas en diversos manuales. Conociendo t_H, k puede calcularse con facilidad a partir de la ecuación 2-27.

Un área de aplicación interesante de la desintegración radiactiva es el **fechado por radiocarbono**, que se basa en la desintegración del isótopo radiactivo del carbono (C^{14}). Es común usar este método para estimar la edad de ciertas plantas o animales, así como artefactos arqueológicos. El método se basa en el hecho de que una pequeña fracción de los átomos de carbono en cualquier ser viviente está constituida por C^{14}. Esta fracción permanece más o menos constante durante la vida del ser viviente, porque éste adquiere continuamente nuevo carbono de su entorno mediante la ingestión y la respiración, y la fracción de C^{14} en la atmósfera permanece esencialmente constante.

Cuando muere un ser vivo, deja de adquirir nuevo carbono, incluyendo el C^{14}, y el contenido de este comienza a agotarse por desintegración radiactiva (figura 2-15). Se sabe que la vida media del C^{14} es cercana a 5 568 años, y su constante de desintegración es de casi 1.24×10^{-4} por año. Entonces, el tiempo transcurrido entre la muerte del ser vivo puede calcularse a partir de la ecuación 2-25 midiendo la fracción remanente de C^{14}.

La cantidad de C^{14} en la atmósfera se repone en forma constante mediante la conversión del nitrógeno a C^{14} por los rayos cósmicos en la atmósfera y, de este modo, la relación del C^{14} al carbono ordinario en la atmósfera permanece esencialmente en los mismos niveles. Mediante las tablas de factores de corrección se toman en cuenta las pequeñas variaciones a lo largo de los siglos.

A la luz de esta información, se determina la edad de los huesos descubiertos por el arqueólogo, mediante la ecuación 2-26, dado que $M(t)/M_0 = 0.08$, como

$$t = -\frac{1}{k}\ln\frac{M(t)}{M_0} = -\frac{1}{1.24 \times 10^{-4}/\text{año}}\ln\ 0.08 = 20\ 369 \text{ años}$$

Así, el animal que tenía esos huesos murió hace más de 20 000 años.

EJEMPLO 2-5 Ley de enfriamiento de Newton

Una pequeña bola de cobre macizo que inicialmente ($t = 0$) está a una temperatura $T_1 = 20°C$, se deja caer en un recipiente grande lleno de agua hirviendo a $T_0 = 100°C$, como se muestra en la figura 2-16. Como era de esperarse, se transfiere calor del agua a la bola, y su temperatura comienza a aumentar. La masa m, el área superficial A, el calor específico de la bola c y el coeficiente de transferencia de calor por convección h son tales que $\lambda = hA/mc = 0.1$ s^{-1}. La ecuación diferencial que rige este proceso se determinó en el primer capítulo como

$$\frac{dT}{dt} = \lambda(T_0 - T)$$

o, en forma estándar, como

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{dT}{dt}\right) + T = T_0$$

Así, vemos que la constante de tiempo es $\tau = 1/\lambda = mc/hA$. Con base en esto, podemos decir que una esfera con una masa grande m o un alto calor específico c se calentará más lentamente. Esto tiene sentido porque se necesita más

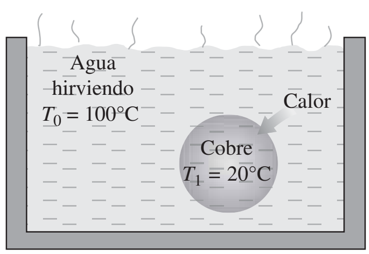


FIGURA 2-16
Esfera de cobre que se deja caer en agua hirviendo (ejemplo 2-5).

energía para aumentar la temperatura de tal esfera. De manera similar, una esfera con un área superficial pequeña A también se calentará más lentamente porque el calor debe transferirse a través de un área superficial menor.

Para nuestro problema específico, $T_0 = 100°C$ y

$$T(0) = T_1 = 20°C$$

Determine la temperatura de la bola en $t = 20$ s resolviendo este problema de valor inicial.

Solución Se trata de un problema de valor inicial lineal de primer orden, y su solución es

$$T(t) = T_0 - (T_0 - T_1)e^{-\lambda t} \tag{2-28}$$

Sustituyendo los valores específicos, la temperatura de la bola 20 s después de dejarla caer en agua hirviendo se determina como

$$T(20) = 100 - (100 - 20)e^{-0.1\times 20} \cong 89.2°C$$

Observe que la temperatura de la bola se acercará a la del agua hirviendo (100°C) cuando $t \to \infty$.

EJEMPLO 2-6 Absorción de luz

El coeficiente de absorción del agua para la luz roja es cercano a $0.5\ m^{-1}$. Determine a qué distancia puede viajar la luz roja en agua antes de que se absorba 90% de ella.

Solución En el primer capítulo se explicó la absorción de la radiación y se determinó la ecuación diferencial rectora (ecuación 1-8) como

$$\frac{dE}{ds} = -\alpha E$$

donde α es el coeficiente de absorción, s es la distancia que la luz viaja en dirección del haz, y E es la energía radiante de la luz roja. Ésta es una ecuación lineal de primer orden con un coeficiente constante, y su solución mediante la ecuación 2-20 es $E(s) = E_0e^{-\alpha s}$ o

$$\frac{E(s)}{E_0} = e^{-\alpha s}$$

donde E_0 es la energía radiante del haz cuando toca el medio de transmisión en $s = 0$. La relación $E_{(s)}/E_0$ será 0.1 en la ubicación s cuando se absorba 90% de la radiación. Entonces,

$$0.1 = e^{-0.5s} \to s \cong 4.64\ m$$

Por tanto, el agua absorberá 90% de la luz roja antes de que esta viaje una distancia de 4.64 m (figura 2-17).

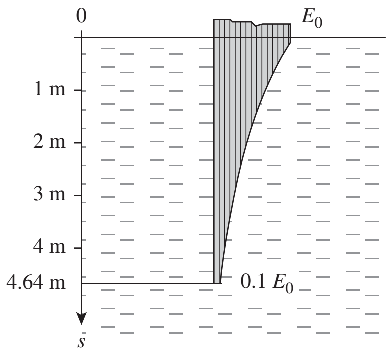


FIGURA 2-17
La absorción de luz en el agua (ejemplo 2-6).

EJEMPLO 2-7 Mezclar una solución de salmuera

Considere que un tanque contiene 1 000 L de agua pura y está conectada a líneas de abasto y de descarga, como se muestra en la figura 2-18. En $t = 0$, tanto la línea de abasto como la de descarga están abiertas, y la salmuera (solución de agua con sal) que contiene 0.1 kg de sal por litro entra y sale del tanque a razón de 50 L/min después de mezclarse perfectamente con el agua del tanque. Suponga que la sal disuelta no cambia el volumen del agua. Como

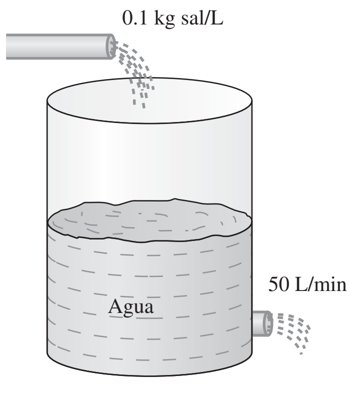


FIGURA 2-18
Esquema para el ejemplo 2-7.

es de esperarse, el contenido de sal en el tanque aumenta con el tiempo, aun cuando el volumen de agua permanezca constante. Obtenga la relación para la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t, y determine la cantidad máxima de sal que el tanque contendrá finalmente.

Solución Sea M la masa de sal en el tanque en un determinado tiempo t. El principio de conservación de la masa para la sal en el tanque puede expresarse como

$$\frac{dM}{dt} = (50 \text{ L/min})(0.1 \text{ kg/L}) - (50 \text{ L/min})\left(\frac{M}{1\,000} \text{ kg/L}\right)$$

Esto se reduce a

$$\frac{dM}{dt} + 0.05M = 5 \quad \textbf{(2-29)}$$

Ésta es la ecuación diferencial que describe la variación de sal en el tanque con el tiempo. La condición inicial para este problema es $M(0) = 0$, ya que el tanque inicialmente no contiene sal. Observe que se trata de un problema de valor inicial lineal de primer orden con coeficientes constantes, y su solución es, por la ecuación 2-17,

$$M = 100(1 - e^{-0.05t}) \quad \textbf{(2-30)}$$

Observe que cuando $t \to \infty$, el término $e^{-0.05t}$ se vuelve cero y obtenemos $M = 100$ kg. Ésta es la cantidad máxima de sal que puede contener el tanque bajo las condiciones específicas. La solución se grafica en la figura 2-19. Como la constante de tiempo es $1/0.05 = 20$, M tardará alrededor de 80 s para llegar a 100 kg.

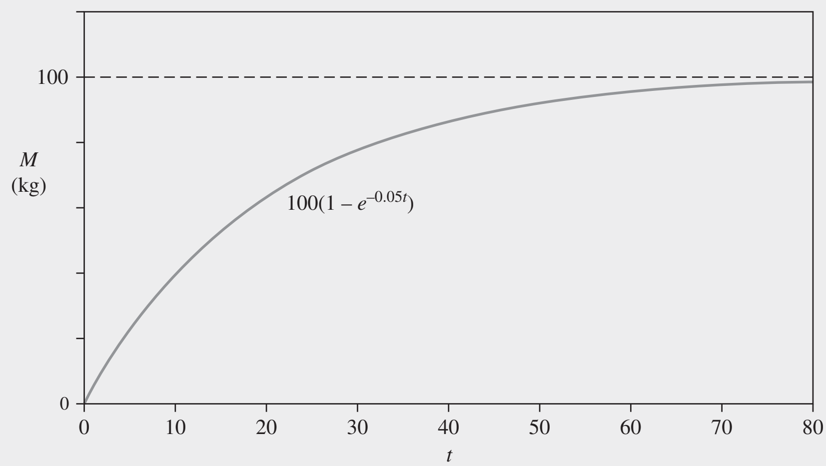


FIGURA 2-19
Aumento en la cantidad de sal en el tanque con respecto al tiempo (ejemplo 2-7).

EJEMPLO 2-8 Cuerpos en caída libre con resistencia al aire

El movimiento de cuerpos rígidos en línea recta puede describirse mediante la *segunda ley del movimiento de Newton* expresada en forma escalar como

$$F = ma \quad \text{o} \quad F = m\frac{dV}{dt}$$

donde F es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo y m, a y V son la masa, la aceleración y la velocidad del cuerpo, respectivamente.

Las dos fuerzas que actúan sobre los cuerpos en caída libre en la atmósfera son la *fuerza de gravedad* o el *peso* del cuerpo como $W = mg$ y la *resistencia del aire*, que es función de la velocidad. Para cuerpos en caída libre, ambas fuerzas actúan en direcciones opuestas, y la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo es la diferencia entre ambas. A bajas velocidades, la resistencia del aire es aproximadamente proporcional a la velocidad, y en tales casos la segunda ley de Newton puede expresarse como (figura 2-20)

$$m\frac{dV}{dt} = mg - kV \qquad \textbf{(2-31)}$$

o

$$\frac{dV}{dt} + \frac{k}{m}V = g \qquad \textbf{(2-32)}$$

donde k es una constante de proporcionalidad que se determina experimentalmente. La aceleración gravitatoria tiene un valor $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ al nivel del mar y disminuye con la elevación. Pero para pequeñas elevaciones relativas al radio de la Tierra, el valor de g puede suponerse constante como $9.8\ \mathrm{m/s^2}$.

Considere un cuerpo de masa m que se deja caer desde el reposo en $t = 0$. El cuerpo cae bajo la influencia de la gravedad, y la resistencia del aire que se opone al movimiento se supone proporcional a la velocidad. Designando x como la distancia vertical y tomando la dirección positiva en el eje x hacia abajo con el origen en la posición inicial del cuerpo, obtenga relaciones para la velocidad y la posición del cuerpo en función del tiempo t.

Solución Con las suposiciones señaladas, el problema de valor inicial que describe este movimiento para tiempos anteriores a aquel en que el cuerpo toca el suelo es la ecuación 2-32 con la condición inicial $V(0) = 0$. Éste es un problema de valor inicial lineal de primer orden con coeficientes constantes, y su solución (por la ecuación 2-17) es

$$V(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}) \qquad \textbf{(2-33)}$$

que es la relación deseada para la velocidad como función del tiempo. Observe que cuando $t \to \infty$, la velocidad tiende al valor constante de

$$V_\infty = \frac{mg}{k}$$

que se llama **velocidad terminal** (figura 2-21). Un cuerpo en caída libre alcanza esta velocidad cuando la resistencia del aire es igual al peso del cuerpo. Observe que la velocidad terminal depende solo del peso del cuerpo y del coeficiente de resistencia k. Es independiente de la velocidad inicial $V(0)$.

Reacomodando la ecuación 2-32 como

$$\frac{m}{k}\frac{dV}{dt} + V = \frac{mg}{k}$$

vemos que la constante de tiempo es $\tau = m/k$. Por tanto, tardará aproximadamente $t = 4\tau = 4m/k$ en alcanzar 98% de la velocidad terminal.

La distancia que el cuerpo cae se obtiene por la definición de la velocidad $V = dx/dt$ y la condición $x(0) = 0$. Integrando $dx = V dt$ después de sustituir la expresión V de la ecuación 2-33 y aplicando las condiciones iniciales, se obtiene

$$x(t) = \int_0^t \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m})dt = \frac{mg}{k}\left[t - \frac{m}{k}(1 - e^{-kt/m})\right] \qquad \textbf{(2-34)}$$

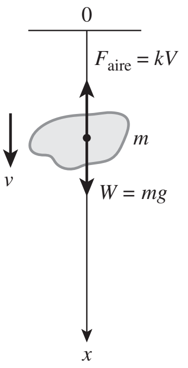


FIGURA 2-20
Fuerza de gravedad y de resistencia del aire actuando sobre un cuerpo en caída libre.

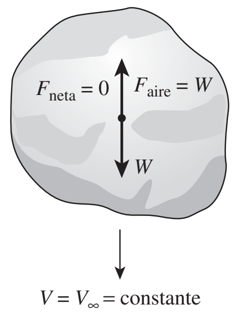


FIGURA 2-21
Un cuerpo en caída libre llega a su velocidad terminal cuando la resistencia del aire iguala el peso del cuerpo.

que es la relación deseada para la posición del cuerpo como función del tiempo. Como $e^{-4} \approx 0.02$, cuando el cuerpo llegue a 98% de su velocidad terminal, habrá descendido una distancia igual a $x(4\tau) = x(4m/k)$, o

$$x\left(\frac{4m}{k}\right) = 3.02g\frac{m^2}{k^2}$$

EJEMPLO 2-9 **Modelo de un solenoide del arranque de un motor**

El circuito que se muestra en la figura 2-22 es un modelo de solenoide, como el que se usa para embragar el engrane de la marcha de un automóvil con el volante del motor. El solenoide se construye devanando alambre alrededor de un núcleo de hierro para hacer un electroimán. La resistencia R es la del alambre, y la inductancia L se debe al efecto electromagnético. Conectando el voltaje de suministro v_s se activa el imán, el cual mueve el engrane de la marcha. Desarrolle un modelo de la corriente i suponiendo que $v_s = V$, constante. Determine el valor de estado estacionario de la corriente. ¿Cuánto tardará la corriente en alcanzar este valor?

Solución Usando la ley de voltaje de Kirchhof, la cual establece que la suma de voltajes alrededor de un circuito cerrado debe ser cero debido a la conservación de la energía, obtenemos el siguiente modelo de la corriente i

$$v_s - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

Si $v_s = V$ constante, la ecuación se convierte en

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

Éste es un problema de valor inicial cuya solución (por la ecuación 2-17) es

$$i(t) = i(0)e^{-Rt/L} + \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}) = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

si $i(0) = 0$. La corriente de estado estacionario es V/R. La constante de tiempo para este modelo es $\tau = L/R$. Por tanto, como $1 - e^{-4} \approx 0.98$, la corriente de solenoide llegará a 98% de su valor final V/R en $t = 4\tau = 4L/R$.

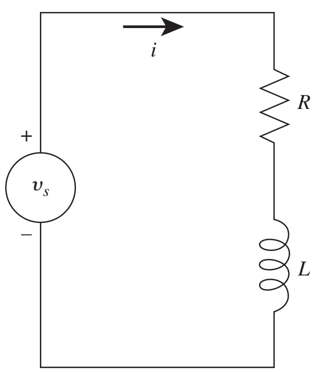


FIGURA 2-22
Representación de un circuito de solenoide.

Repaso de la sección

2-9C ¿Cuál es la ley de Malthus de crecimiento de la población? ¿Por qué no es muy realista?

2-10C ¿En qué se basa el fechado por carbono radiactivo? ¿Por qué el C^{14} es adecuado para ese propósito?

2-11C Determine la constante de tiempo τ para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $6\dfrac{dy}{dt} + y = 10$ *b*) $6\dfrac{dy}{dt} + 3y = 10$ *c*) $10\dfrac{dy}{dt} + 2y = t^2$

(*Respuestas: a*) 6, *b*) 2, *c*) 5).

2-12 Determine la relación del contenido de C^{14} en huesos de 2 000 años de antigüedad con el de los huesos de animales vivos. (*Respuesta:* 78%).

2-4 ▪ ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES DE PRIMER ORDEN

Los problemas de valor inicial lineales de primer orden son relativamente simples de resolver porque hay una expresión analítica para la solución general de dichos problemas. Además, la solución de esos problemas es única en todo el intervalo en el que las funciones $P(x)$ y $R(x)$ son continuos. Estas características son verdaderos lujos cuando se trata de problemas de valor inicial no lineales. Por tanto, al tratar con problemas no lineales, es muy importante determinar si existe una solución en una región específica, y en ese caso, saber si es única. Encontrar la solución es otro asunto, suponiendo que la haya. En esta sección explicaremos las características generales de los problemas de valor inicial no lineales. En las siguientes secciones resolveremos aquellos que tienen ciertas formas especiales.

Muchos problemas que se encuentran en la práctica son de naturaleza lineal y, por tanto, dan como resultado ecuaciones diferenciales lineales simples de resolver. Pero muchos otros problemas de interés práctico son de naturaleza no lineal y es por ello que resultan en ecuaciones diferenciales no lineales. No existe un procedimiento general para resolver ecuaciones no lineales, y poco puede decirse sobre las características generales de tales ecuaciones. Por lo tanto, el estudio analítico de ecuaciones no lineales se limita a ciertos tipos para los que están disponibles soluciones exactas. Cuando es factible, algunas ecuaciones no lineales se pueden linealizar usando algunas aproximaciones que dan resultados razonablemente exactos. Cuando la ecuación no lineal no puede resolverse exactamente, ni por linealización, con frecuencia el mejor medio para obtener una solución es usar los métodos numéricos que se tratan en el capítulo 9.

Considerando que un problema de valor inicial no lineal puede no tener siquiera una solución en una región específica, es aconsejable verificar si *existe* una solución en esa región antes de intentar resolverlo. Además, considerando que la solución obtenida puede no ser única de un problema no lineal, quizá sea necesario verificar la *unicidad* de la solución en una región específica. El siguiente teorema proporciona las herramientas necesarias para verificar la existencia y la unicidad de la solución a un problema de valor inicial no lineal de primer orden dado (figura 2-23).

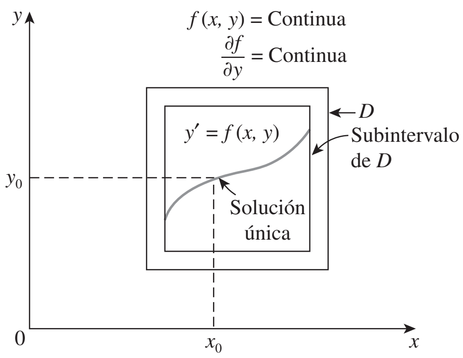


FIGURA 2-23
Existencia y unicidad de solución de problemas de valor inicial no lineales $y' = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$.

TEOREMA 2-2 Existencia y unicidad de solución de ecuaciones no lineales de primer orden

Si $f(x, y)$ es una función continua en un rectángulo D que contiene un punto (x_0, y_0), entonces la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y)$$

con

$$y(x_0) = y_0$$

tiene, por lo menos, una solución en un subintervalo de D que incluye el punto (x_0, y_0). Además, la solución es única si $\partial f/\partial y$ también es continua en D.

La comprobación del teorema es larga y se omite, pero puede hallarse en textos teóricos. Observe que el teorema 2-2 señala las condiciones *suficientes* para que un problema de valor inicial de primer orden no lineal tenga una solución única en algún intervalo. Por tanto, un problema que no satisfaga las condiciones de este, aún puede tener una solución única.

Aunque las condiciones del teorema parecen ser muy restrictivas, las cumple cualquier ecuación diferencial que describa exactamente un problema físico con una solución única.

El teorema 2-2 establece las condiciones bajo las cuales una ecuación diferencial no lineal de primer orden posee una solución única, pero no menciona cómo encontrar la solución ni cómo determinar la región en la cual existe dicha solución.

Las ecuaciones lineales generalmente dan soluciones que contienen todas las respuestas a la ecuación. Sin embargo, en general este no es el caso de las ecuaciones no lineales. Además, a diferencia de lo que ocurre con las ecuaciones lineales, las soluciones de las ecuaciones no lineales están a menudo en una forma que no puede expresarse con claridad en términos de la variable independiente. Es decir, las soluciones a menudo están implícitas.

En las siguientes secciones veremos algunos métodos de solución aplicables tanto a ecuaciones lineales como no lineales. Así, en las ecuaciones lineales, existe una opción para el método de solución. Como usted verá, es posible expresar las ecuaciones que son exactas o separables en una forma que pueda resolverse por integración directa.

Repaso de la sección

2-13C ¿En qué condiciones la ecuación $y' = f(x, y)$ tiene una solución en una región específica? ¿Cuándo es única esta solución?

2-14C ¿Existe un procedimiento general para resolver ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden?

2-15 Para las siguientes ecuaciones, determine la región aproximada en el plano xy donde se garantiza la existencia y la unicidad de una solución a través de un punto específico, por el teorema de la existencia y la unicidad.

a) $y' = \dfrac{1}{x + y}$ *b*) $y' = \sqrt{x^2 - y^2}$

(*Respuestas: a*) existe una solución única cerca de cualquier punto en el plano xy donde $x \neq -y$; *b*) existe una solución única cerca de cualquier punto en el plano xy donde $x > y$ o $x < -y$).

2-16 Para las siguientes ecuaciones, determine la región aproximada en el plano xy donde se garantiza la existencia de una solución. También establezca la región donde la solución es única.

a) $y' = y \quad y(1) = 2$ *b*) $y' = \sqrt{x - y} \quad y(0) = 1$

(*Respuestas*: *a*) existe una solución, y es única, en una región cercana a $x = 1$; *b*) no hay garantía de que exista una solución única en alguna región cercana a $x = 0$).

2-5 ▪ ECUACIONES SEPARABLES DE PRIMER ORDEN

a) Una ecuación separable:

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

b) Una ecuación no separable:

$$y' = \frac{f(x)}{g(x, y)}$$

o,

$$y' = \frac{f(x, y)}{g(y)}$$

FIGURA 2-24
Una ecuación diferencial es separable si su lado derecho puede expresarse como la relación de una función de x y una de y.

Se dice que la ecuación diferencial de primer orden en la forma estándar

$$y' = h(x, y)$$

es **separable** si $h(x, y)$ puede expresarse como la relación de una función de x y una función de y (figura 2-24). Es decir,

$$h(x, y) = \frac{f(x)}{g(y)}$$

para ecuaciones separables, y así,

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{2-35}$$

o $$g(y)y' = f(x) \tag{2-36}$$

Por ejemplo, la ecuación

$$y' = \frac{x^2y^3}{(x-2)e^{-2y}}$$

es separable, ya que se puede reacomodar y expresar como

$$\frac{e^{-2y}}{y^3}y' = \frac{x^2}{x-2}$$

para $y \neq 0$ y $x \neq 2$.

Entonces, las variables x y y de una ecuación separable pueden separarse una de otra por manipulaciones algebraicas, de modo que un lado de la ecuación contenga solo y y el otro lado contenga solo x.

Integrando la ecuación 2-36 con respecto a x resulta

$$\int g(y)y'dx = \int f(x)dx + C$$

o $$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C \tag{2-37}$$

ya que $y'dx = dy$. Observe que el coeficiente de dy solo tiene la variable y, mientras el coeficiente de dx nada más contiene la variable x.

La ecuación 2-37 implica dos integraciones, y usted puede verse tentado a usar dos constantes de integración C_1 y C_2. Sin embargo, ambas son constantes arbitrarias y conviene combinarlas en una sola constante arbitraria C, cuyo valor puede determinarse aplicando la condición inicial (figura 2-25).

Hay tres observaciones que pueden hacerse debido a la ecuación 2-37: 1) las integrales que aparecen en esta ecuación pueden ser imposibles de realizar analíticamente, y puede ser necesario realizar una de ellas, o ambas, numéricamente; 2) es bastante probable que la solución final esté en forma *implícita*, y puede no ser posible expresar y explícitamente en términos de x ni expresar x explícitamente en términos de y; 3) expresar una determinada ecuación diferencial de primer orden en forma separable a menudo exige dividir ambos lados de la ecuación entre una función $P(x)$ o $Q(y)$ o incluso $P(x)Q(y)$. Tales divisiones se realizan bajo la suposición de que ni $P(x)$ ni $Q(y)$ sean cero en el intervalo que interesa porque no se permite la división entre cero. Las soluciones de un parámetro que se obtienen de esta manera también reflejan tal suposición. Estas soluciones pueden no incluir la solución de una ecuación diferencial que corresponda a los valores de x y y que hagan el factor cero, y puede ser necesario investigar la forma que tomará la ecuación diferencial y su resultado en este caso. Tales soluciones son *singulares* de la ecuación diferencial si no pueden obtenerse de una familia general de soluciones de un parámetro, y si tienen sentido, deben incluirse en la respuesta. En seguida se ilustra el procedimiento de solución de ecuaciones separables con ejemplos.

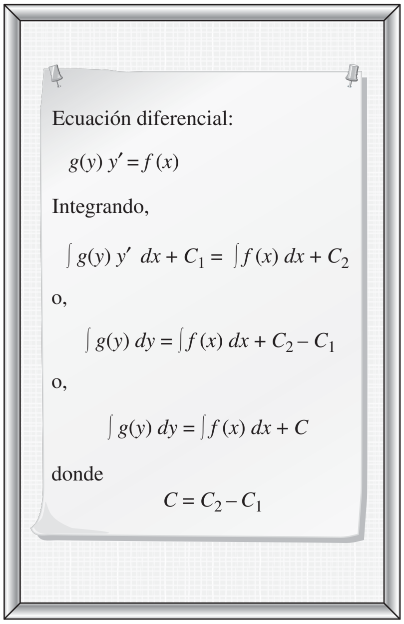


FIGURA 2-25
En una ecuación que incluya varias integrales indefinidas, todas las constantes de integración pueden combinarse en una.

EJEMPLO 2-10 Ecuación separable

Resuelva el siguiente problema de valor inicial usando la separación de variables. $y' = 2xy^2$, $y(2) = 1$.

Solución Dividiendo ambos lados de la ecuación entre y^2 se obtiene

$$\frac{1}{y^2}y' = 2x$$

o $$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx + C$$

Ecuación diferencial:

$$y' = 2xy^2$$

Separando las variables,

$$\frac{1}{y^2}\, y' = 2x$$

Integrando,

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

o,

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}$$

FIGURA 2-26
Una ecuación separable puede resolverse por integración directa después de apartar las variables.

La ecuación diferencial ahora está en la forma separada, ya que uno de sus lados contiene solo y y el otro contiene solo x. La solución se obtiene por integración como (figura 2-26)

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

o

$$y = \frac{-1}{x^2 + C}$$

La constante C se determina aplicando la condición inicial $y(2) = 1$, de modo que

$$1 = \frac{-1}{2^2 + C} \rightarrow C = -5$$

Sustituyendo,

$$y = \frac{-1}{x^2 - 5}$$

que es la solución deseada en forma explícita. Observe que al obtener este resultado dividimos ambos lados de la ecuación diferencial original entre y^2, que es cero en $y = 0$. Por tanto, debemos investigar si perdimos (o ganamos) algunas soluciones debido a esta división. Por sustitución directa podemos comprobar que $y = 0$ es una solución de la ecuación diferencial original, pero no satisface la condición inicial. Es una solución singular, ya que no puede obtenerse a partir de la anterior.

EJEMPLO 2-11 Crecimiento poblacional: ley logística

En el ejemplo 2-3 se menciona que el modelo de crecimiento exponencial de la población se vuelve no realista cuando se trata de valores de tiempo altos, y que se necesita un modelo más realista, aplicable en un intervalo de tiempo mucho mayor. La manera más sencilla de tomar en cuenta la posible declinación de la población N cuando aumenta demasiado es hacer el factor k en la ecuación 2-21 linealmente dependiente del tamaño de la población N como en

$$k(N) = a - bN$$

donde a y b son dos constantes positivas. Esta expresión dice que la tasa de crecimiento disminuye al aumentar N y se vuelve negativa cuando $N > a/b$. Entonces, la ecuación diferencial que rige el crecimiento de población se vuelve (figura 2-27)

$$N' = (a - bN)N \tag{2-38}$$

Este modelo de crecimiento poblacional se debe al matemático belga P. F. Verhulst (1804-1849), y se llama **crecimiento logístico**. El valor de la constante b es demasiado pequeño en relación con a, de modo que para valores reducidos de N, el término bN es despreciable. Al aumentar N, el término bN comienza a ser significativo y reduce la tasa de crecimiento al disminuir el valor de $k(N)$. Para valores todavía mayores de N, el término bN se vuelve mayor que a, y la tasa de crecimiento poblacional $k(N)$ se hace negativa.

La ecuación 2-38 es más realista que la ecuación 2-21, pero también es más compleja, y su solución también lo es. Este ejemplo comprueba que se obtienen mejores modelos matemáticos de situaciones del mundo real a costa de trabajo adicional.

Los biólogos han observado que el crecimiento poblacional de las moscas de fruta está de acuerdo con la ley logística de crecimiento expresada por la ecuación 2-38, siendo a y b dos constantes determinadas experimentalmente. Tomando la población en el tiempo $t = 0$ como N_0, determine la población $N(t)$ como función del tiempo y trace la gráfica.

a) Crecimiento maltusiano:

$$N' = kN, \qquad k = constante$$

b) Crecimiento logístico:

$$N' = (a - bN)\,N, \qquad a, b\ constantes$$

FIGURA 2-27
Dos modelos de crecimiento poblacional y sus ecuaciones diferenciales correspondientes.

Solución La formulación matemática de este problema puede expresarse como $N' = (a - bN)N$ con $N(0) = N_0$, que es un problema de valor inicial de primer orden, no lineal. Es un alivio observar que las variables de la ecuación diferencial pueden separarse.

Antes de separar las variables y resolver el problema formalmente; veamos lo que sucede cuando el lado derecho de la ecuación diferencial es igual a cero. El lado derecho será cero cuando $N = 0$ o $N = a/b$. Para cualquier caso, la ecuación diferencial se reducirá a $N' = 0$, lo cual significa que la población no aumentará ni disminuirá con el tiempo. En otras palabras, para ambos casos la población permanece constante y las soluciones $N = 0$ y $N = a/b$ se llaman **soluciones de equilibrio**. Sobre el eje N, los valores de población correspondientes a estas poblaciones se llaman **puntos de equilibrio** o **puntos críticos**. Podemos considerar el caso $N = 0$ como la solución trivial del modelo logístico. Entonces, el punto $N = a/b$ se vuelve la única solución de equilibrio de la ecuación diferencial con sentido. Asimismo, si $N_0 = a/b$, entonces $N = a/b$ será la solución del problema de valor inicial, y la población permanecerá constante en el valor de N_0.

Cuando N no es cero ni a/b, el término $(a - bN)N$ no es cero, y la ecuación diferencial en este caso puede expresarse en forma separada como

$$\frac{1}{(a - bN)N}N' = 1$$

Integre ambos lados sabiendo que $N'dt = dN$ para obtener

$$\int \frac{1}{(a - bN)N}N'dt = \int \frac{dN}{(a - bN)N} = \int dt + C$$

o

$$\frac{1}{a}\ln\left|\frac{N}{a - bN}\right| = t + C_1$$

Reacomodando,

$$\left|\frac{N}{a - bN}\right| = e^{at + aC_1}$$

o

$$\frac{N}{|a - bN|} = Ce^{at}$$

ya que N es una cantidad positiva y $C = e^{aC_1}$. La constante C se determina aplicando la condición inicial $N(0) = N_0$ como

$$\frac{N_0}{|a - bN_0|} = C$$

Sustituyendo C y suponiendo que $a - bN$ y $a - bN_0$ tienen el mismo signo, obtenemos

$$N = \frac{aN_0}{bN_0 + (a - bN_0)e^{-at}}$$

que es la solución deseada. Esta solución se grafica en la figura 2-28 para diferentes valores de N_0. En esta gráfica podemos ver que si $N_0 < a/b$ entonces N siempre será menor que a/b. También, si $N_0 > a/b$ entonces N siempre será mayor que a/b. Esto comprueba nuestra suposición de que $a - bN$ y $a - bN_0$ tienen el mismo signo.

Observe que cuando $t \to \infty$, el factor $e^{-at} \to 0$ y $N(t)$ tenderá asintóticamente a a/b, sin que importe el valor de N_0. Entonces a $N = a/b$ le llamamos *nivel de saturación* y decimos que es una solución asintóticamente estable de la ecuación de crecimiento logístico de la población.

Esta solución sugiere que, cuando la ley logística sea aplicable, la población de cierta colonia de insectos alcanzará su nivel de equilibrio de a/b después de un tiempo suficiente, aun cuando la población inicial sea muy baja (pero diferente a cero). Del mismo modo, poner un gran número de insectos en un área no tendrá ningún efecto en la población de insectos en ese sitio a largo plazo.

Hay disponibles modelos de población más realistas (pero más complejos) para ofrecer soluciones de mayor exactitud a problemas relacionados con la población, incluyendo la extinción. Algunos de ellos se presentan en los ejercicios.

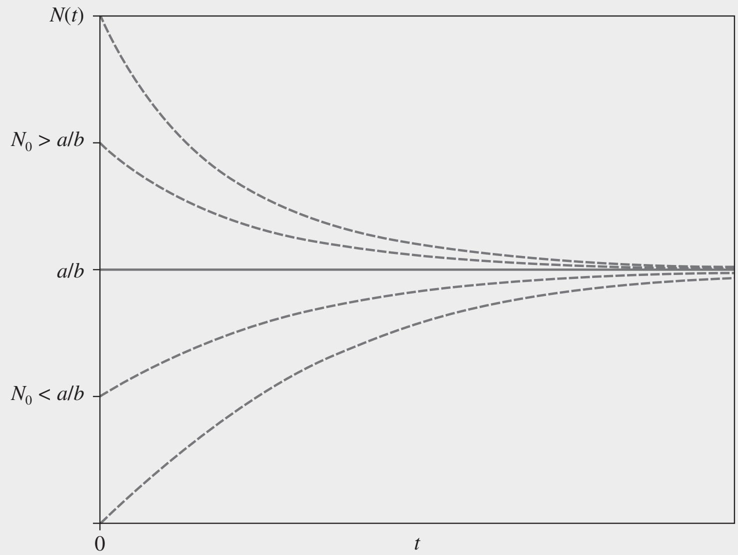


FIGURA 2-28
Ley logística de crecimiento poblacional para diferentes valores de N_0.

EJEMPLO 2-12 Crecimiento poblacional: un estudio cualitativo

Considere una zona de pesca en donde la población de peces obedece la ley logística de crecimiento, y suponga que éstos se pescan continuamente a razón constante de k, que es independiente de su población. La ecuación diferencial que rige la población de peces N en este caso puede expresarse como

$$N' = (a - bN)N - k \tag{2-39}$$

donde a, b y k son constantes positivas. La presencia de la constante k en la ecuación hace surgir algunas posibilidades interesantes, incluyendo la extinción si k es grande. Esta ecuación puede resolverse por el método de separación de variables; pero es posible entender muchos aspectos interesantes del problema con sólo estudiar la ecuación diferencial:

a) Si $k < a^2/4b$, compruebe que hay dos puntos de equilibrio N_1 y N_2 donde $N_1 < N_2$. También demuestre que N_1 es inestable y N_2 es estable.
b) Si $k = a^2/4b$, compruebe que solo hay un punto de equilibrio y es semiestable.
c) Si $k > a^2/4b$, compruebe que no hay puntos de equilibrio y que la extinción tendrá lugar con este ritmo de pesca, sin que importe el valor inicial de la población de peces.

Solución *a*) Los puntos de equilibrio se dan cuando la tasa de cambio de la población es cero. Es decir, son los puntos en los que $N' = 0$. Se determinan igualando N' a cero en la ecuación 2-39, $(a - bN)N - k = 0$, o

$$N^2 - \frac{a}{b}N + \frac{k}{b} = 0$$

cuyas raíces son

$$N_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4kb}}{2b} \tag{2-40}$$

Para $a^2 > 4kb$ (o $k < a^2/4b$), esta ecuación cuadrática tiene dos raíces reales, que son

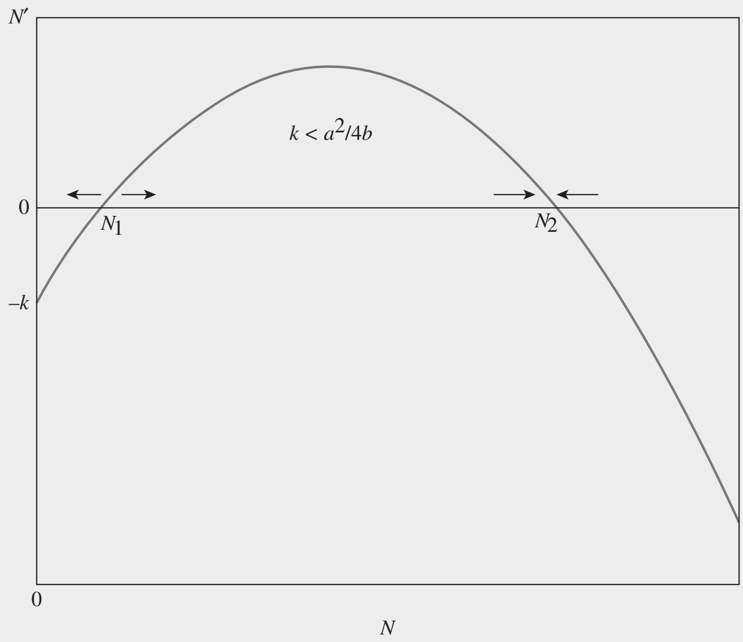
$$N_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4kb}}{2b} \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4kb}}{2b}$$

donde $N_1 < N_2$. En la figura 2-29*a*) se muestra una gráfica de N' contra N. Observe que para $N = 0$ tenemos, por la ecuación 2-39, que $N' = -k$. Por tanto, la curva interseca el eje N' en $-k$. También note que la curva interseca el eje N en dos puntos, indicando que $N' = 0$ en ellos. Por tanto, son los puntos de equilibrio. Esto es de esperarse, ya que la ecuación $N' = 0$ es una ecuación cuadrática en N, que tiene dos raíces reales en este caso. De modo que la gráfica de N' en el plano $N' - N$ es una parábola que interseca el eje N' en $-k$ y el eje N en N_1 y N_2.

El punto de equilibrio N_1 es inestable porque: 1) N' es negativa para $N < N_1$, lo cual significa que la población disminuirá (se alejará de N_1 hacia la izquierda) si N es ligeramente menor que N_1; y 2) N' es positiva para $N > N_1$, lo cual significa que la población aumentará (se alejará de N_1 hacia la derecha) si N es ligeramente mayor que N'. Del mismo modo, el punto de equilibrio N_2 es inestable porque: 1) N' es positiva para $N < N_2$, lo cual significa que la población aumentará (se moverá a la derecha hacia N_2) si N es ligeramente menor que N_2; y 2) N' es negativa para $N > N_2$, lo cual significa que la población disminuirá (se moverá a la izquierda hacia N_2) si N es ligeramente mayor que N_2.

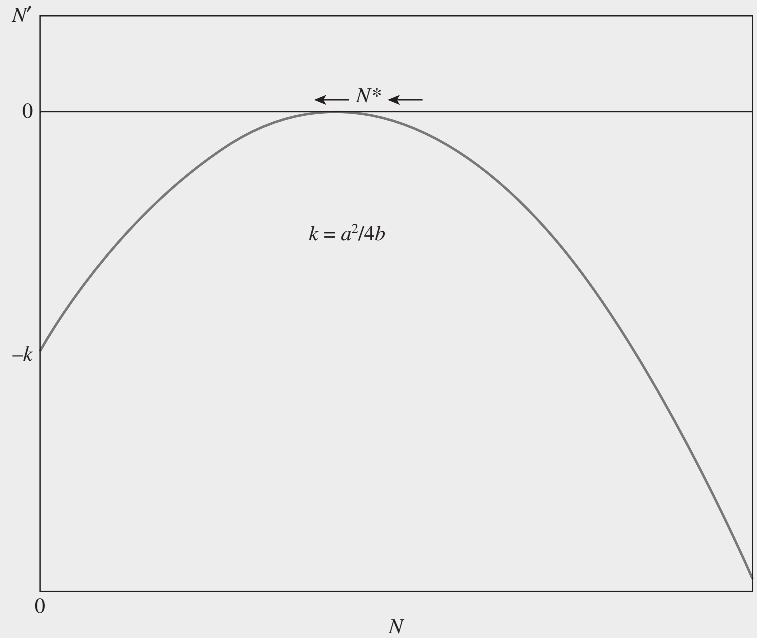
Observe que si la población inicial $N_0 < N_1$, entonces la población finalmente aumentará a N_2 y se estabilizará ahí. Pero si $N_0 < N_1$, entonces la extinción es inevitable.

b) Cuando $k = a^2/4b$, las raíces de la ecuación $N' = 0$ son, por la ecuación 2-40, $N_1 = N_2 = a/2b = N^*$.

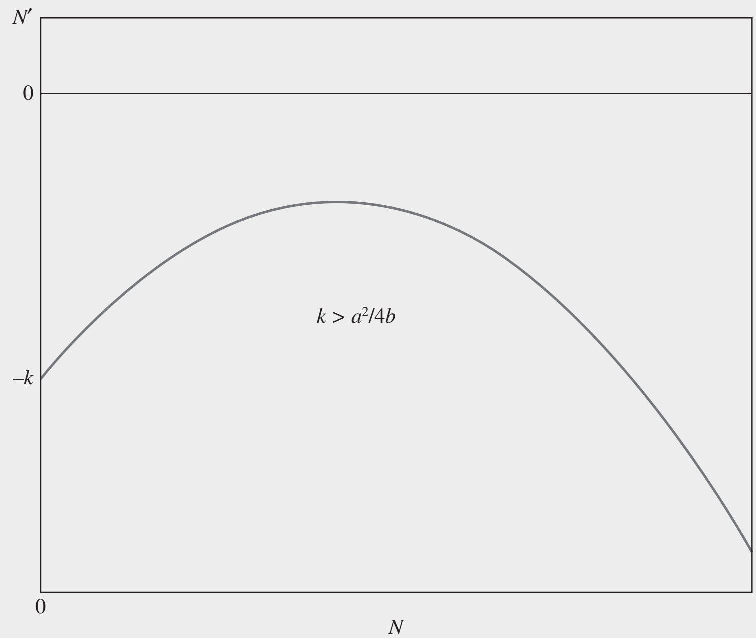


a)

FIGURA 2-29 *a*), *b*), *c*)
Una gráfica de N' contra N para *a*) $k < a^2/4b$, *b*) $k = a^2/4b$ y *c*) $k > a^2/4b$.



b)



c)

FIGURA 2-29 *a*), *b*), *c*) (*continúa*) Una gráfica de N' contra N para *a*) $k < a^2/4b$, *b*) $k = a^2/4b$ y *c*) $k > a^2/4b$.

Por tanto, $k > a^2/4b$ es la única raíz y el único punto de equilibrio en este caso. Sin embargo, éste es un punto de equilibrio semiestable, ya que N' es negativa para todos los valores de N, salvo $N = N^*$, en donde N' es cero. Esto significa que si la población inicial $N_0 > N^*$, entonces la población finalmente disminuirá a N^* y se estabilizará ahí. Pero si $N_0 < N^*$, entonces la población disminuirá hasta la extinción. Esto también se ilustra en la figura 2-29*b*).

c) Cuando $k = a/2b$, mediante la ecuación 2-40 podemos ver que ambas raíces de la ecuación $N' = 0$ son complejas; es decir, no hay raíces reales en este caso. Por tanto, la gráfica de N' en el plano $N' - N$ nunca intersecará el eje N, como se muestra en la figura 2-29*c*). Esto significa que N' nunca puede ser positiva ni cero. Así que no habrá puntos de equilibrio en este caso, y la población disminuirá hasta la extinción sin que importe el valor inicial de la población.

El análisis anterior indica que este sitio de pesca no puede tolerar tasas de pesca $k > a^2/4b$ bajo estas condiciones específicas.

EJEMPLO 2-13 Velocidad de un cohete

El Aerobee es un cohete de dos etapas que se usa para investigación atmosférica. La primera etapa tiene un empuje T de 217 kN y una masa de despegue de $m = 3\,839$ kg. La fuerza de arrastre aerodinámico D depende del cuadrado de la velocidad de esta manera: $D = \rho C_D A v^2/2$, donde ρ es la densidad de la masa atmosférica, A es el área de sección transversal del cohete (la superficie perpendicular al flujo) y C_D es el coeficiente de arrastre. Para el Aerobee, $A = 0.114$ m^2 y $C_D = 0.4$, y para la atmósfera baja, $\rho = 1.204$ kg/m^3. Por tanto, la fuerza de arrastre en newtons es $D = 0.027\, v^2$, donde v está en metros por segundo (m/s).

a) Obtenga la ecuación del movimiento para la velocidad *v*.
b) Determine la velocidad del cohete después de 5 s.

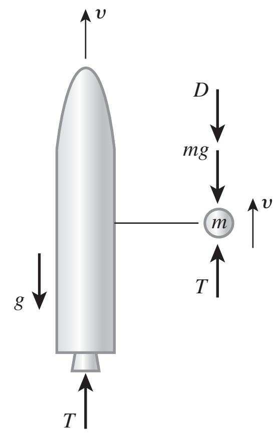


FIGURA 2-30
Cohete en ascenso y su diagrama de cuerpo libre.

Solución *a*) Suponiendo que el cohete se mueve sólo verticalmente, el diagrama de cuerpo libre puede trazarse como se muestra en la figura 2-30.

Por la ley de movimiento de Newton,

$$m\frac{dv}{dt} = T - mg - D = T - mg - \frac{1}{2}\rho C_D A v^2$$

Esto puede expresarse en la forma más simple

$$\frac{dv}{dt} = B - Cv^2 \qquad B = \frac{T}{m} - g \qquad C = \frac{\rho C_D A}{2m}$$

Esta ecuación es separable como

$$\frac{1}{B - Cv^2}\frac{dv}{dt} = 1$$

o

$$\frac{dv}{B - Cv^2} = dt$$

Esto puede integrarse para obtener

$$\frac{1}{\sqrt{BC}}\tanh^{-1}\frac{v}{\sqrt{B/C}} = t + C_1$$

Si $v(0) = 0$, entonces la constante de integración C_1 es cero, y la solución es

$$v(t) = \sqrt{\frac{B}{C}}\tanh\left(\sqrt{BC}t\right)$$

Esta solución supone que la masa del cohete m es constante. Por supuesto, cuando el cohete quema combustible su masa disminuye. De modo que esta solución subestimará la velocidad real y puede usarse para determinar si el cohete puede o no alcanzar alguna velocidad deseada.

b) Sustituyendo los valores para el Aerobee, obtenemos $B = 46.715$, $C = 7 \times 10^{-6}$ y $v(t) = 2\,583 \tanh(0.018t)$. Por tanto, $v(5) = 231$ m/s.

Trayectorias ortogonales y ecuaciones diferenciales

Se dice que dos líneas que se intersecan en ángulo recto son **ortogonales** en el punto de intersección. En geometría usted aprendió que si la pendiente de una curva es m, entonces la pendiente de su curva ortogonal en ese punto es $-1/m$, como se muestra en la figura 2-31. Extendiendo esta definición, se dice que las curvas de una familia de curvas en el plano xy expresadas como $F(x, y) = C$ son **trayectorias ortogonales** de las curvas de otra familia de curvas $G(x, y) = K$ si cada miembro de una familia interseca en ángulo recto a cada miembro de la otra familia. En otras palabras, la pendiente de una curva en cualquier punto (x, y) es el valor recíproco negativo de la pendiente de otra curva que pertenece a la otra familia.

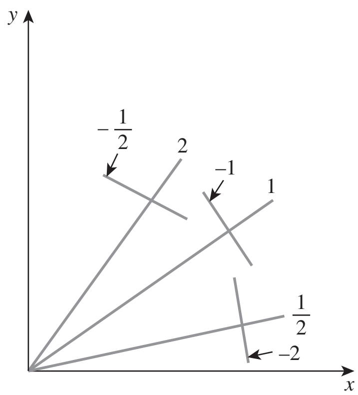


FIGURA 2-31
Las líneas ortogonales intersecan en los ángulos derechos y la pendiente de la línea cuyo punto de intersección es recíprocamente negativa a la pendiente de la otra línea.

Dado que dy/dx o y' representa la pendiente de una curva y usando los subíndices 1 y 2 para indicar ambas familias, tenemos

$$y_1' = -\frac{1}{y'_2} \tag{2-41}$$

Aunque parece que las trayectorias ortogonales son de interés solo en geometría, el problema de encontrar las trayectorias ortogonales de una familia dada de curvas se presenta en muchos problemas físicos importantes. Por ejemplo, las líneas de fuerza eléctricas en un campo eléctrico de dos dimensiones son trayectorias ortogonales de las líneas de potencial constante o isopontencial. Las líneas de flujo de calor en un problema de transferencia de 2D son trayectorias ortogonales de las líneas de temperatura constante o isotermas. Las líneas de corriente en problemas de flujo de fluidos en 2D son trayectorias ortogonales de las líneas de potencial constante.

EJEMPLO 2-14 **Trayectorias ortogonales para una familia de líneas rectas**

Determine las trayectorias ortogonales para una familia de líneas rectas que pasan por el origen.

Solución La formulación matemática de una familia de líneas rectas que pasan por el origen es $y = kx$. Al derivar ambos lados de la ecuación con respecto a x se obtiene $y' = k$. Eliminando la constante k por sustitución $k = y/x$, conseguimos $y' = y/x$. Cualquiera de las dos últimas ecuaciones es la diferencial de las líneas rectas que pasan por el origen. De modo que la pendiente de las líneas en cualquier punto (x, y) es simplemente y/x. El valor recíproco negativo de esta pendiente es $-x/y$, el cual es la pendiente de las trayectorias ortogonales de las líneas de esta familia de líneas que pasan por el origen. Por tanto, la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es $y' = -x/y$ o $yy' = -x$, y ésta es separable. Integrando obtenemos

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

o

$$x^2 + y^2 = C^2 \tag{2-42}$$

donde $C^2 = 2C_1$. Esta ecuación representa una familia de circunferencias concéntricas de radio C cuyo centro está en el origen, como se muestra en la figura 2-32. Así, cualquier línea recta que pase por el origen es ortogonal o perpendicular a cualquier circunferencia cuyo centro esté en el origen.

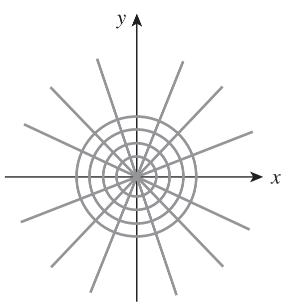


FIGURA 2-32
Las trayectorias ortogonales de una familia de líneas rectas que pasan por el origen son los círculos concéntricos de la familia de circunferencias cuyo centro es el origen.

Transformación de ecuaciones no separables en separables

Una ecuación diferencial no separable a veces puede transformarse en una separable al cambiar la variable. No hay reglas generales sobre cómo seleccionar la nueva variable y no hay garantía de que este método siempre funcionará. El aspecto general de la ecuación diferencial es, a menudo, la única sugerencia que tenemos al usar este método. Si la ecuación incluye combinaciones repetidas de x y y en cierta forma, la combinación es una opción obvia para la primera prueba de otra variable.

Como caso especial, la ecuación diferencial de la forma

$$y' = f(ax + by + c) \tag{2-43}$$

siempre puede transformarse en una forma separable definiendo una nueva variable v como

$$v = ax + by + c \tag{2-44}$$

Entonces $y = \dfrac{(v - ax - c)}{b}$ y

$$y' = \frac{1}{b}(v' - a)$$

Al sustituir y' por $f(v)$ y despejar v' obtenemos $v' = a + bf(v)$ o

$$\frac{v'}{a + bf(v)} = 1 \tag{2-45}$$

la cual es una ecuación separable en las variables v y x (figura 2-33).

Ecuación no separable:

$$y' = \frac{(2x + y - 1)^2}{e^{4x + 2y - 2}} - 2x - y + 1$$

Cambio de variables:

$$v = 2x + y - 1$$

Ecuación separable:

$$v' = 2 + \frac{v^2}{e^{2v}} - v$$

FIGURA 2-33
Una ecuación diferencial que parece no separable puede convertirse en una separable mediante un cambio adecuado de variable.

EJEMPLO 2-15 Transformar una ecuación en una separable

Resuelva la siguiente ecuación diferencial: $y' = (2x + 2y + 3)^2 + 4x + 4y + 6$.

Solución Esta ecuación diferencial no es lineal ni separable, pero puede transformarse en una separable por sustitución $v = 2x + 2y + 3$. Esto da, por la ecuación 2-45,

$$\frac{v'}{2 + 2(v^2 + 2v)} = 1$$

Como $v'dx = dv$, al integrar con respecto a x obtenemos

$$-\frac{1}{2(v + 1)} = x + C$$

o,

$$v = -1 - \frac{1}{2(x + C)}$$

La solución deseada se obtiene volviendo a sustituir como

$$2x + 2y + 3 = -1 - \frac{1}{2(x + C)}$$

o

$$y = -2 - x - \frac{1}{4(x + C)}$$

Ecuaciones diferenciales homogéneas

La clase más conocida de ecuaciones diferenciales que pueden reducirse a la forma separable es la ecuación homogénea. Se dice que una ecuación diferencial de primer orden es **homogénea** si es posible expresarla como

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2-46}$$

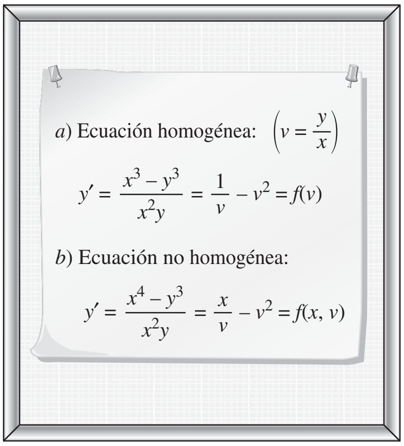


FIGURA 2-34
Una ecuación diferencial de primer orden es homogénea si la transformación $v = y/x$ reduce su lado derecho sólo a una función de v.

Es decir, la función f de una ecuación homogénea puede expresarse como $f(v)$, donde $v = y/x$. Por ejemplo, la ecuación

$$y' = \frac{x^3 - y^3}{x^2 y} \tag{2-47}$$

es homogénea, ya que su lado derecho solo puede expresarse como función de v (figura 2-34). Podemos reacomodar el lado derecho de la ecuación 2-47 como

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 y} = \frac{x^3}{x^2 y} - \frac{y^3}{x^2 y} = \frac{x}{y} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1}{v} - v^2 \tag{2-48}$$

De modo que la ecuación se vuelve

$$y' = \frac{1}{v} - v^2$$

Usted debe notar que el término homogénea se usa aquí con un significado diferente del que tiene en el capítulo 1 respecto a ecuaciones lineales homogéneas. Este uso dual es lamentable y a veces puede causar confusión. Pero usualmente el contexto aclara qué significado se le da.

La homogeneidad de las ecuaciones simples puede determinarse con facilidad mediante la inspección. Pero cuando se trata de ecuaciones complicadas, quizá sea necesario aplicar la siguiente prueba de homogeneidad: en la ecuación diferencial, reemplace todas las x por λx, y todas las y por λy, y simplifique. Si después de la simplificación todas las λ se cancelan y terminamos con la ecuación original, entonces la ecuación diferencial es homogénea; en caso contrario, no lo es. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 y}$$

es homogénea porque la sustitución $x \to \lambda x$ y $y \to \lambda y$ da

$$\frac{d(\lambda y)}{d(\lambda x)} = \frac{(\lambda x)^3 - (\lambda y)^3}{(\lambda x)^2(\lambda y)} \to \frac{\lambda}{\lambda}\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda^3 x^3 - \lambda^3 y^3}{\lambda^3 x^2 y} \to \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 y}$$

que es la ecuación original.

Como regla práctica, una ecuación que incluye potencias de x y y es homogénea si las sumas de las potencias de x y y de cada término en el numerador y el denominador son idénticas en el lado derecho (figura 2-35). En este ejemplo, la suma de las potencias de x y y es igual a 3 para cada término en el numerador y en el denominador.

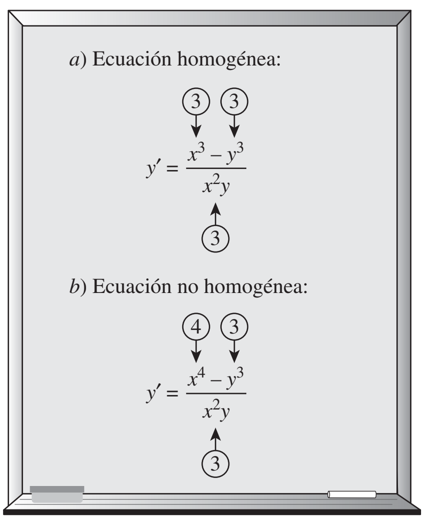


FIGURA 2-35
Para ecuaciones homogéneas, las sumas de las potencias de x y y de cada término en el numerador y el denominador del lado derecho son idénticas.

Para una ecuación de la forma $y' = f(x, y)$, otra forma de expresar la prueba de homogeneidad es requerir que

$$\boxed{f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)} \tag{2-49}$$

Una vez que se determina que una ecuación es homogénea, su reducción a forma separable y su solución son sencillas. Primero definimos una nueva variable $v = y/x$. Entonces $y = xv$, y su derivada con respecto a x es

$$y' = xv' + v \tag{2-50}$$

Sustituyendo en la ecuación 2-46 obtenemos

$$xv' + v = f(v) \tag{2-51}$$

Reacomodando obtenemos

$$\frac{1}{x} = \frac{v'}{f(v) - v} \tag{2-52}$$

la cual es una ecuación separable. Su solución se obtiene mediante integración con respecto a x como

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{v'\,dx}{f(v) - v} + C \tag{2-53}$$

o

$$\boxed{\ln|x| = \int \frac{dv}{f(v) - v} + C} \tag{2-54}$$

ya que $v'\,dx = dv$. Aquí C es la constante de integración. La forma final de la solución se obtiene reemplazando v por y/x tras realizar las integraciones.

Nuevamente observamos que puede no ser posible realizar analíticamente las integrales en la ecuación 2-54. Asimismo, aun cuando la integral pueda evaluarse, tal vez no sea viable una relación explícita para x o y. De lo que estamos seguros es que siempre es posible reducir una ecuación homogénea a una separable. También podríamos usar la transformación $u = x/y$ para reducir una ecuación homogénea a una separable.

A veces son aplicables dos o más métodos de solución a una ecuación diferencial. Aunque todos los métodos darán el mismo resultado, uno puede ser más simple de aplicar que otros.

EJEMPLO 2-16 Ecuación homogénea

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

Solución Por inspección, reconocemos esta ecuación como homogénea porque todos los términos en el numerador y el denominador son de primer grado en el lado derecho (figura 2-36). Por tanto, tomando $v = y/x$ o $y = xv$, esta ecuación puede reacomodarse como

$$(xv)' = \frac{x\left(\frac{y}{x} - 1\right)}{x\left(\frac{y}{x} + 1\right)} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$$

o

$$xv' + v = \frac{v - 1}{v + 1}$$

Separando las variables obtenemos

$$\frac{1}{x} = -\frac{v + 1}{v^2 + 1}v'$$

Integrando con respecto a x,

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|v^2 + 1| - \tan^{-1}v + C$$

o

$$\ln\left|x\sqrt{v^2 + 1}\right| + \tan^{-1}v = C$$

donde C es la constante arbitraria de integración. Volviendo a sustituir $v = y/x$, obtenemos

$$\ln\left|\sqrt{y^2 + x^2}\right| + \tan^{-1}\frac{y}{x} = C$$

Observe que la solución es implícita porque ninguna de las dos variables puede expresarse explícitamente en términos de la otra.

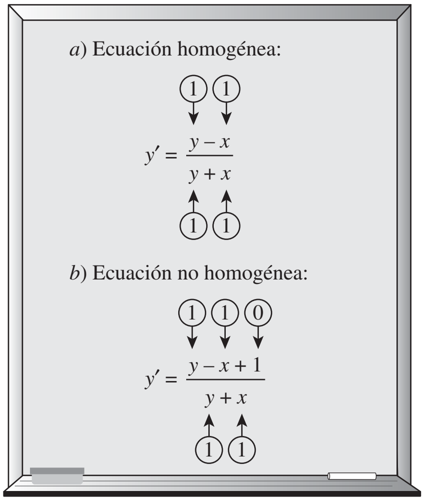


FIGURA 2-36
La ecuación diferencial resuelta en el ejemplo 2-16 es homogénea porque todos los términos en el numerador y el denominador son de primer grado.

Esta ecuación diferencial es un buen ejemplo de por qué usted necesita familiarizarse con los métodos de solución que se presentan en este capítulo, a pesar de tener disponibles herramientas modernas de computadora. Varios programas de procesamiento simbólico fueron incapaces de obtener la solución.

Repaso de la sección

2-17C ¿Cuándo es separable una ecuación diferencial de primer orden y cuándo no lo es?

2-18C ¿Cuál es el procedimiento general para resolver ecuaciones diferenciales separables de primer orden?

2-19C ¿En qué difieren los modelos de crecimiento maltusiano y logístico?

2-20 Resuelva las siguientes ecuaciones mediante la separación de las variables:

a) $yy' = x^3 + 1$ *b*) $(x+2)y' = y^2 + 2$

(*Respuestas: a*) $y(x) = \pm\sqrt{2x^4 + 8x + C}$, *b*) $y(x) = \sqrt{2}\tan[\sqrt{2}\ln(x+2) + C]$).

2-21 Resuelva las siguientes ecuaciones; primero transfiéralas a forma separable y luego sepárelas:

a) $\dfrac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2 - (x + y)$ *Sugerencia:* suponga $u = x + y$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10}{(x+y)e^{x+y}} - 1$ *Sugerencia:* suponga $u = x + y$

(*Respuestas: a*) $y(x) = \dfrac{7}{2\sqrt{7}}\tan\left[\dfrac{7(x+C)}{2\sqrt{7}}\right] - x - \dfrac{1}{2}$

b) $(x + y - 1)e^{x+y} = 10x + C$)).

2-22 Resuelva los siguientes problemas de valor inicial usando el método de separación de variables:

a) $y' + 2xy = 0,\ \ y(0) = 1$ *b*) $y' = e^{2y}\cos 2x,\ \ y(\pi/2) = 0$

$\left(\text{Respuestas: } a)\ |y| = Ce^{-x^2} \quad b)\ y = \ln\dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} 2x}}\right).$

2-6 ▪ ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS DE PRIMER ORDEN

La ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$ también puede expresarse como

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \tag{2-55}$$

Una solución general de esta ecuación incluirá las variables x y y, así como una constante arbitraria C, y es posible expresarla implícitamente como

$$S(x, y) = C \tag{2-56}$$

Al derivar esta ecuación con respecto a x obtenemos

$$\frac{dS(x, y)}{dx} = \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}y' = 0 \tag{2-57}$$

Como la derivación y la integración son procesos inversos, la integral de la ecuación 2-57, la cual es una ecuación diferencial, debe ser la ecuación 2-56. Por tanto, la ecuación 2-57 está en una forma en que puede integrarse directamente para dar $S(x, y) = C$, y se le llama ecuación diferencial exacta.

La comparación de la ecuación 2-55 con la ecuación 2-57 sugiere la siguiente definición.

Definición de una ecuación diferencial exacta

Una ecuación diferencial de primer orden que puede expresarse en la forma

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \tag{2-58}$$

se llama ecuación diferencial exacta en una región D si existe una función $S(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \tag{2-59}$$

y

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \tag{2-60}$$

para todos los (x, y) en esa región.

EJEMPLO 2-17 Ecuación diferencial exacta

Demuestre que la ecuación diferencial $2xy + x^2y' = 0$ es exacta, y resuélvala.

Solución Comparando la ecuación dada con la ecuación 2-58 y dado que el coeficiente de y' es N, tenemos $M = 2xy$ y $N = x^2$. Después de una prueba observamos que $M = 2xy$ es la derivada parcial de la función x^2y con respecto a x, y que $N = x^2$ es la derivada parcial de la misma función con respecto a y. Por tanto, la ecuación diferencial dada es exacta (figura 2-37) y es posible expresarla como

$$\frac{d(x^2y)}{dx} = 0$$

Este resultado puede verificarse fácilmente al realizar la derivada indicada. Así, la ecuación diferencial compacta es equivalente a la ecuación diferencial original, y su solución se obtiene por integración directa como $x^2y = C$, donde C es la constante arbitraria de integración. Para $x \neq 0$, la solución también puede expresarse como $y = C/x^2$. También podríamos resolver esta ecuación diferencial usando otros métodos, como la separación de variables.

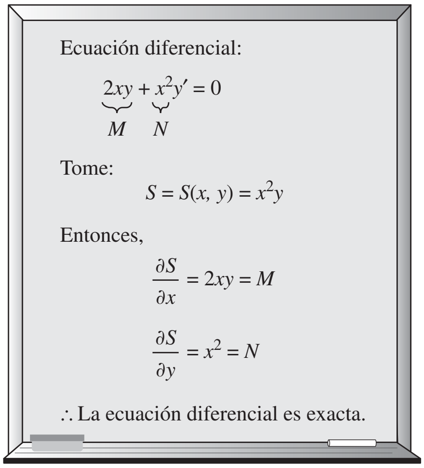


FIGURA 2-37
Demostración de la exactitud de la ecuación diferencial del ejemplo 2-17.

Determinamos la exactitud de la ecuación diferencial en el ejemplo 2-17 por inspección, porque era sencilla. De hecho, simplemente supusimos que la ecuación era exacta, conjeturamos la solución y luego verificamos que ésta era, efectivamente, exacta. Sin duda, ésta es una manera muy complicada de determinar la exactitud de una ecuación dada. Si no fuera exacta, habríamos tenido que ensayar primero todas las funciones concebibles, antes de poder hacer esa afirmación. Obviamente, necesitamos un criterio más sistemático para determinar la exactitud de una ecuación diferencial. Tal criterio se da en el siguiente teorema:

TEOREMA 2-3 Exactitud de las ecuaciones diferenciales

Si las derivadas parciales $\partial M(x, y)/\partial y$ y $\partial N(x, y)/\partial x$ son continuas en una región rectangular D, entonces la ecuación diferencial

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

es exacta en esa región si y solo si

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{2-61}$$

en todo punto de D (figura 2-38).

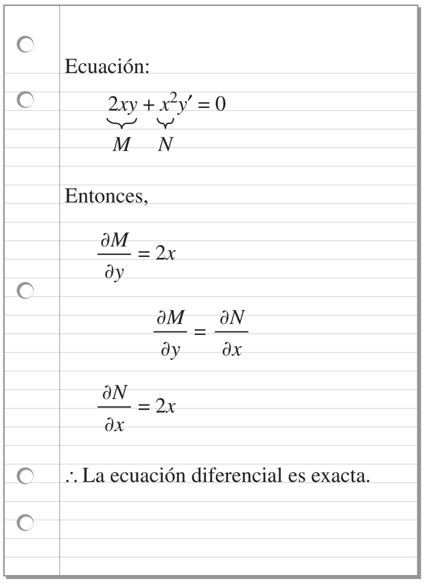


FIGURA 2-38
Uso del teorema 2-3 para verificar la exactitud de una ecuación diferencial dada.

Comprobación Este teorema se comprueba en dos pasos. Primero comprobaremos que, si la ecuación diferencial es exacta, entonces la ecuación 2-61 es verdadera. Recordando que para las ecuaciones diferenciales exactas tenemos $M = \partial S/\partial x,\ N = \partial S/\partial y$, y

$$M(x, y) = \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$N(x, y) = \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial y \partial x}$$

por tanto,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

como se dice que $\partial M/\partial y$ y $\partial N/\partial x$ son continuas y el orden de derivación no importa para dichas funciones. Esto termina con la primera parte de la comprobación.

En seguida comprobaremos que si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, entonces la ecuación diferencial es exacta. En otras palabras, existe una función $S(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \tag{2-62}$$

y

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \tag{2-63}$$

Integrando la ecuación 2-62 con respecto a x y manteniendo constante y, obtenemos

$$S(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) \tag{2-64}$$

donde $g(y)$ es una función arbitraria de y que se debe determinar. Observe que, por generalidad, al realizar integraciones con respecto a una de las variables, es necesario expresar la constante de integración como una función de las variables que se mantienen constantes durante la integración. La validez de este proceso puede verificarse fácilmente tomando la derivada parcial de la ecuación 2-64 con respecto a x y dado que su resultado es la ecuación diferencial original, ya que $dg(y)/dx = 0$.

Derivando parcialmente la ecuación 2-64 con respecto a y y manteniendo constante x obtenemos

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + \frac{dg(y)}{dy} = \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}dx + \frac{dg(y)}{dy}$$

ya que $\partial M/\partial y$ es una función continua y, por tanto, el orden de derivación e integración puede intercambiarse. Asimismo, usamos la derivada ordinaria para la función $g(y)$ porque las derivadas parcial y ordinaria son idénticas para funciones que dependen de una sola variable. Sustituyendo $\partial S(x, y)/\partial y = N(x, y)$ y reacomodando,

$$\frac{dg(y)}{dy} = N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}dx \tag{2-65}$$

El lado izquierdo de esta ecuación solo depende de y; de modo que el lado derecho también debe depender de y (cuando mucho) para que la igualdad sea verdadera aunque su apariencia sugiere otra cosa. Esto se hace demostrando que la derivada del lado derecho con respecto a x es cero.

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0$$

De hecho, éste es el caso porque está dado que $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$. Por tanto, el lado derecho de la ecuación 2-65 solo depende de y, y $g(y)$ se obtiene integrando esta ecuación con respecto a y como

$$g(y) = \int \left[N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx \right] dy \qquad \textbf{(2-66)}$$

Sustituyendo en la ecuación 2-64, podemos obtener

$$S(x, y) = \int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx \right] dy \qquad \textbf{(2-67)}$$

Entonces, la solución resulta

$$S(x, y) = C \qquad \textbf{(2-68)}$$

donde la constante C se determina por la condición inicial. Observe que ignoramos la constante de integración al determinar $g(y)$ en la ecuación 2-66 sin ninguna pérdida de generalidad (si hubiéramos incluido una constante de integración en la ecuación 2-66, la absorberíamos en la constante de integración de la ecuación 2-68). Esto termina la primera parte de la comprobación.

La segunda parte de la prueba es un procedimiento sistemático para obtener $S(x, y)$ y, por tanto, es la descripción de un método de solución para ecuaciones diferenciales exactas. Aunque tanto la ecuación 2-67 como la ecuación 2-68 pueden usarse como fórmula general para la solución, es más instructivo seguir los pasos de la solución descritos en la prueba anterior.

EJEMPLO 2-18 Aplicación de la prueba de exactitud

Compruebe que la ecuación diferencial $2x + 2yy' = 0$ es exacta, y luego resuélvala.

Solución En este caso, tenemos $M = 2x$ y $N = 2y$. Aplicando la prueba de exactitud (ecuación 2-61),

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Entonces, la ecuación diferencial es exacta; asimismo tanto $\partial M/\partial y$ como $\partial N/\partial x$ son continuas en todo el plano xy, y la solución es aplicable a cualquier región. Siguiendo el procedimiento descrito en la prueba del teorema 2-3, la solución se encuentra así: por la ecuación 2-62,

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = M(x, y) = 2x$$

Integrando con respecto a x, tenemos $S(x, y) = x^2 + g(y)$. Diferenciando con respecto a y y manteniendo constante x, tenemos

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = 0 + \frac{dg(y)}{dy}$$

También, $\partial S(x, y)/\partial y = N = 2y$. Por ambas ecuaciones, tenemos

$$\frac{dg(y)}{dy} = 2y$$

y así, $g(y) = y^2$. Sustituyendo en la relación $S(x, y)$, obtenemos $S(x, y) = x^2 + y^2$. De modo que la solución de la ecuación diferencial en forma implícita es $x^2 + y^2 = C$, donde C es una constante arbitraria que la condición inicial determinará. Podríamos, por supuesto, comenzar la solución integrando $\partial S/\partial y = N$ con respecto a y. En este caso, la integración incluiría la función incógnita $h(x)$, que se determinaría de la misma manera que $g(y)$, como se ilustra en la figura 2-39. Este problema también podría resolverse por otros métodos, como el de separación de variables. Todos los procedimientos dan el mismo resultado.

Ecuación diferencial:

$$\underbrace{2x}_{M} + \underbrace{2yy'}_{N} = 0$$

Tome

$$\frac{\partial S}{\partial y} = N = 2y$$

Integre con respecto a y,

$$S = y^2 + h(x)$$

Diferencie con respecto a x,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

También

$$\frac{\partial S}{\partial x} = M = 2x$$

Por tanto,

$$\frac{dh}{dx} = 2x$$

$$h = x^2$$

Sustituyendo,

$$S = x^2 + y^2$$

Entonces la solución es

$$x^2 + y^2 = C$$

FIGURA 2-39
Solución alternativa para el ejemplo 2-18.

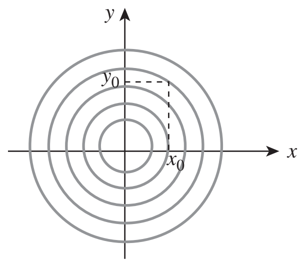


FIGURA 2-40
Curvas de la solución para la ecuación diferencial resuelta en el ejemplo 2-18.

La solución representa círculos de radio $R = \sqrt{C}$, como se muestra en la figura 2-40. Por tanto, una vez que se especifica la condición inicial $y(x_0) = y_0$, también se determina que la solución deseada es un círculo con centro en el origen y que pasa por el punto (x_0, y_0).

EJEMPLO 2-19 **Otra ecuación diferencial exacta**

Resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$y' = -\frac{2e^{2x}\operatorname{sen} y + 2xy}{e^{2x}\cos y + x^2}, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

Solución La ecuación diferencial dada puede reacomodarse como

$$(2e^{2x}\operatorname{sen} y + 2xy) + (e^{2x}\cos y + x^2)y' = 0$$

Esta vez tenemos $M = 2e^{2x}\operatorname{sen} y + 2xy$ y $N = e^{2x}\cos y + x^2$. Esta ecuación diferencial es exacta ya que, por la ecuación 2-61,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2e^{2x}\cos y + 2x = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

La solución de la ecuación diferencial reacomodada es idéntica a la de la ecuación original, salvo en los puntos donde el denominador es cero. La solución de este problema se encuentra así: por la ecuación 2-62, tenemos

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial x} = M(x, y) = 2e^{2x}\operatorname{sen} y + 2xy$$

Integrando obtenemos

$$S(x, y) = e^{2x}\operatorname{sen} y + x^2y + g(y)$$

Diferenciando con respecto a y y manteniendo x constante, tenemos

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = e^{2x}\cos y + x^2 + \frac{dg(y)}{dy}$$

También, $$\frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = N = e^{2x}\cos y + x^2$$

De ambas ecuaciones obtenemos

$$\frac{dg(y)}{dy} = 0$$

y entonces, $g(y) = C_1 = 0$. Sustituyendo en la relación $S(x, y)$ tenemos $S(x, y) = e^{2x}\operatorname{sen} y + x^2y$. De modo que la solución de la ecuación diferencial en forma implícita es $e^{2x}\operatorname{sen} y + 2x^2y = C$, donde C es una constante arbitraria y la condición inicial determina que es

$$e^0 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 0 = C \rightarrow C = 1$$

Sustituyendo, obtenemos $e^{2x}\operatorname{sen} y + x^2y = 1$.

Solución alternativa: método de agrupamiento

El procedimiento de solución descrito en el ejemplo 2-19 es bastante sistemático y aplicable a cualquier ecuación diferencial exacta. Sin embargo, es prolongado y exige considerable cuidado y paciencia. Para quienes tienen poca paciencia y mucha intuición, hay un procedimiento alterno muy atractivo llamado **método de agrupamiento** y se basa en expresar la ecuación diferencial como la suma de las derivadas de los términos. Por ejemplo, la ecuación diferencial del ejemplo 2-19 puede reacomodarse (figura 2-41) bastante arbitrariamente, como

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}\operatorname{sen} y) + \frac{d}{dx}(x^2 y) = \frac{d}{dx}(C)$$

la cual es una forma directamente integrable. De modo que al integrar cada término resulta $e^{2x}\operatorname{sen} y + x^2 y = C$, que es idéntica a la solución obtenida antes.

Ecuación diferencial:

$$(2e^{2x}\operatorname{sen} y + 2xy) + (e^{2x}\cos y + x^2)y' = 0$$

Remodelar:

$$\overbrace{(2e^{2x}\operatorname{sen} y + e^{2x}\cos y\, y')}^{\frac{d}{dx}(e^{2x}\operatorname{sen} y)} + \underbrace{(2xy + x^2 y')}_{\frac{d}{dx}(x^2 y)} = \underbrace{0}_{\frac{d}{dx}(C)}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}\operatorname{sen} y) + \frac{d}{dx}(x^2 y) = \frac{d}{dx}(C)$$

Integrar:

$$e^{2x}\operatorname{sen} y + x^2 y = C$$

la cual es la solución.

FIGURA 2-41
Detalles del método de agrupamiento para el ejemplo 2-19.

Factores de integración

La ecuación diferencial

$$y + 2xy' = 0 \qquad \textbf{(2-69)}$$

no es exacta, ya que $\partial M/\partial y = 1$ y $\partial M/\partial y \neq \partial N/\partial x = 2$. Por tanto, esta ecuación no puede resolverse mediante el procedimiento descrito en la sección anterior.

Ahora, si multiplicamos cada término de esta ecuación por y obtenemos

$$y^2 + 2xyy' = 0 \qquad \textbf{(2-70)}$$

Esta ecuación ahora es exacta porque $\partial M/\partial y = 2y = \partial N/\partial x$ (figura 2-42). Por tanto, es posible resolverla por medio del procedimiento previo.

Las ecuaciones 2-69 y 2-70 son esencialmente equivalentes y tienen las mismas soluciones (salvo en los ceros del factor). Sin embargo, una es exacta y la otra no. Este ejemplo sugiere que una ecuación que es inexacta puede convertirse en exacta multiplicándola por un factor adecuado. De existir, tales factores se llaman **factores de integración** y se simbolizan como $\mu(x, y)$.

En general, los factores de integración pueden depender tanto de x como de y. No existe un procedimiento general sencillo para su determinación, con la excepción de algunos casos especiales (por ejemplo, las ecuaciones lineales expuestas en la sección 2-2).

a) Ecuación inexacta:

$$y + 2xy' = 0$$

b) Ecuación exacta (después de multiplicar por y):

$$y^2 + 2xyy' = 0$$

FIGURA 2-42
Una ecuación diferencial inexacta puede hacerse exacta multiplicándola por un factor de integración adecuado.

Repaso de la sección

2-23C ¿Cuándo es homogénea una ecuación diferencial de primer orden y cuándo no lo es?

2-24C ¿Cómo se resuelven las ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden?

2-25 Determine si las siguientes ecuaciones son homogéneas:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{x - y}$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 1}{x^2 + y}$

(*Respuestas:* a) homogénea *b*) no homogénea).

2-26 Resuelva los siguientes problemas de valor inicial homogéneos (o reducibles a homogéneos):

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - 1,\ \ y(1) = 0$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 y},\ \ y(1) = 1$

(*Respuestas: a*) $y(x) = -x \ln x$ *b*) $y(x) = \pm\dfrac{\sqrt{2x^4 + 2}}{2x}$).

2-7 ▪ MÉTODOS GRÁFICOS

A menudo es imposible obtener soluciones analíticas de ecuaciones no lineales. En tales casos, es deseable obtener al menos una percepción de cómo se comporta la solución, o determinarla aproximadamente. Un método gráfico es una manera de

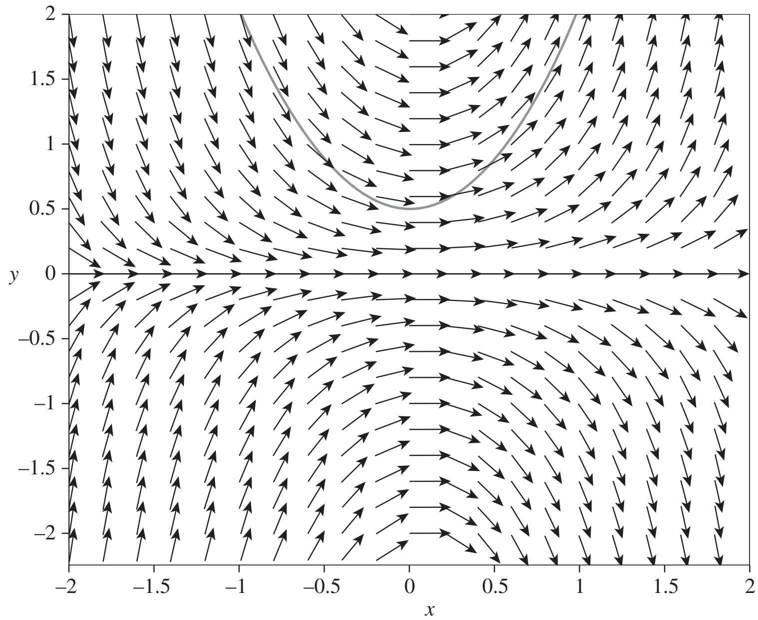


FIGURA 2-43
Gráfica del campo de direcciones de la ecuación diferencial $y' = 2xy$.

lograr estos objetivos y nos permite determinar en forma gráfica la solución aproximada de un problema de valor inicial no lineal.

Ahora examinemos nuevamente la ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$ desde un punto de vista geométrico. Recuerde que y' representa la pendiente de una línea tangente a la función solución y (que todavía es incógnita) en cualquier punto (x, y). Entonces, los valores de la función $f(x, y)$ en cualquier punto (x, y) representan la pendiente de y en ese punto. Por tanto, los valores de y' en cualquier punto del plano xy pueden representarse por segmentos de línea en un número suficiente de puntos en el plano xy. Esta gráfica se llama **campo de direcciones** o **campo de pendientes** de la ecuación diferencial. Por ejemplo, el campo de direcciones de la ecuación $y' = 2xy$ se presenta en la figura 2-43. En este caso, $f(x, y) = 2xy$, y la pendiente del segmento de línea en cualquier punto (x, y) es simplemente $2xy$. Así, en $(1, 3)$ es 6, en $(-2, 4)$ es -16 y en $(-3, -2)$ es 12. La pendiente es cero en cualquier punto de los ejes x o y ($y = 0$ o $x = 0$).

Una vez que el campo de direcciones está disponible, la curva de solución de un problema con la condición inicial $y(x_0) = y_0$ se obtiene marcando el punto (x_0, y_0) y luego trazando una curva que pase por este punto y se mantenga paralela a los segmentos de línea tanto como sea posible, como se muestra en la figura 2-43 para el caso en que $y(0) = 0.52$. Se obtienen curvas de solución más exactas trazando segmentos de línea más cortos a intervalos más pequeños en x.

Las curvas $f(x, y) = C$, donde C es constante, representan curvas de pendiente constante y se llaman **isóclinas**. Los campos de direcciones pueden construirse graficando primero las isóclinas; las de la ecuación $y' = 2xy$ son la familia de curvas $2xy = C$, algunas de las cuales se grafican en la figura 2-44.

EJEMPLO 2-20 Método de solución gráfica

Obtenga la solución del problema de valor inicial $y' = 0.2y + 0.04$, $y(0) = 1$ usando un método gráfico y compare la solución obtenida con la solución exacta.

Solución En este caso, tenemos $f(x, y) = 0.2y + 0.04$ y, por tanto, la ecuación general de las isóclinas es $0.2y + 0.04 = C$ o $y = 5C - 0.2$, que representa líneas

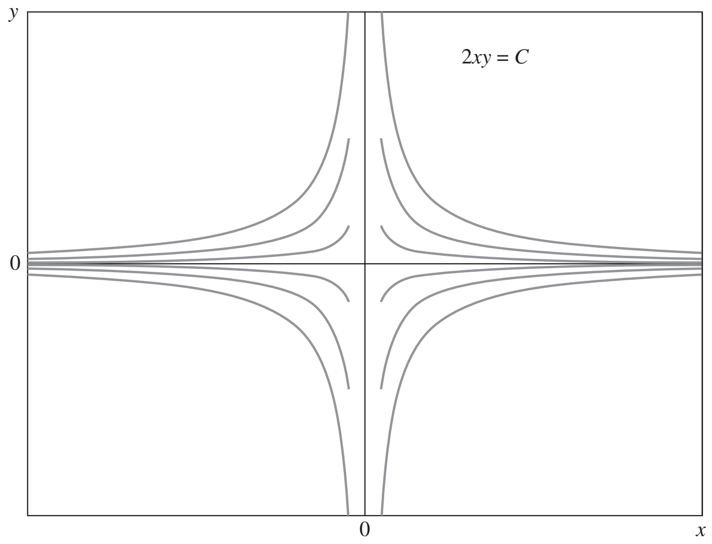


FIGURA 2-44
Algunas isóclinas de la ecuación diferencial $y' = 2xy$ (curvas de $2xy = C$).

rectas horizontales. Así, la pendiente de los segmentos de línea permanece constante en cualquier línea paralela al eje x. Calculando la pendiente en varios puntos y representándolos por segmentos cortos de línea obtenemos el campo de direcciones como se muestra en la figura 2-45. Entonces, la solución gráfica aproximada del problema dado se consigue graficando una curva que permanezca paralela a estos segmentos de línea y pase por el punto $y(0) = 1$ o $(0, 1)$.

Para propósitos de comparación, también podemos resolver exactamente este problema. Ésta es una ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes, y la condición inicial se especifica como $y(0) = 1$. Entonces, la solución de este problema de valor inicial es, por la ecuación 2-17,

$$y = 1.2e^{0.2x} - 0.2$$

Esta solución también se grafica en la figura 2-45. En este caso, una comparación de las curvas de solución exacta y aproximada revela una estrecha coincidencia que puede mejorarse usando una malla más fina en la construcción de los campos de direcciones.

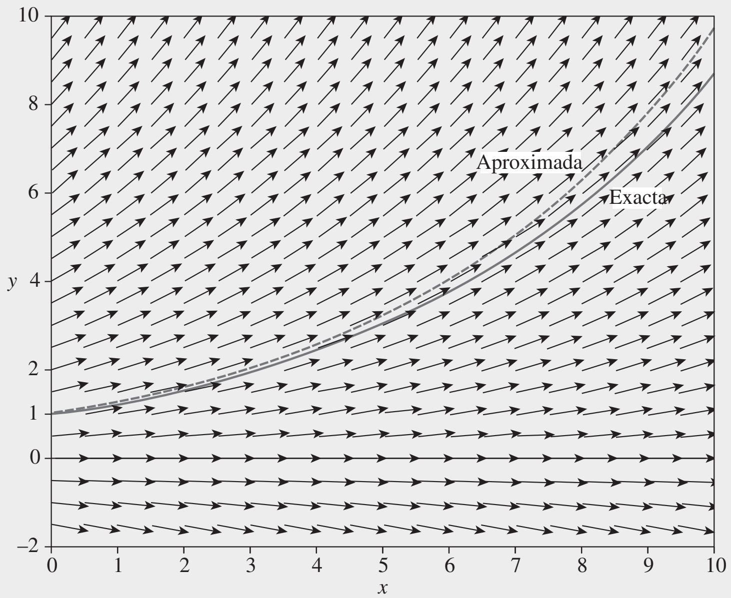


FIGURA 2-45
El campo de direcciones, la solución gráfica (línea punteada) y la solución exacta (línea continua) del problema
$y' = 0.2y + 0.04$, $y(0) = 1$.

Repaso de la sección

2-27C ¿Por qué se usan métodos gráficos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden?

2-28C Defina el campo de direcciones y explique cómo se usa para resolver gráficamente ecuaciones diferenciales de primer orden.

2-29C Defina las isóclinas y explique cómo se usan para resolver gráficamente ecuaciones diferenciales de primer orden.

2-8 ▪ PLANTEAMIENTO SISTEMÁTICO PARA RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

Hasta ahora, hemos considerado diversos métodos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, los cuales son suficientes para resolver muchas ecuaciones que se encuentran en la práctica, pero no hay garantía de que una ecuación dada pueda resolverse mediante ninguno de ellos. A veces uno o más son aplicables; pero en otras ocasiones puede parecer que ninguno de los métodos que se presentan en este capítulo funciona. En cualquier caso, siempre es buena práctica plantear los problemas en forma sistemática.

En esta sección describiremos un planteamiento por pasos para resolver ecuaciones de primer orden de la forma $y' = f(x, y)$ o ecuaciones de órdenes superiores que puedan reducirse a dicha forma después de un cambio de variable. Supondremos que la ecuación diferencial satisface los requisitos para la existencia de una solución en el intervalo que interesa. El planteamiento sugerido incluye hacer las siguientes preguntas hasta que obtengamos una respuesta satisfactoria (figura 2-46):

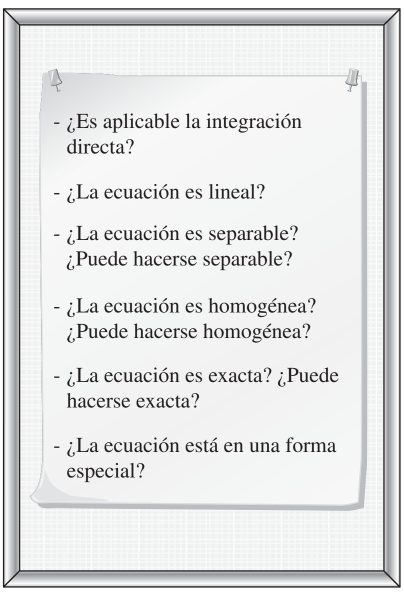


FIGURA 2-46
Planteamiento sistemático para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden.

Paso 1. ¿Puede resolverse la ecuación por integración directa?

Muchas ecuaciones diferenciales que se encuentran en la práctica están en una forma que puede integrarse directamente, y ésta es la forma más interesante de resolver ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones de primer orden de la forma $y' = f(x)$ invariablemente pueden resolverse por integración directa, siempre y cuando sea posible realizar la integración.

Paso 2. ¿La ecuación es lineal?

Una ecuación lineal siempre puede resolverse de manera sencilla, suponiendo que sea posible realizar las integraciones necesarias. Por tanto, una de las primeras acciones al resolver una ecuación diferencial es verificar la linealidad.

Paso 3. ¿La ecuación es separable?

El método más cercano a la integración directa es el de separación de variables. Una ecuación es separable si puede reacomodarse de modo que un lado de la ecuación contenga solo la variable y, mientras que el otro lado contenga solo x. Una vez que las ecuaciones están separadas, la solución se obtiene por integración directa.

Paso 4. ¿La ecuación es homogénea? Si no, ¿puede hacerse homogénea?

Una ecuación que no es separable siempre puede convertirse en separable al definir una nueva variable como $v = y/x$ si la ecuación es homogénea. También es posible convertir algunas ecuaciones no homogéneas en ecuaciones homogéneas si las ecuaciones están en ciertas formas.

Paso 5. ¿La ecuación es exacta? Si no, ¿puede hacerse exacta?

Podemos aplicar la prueba de exactitud a la ecuación dada para determinar si es exacta. Es posible resolver las ecuaciones exactas de manera sencilla. Si la ecuación no es exacta, podemos ver si puede hacerse exacta encontrando un factor de integración.

Paso 6. ¿La ecuación está en una forma especial?

Una ecuación que no pasa ninguna de las pruebas anteriores todavía puede resolverse de manera sistemática si pertenece a una clase de ecuaciones bien conocidas, como las de Bernoulli y Ricati (vea los problemas 2-199 a 2-211).

La forma de una ecuación diferencial también puede sugerir ciertos trucos y transformaciones que nos permitan obtener una solución analítica. Si nada parece funcionar, entonces tendremos que recurrir a métodos gráficos o numéricos de resolución para obtener una solución aproximada.

EJEMPLO 2-21 **Planteamiento sistemático para resolver una ecuación diferencial**

Determine la solución de la ecuación diferencial $y' = e^{x+\ln x-y}$.

Solución Lo primero que hacemos es verificar el orden de la ecuación dada. Es una ecuación de primer orden porque no incluye ninguna derivada de segundo orden o superior. El siguiente paso es ver si puede resolverse por integración directa. Esta posibilidad se descarta rápidamente, ya que su lado derecho incluye una función no lineal (exponencial en este caso) de y. La ecuación no parece ser separable en su forma actual, pero esto puede cambiar si la simplificamos. Dado que $e^{a+b} = e^a e^b$ y $e^{\ln x} = x$, la ecuación dada puede expresarse como

$$y' = e^{x+\ln x-y} = e^x e^{\ln x} e^{-y}$$

o $y' = xe^x e^{-y}$.

Ahora la ecuación está en una forma separable y puede reacomodarse como $e^y y' = xe^x$. Integrando con respecto a x obtenemos $e^y = xe^x - e^x + C$. Dado que $\ln e^y = y$ y tomando el logaritmo de ambos lados llegamos a $y = \ln(xe^x - e^x + C)$, que es la solución deseada.

Si la ecuación no fuese separable, comprobaríamos si es homogénea mediante un cambio de variable. Si tampoco fuera homogénea ni exacta, intentaríamos hacerla exacta encontrando un factor de integración que dependa solo de x o de y. Si esto también fallara y no reconociéramos la ecuación dada como una de las ecuaciones diferenciales especiales, solo nos quedaría la opción de considerar un método gráfico o numérico y conformarnos con una solución aproximada.

2-9 ▪ MÉTODOS DE COMPUTADORA PARA ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

En esta sección mostramos cómo usar los software populares para resolver los tipos de problemas que se presentan en este capítulo. Sus aplicaciones son las siguientes:

1. Obtener soluciones de forma cerrada con:
   a) condiciones iniciales no especificadas,
   b) condiciones iniciales especificadas.
2. Generar gráficas de contorno.
3. Obtener gráficas de campo de direcciones.

Cómo obtener soluciones de forma cerrada

Los programas de procesamiento simbólico usan los procedimientos que se presentan en este capítulo para obtener soluciones de forma cerrada. No son perfectos; algunas veces no logran obtener una solución, aunque sí exista. Otras, llegarán a una solución si usted expresa la ecuación en una forma diferente. Por ejemplo, ayuda evitar fracciones, de modo que es posible que usted pueda obtener una solución de la ecuación $y'(x) = -B(x, y)/A(x, y)$ expresándola en la forma $A(x, y)y'(x) + B(x, y) = 0$.

Problemas con condiciones iniciales no especificadas Considere la ecuación dada en el ejemplo 2-15:

$$y' = (2x + 2y + 3)^2 + 4x + 4y + 6 \tag{2-71}$$

Es posible encontrar una solución de computadora como se muestra en la tabla 2-1. Esta solución es

$$y = -(2 + x) - \frac{1}{4(x + C)} = -\frac{4x^2 + 4(2 + C)x + 1 + 8C}{4(x + C)}$$

donde C es una constante de integración. Observe cómo MuPAD, Maple y Mathematica requieren que usted especifique que y es función de x con la notación `y(x)` o `y[x]`, mientras que MATLAB usa una notación más sencilla: `y`.

Problemas con condiciones iniciales especificadas Es posible obtener una solución para una condición inicial dada. Considere la ecuación dada en el ejemplo 2-2,

$$(x + 1)y' + y = 5x^2(x + 1) \qquad y(2) = 3 \tag{2-72}$$

Puede encontrarse una solución de computadora como se muestra en la tabla 2-2. Esta solución es

$$y = \frac{5x^3(3x + 4)}{12(x + 1)} - \frac{73}{3(x + 1)} = \frac{15x^4 + 20x^3 - 292}{12(x + 1)}$$

TABLA 2-1

Solución de computadora de la ecuación 2-71.

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
dsolve('Dy=(2*x+2*y+3)^2+4*x+4*y+6','x')
```

MuPAD

```
eqn:= ode({y'(x)=(2*x+2*y(x)+3)^2+4*x+4*y(x)+6},y(x))
solve(eqn)
```

Maple

```
ode:= diff(y(x),x) =(2*x+2*y(x)+3)^2 +4*x+4*y(x)+6
dsolve(ode)
```

Mathematica

```
DSolve [y'[x]==(2*x+2*y[x]+3)^2+4*x+4*y[x]+6,y[x],x]
```

TABLA 2-2

Solución de computadora de la ecuación 2-72.

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
dsolve('(1+x)*Dy+y=5*x^2*(x+1)','y(2)=3','x')
```

MuPAD

```
eqn := ode({(x+1)*y'(x)+y(x)=5*x^2*(x+1),y(2)=3},y(x))
solve(eqn)
```

Maple

```
ode := (1+x)*diff(y(x),x)+y(x)= 5*x^2x(x+1)
ic: = y(2)=3
dsolve ({ode, ic})
```

Mathematica

```
DSolve[{(x+1)*y'[x]+ y[x] == 5*x^2*(x+1), y[2] == 3},y
```

Observe las diferentes formas en que se especifican las condiciones iniciales en diversos softwares; en algunos, las condiciones iniciales se especifican junto con la ecuación.

Cómo generar gráficas de contorno

Las gráficas de contorno representan las curvas de solución de una ecuación diferencial. Estas gráficas pueden generarse con un software. Considere la ecuación que se trata en el ejemplo 2-19.

$$(e^{2x}\cos y + x^2)y'(x) + 2e^{2x}\operatorname{sen} y + 2xy = 0$$

La solución que se encontró fue

$$e^{2x}\operatorname{sen} y + x^2 y = C \tag{2-73}$$

donde C es la constante de integración. En la tabla 2-3 se muestra cómo obtener las curvas de solución para $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$, y diferentes valores de C, mientras que en la figura 2-47 muestra una gráfica generada por MATLAB.

TABLA 2-3

Gráfica de contorno de la ecuación 2-73 generada por computadora.

MATLAB

```
% f is the solution for the integration constant C.
% Note: you must use array operations.
f = @(x,y)exp(2*x).*sin(y)+ x.^2.*y;
[X,Y] = meshgrid(0:0.1:3,0:0.1:3);
% Plot for C = 2 to 100 in steps of 10.
C = 2:10:100;
contour (X,Y,f(X,Y),L)
```

MuPAD

```
plot(plot::Implicit2d(exp(2*x)*sin(y)+x^2*y,x = 0..3,
 y = 0..3, Contours = [2,20,50,100]))
```

Maple

```
with(plots)
contourplot(exp(2*x)*sin(y)+x^2*y,x=0..3,y=0..3,
 Contours = [20,50,100])
```

Mathematica

```
ContourPlot[Exp[2*x]*Sin[y]+x^2*y,{x,0,3},{y,0,3},
 Contours->{20,50,100}]
```

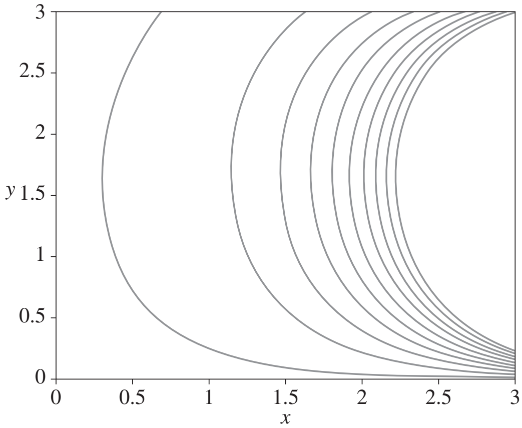


FIGURA 2-47
Gráfica de contorno de la ecuación 2-73.

Cómo obtener gráficas de campo de direcciones

Como vimos en la sección 2-7, a veces es imposible obtener una solución de forma cerrada de una ecuación diferencial, y en tales casos, a veces es posible obtener una percepción del comportamiento de la solución examinando una gráfica del campo de direcciones. La gráfica también es útil incluso para ecuaciones cuya solución se conoce porque muestra el comportamiento general de la solución para condiciones iniciales arbitrarias.

Considere la ecuación $y' = -xy$. En la tabla 2-4 se muestra cómo obtener la gráfica de campo de direcciones con los diversos programas. La gráfica de la figura 2-48 se creó con MATLAB. Las flechas muestran la dirección en que la solución y se mueve si cambia x. Por ejemplo, en el punto $x = 1$, $y = 1$, la pendiente es $y' = -(1)(1) = -1$, de modo que si x aumenta, y disminuirá.

TABLA 2-4

Gráfica del campo de direcciones de la ecuación $y' = -xy$ generada por computadora.

MATLAB

```
[X,Y]= meshgrid(-2:0.2:2,-2:0.2:2);
S=-X.*Y;
L=sqrt(1+S.^2);% L is used to scale the arrow lengths.
quiver(X,Y,1./L,S./L),axis tight, xlabel('x'),ylabel('y')
```

MuPAD

```
field:= plot::VectorField2d([1,–x*y],x = –2..2,y = –2..2,
 Mesh=[25,25]):
```

Maple

```
with(DEtools)
dfieldplot(y'(x)=–x*y(x),y(x),x = –2..2,y = –2..2,
 axes = boxed)
```

Mathematica

```
StreamPlot[{1,-x*y},{x,-2,2},{y,-2,2}]
```

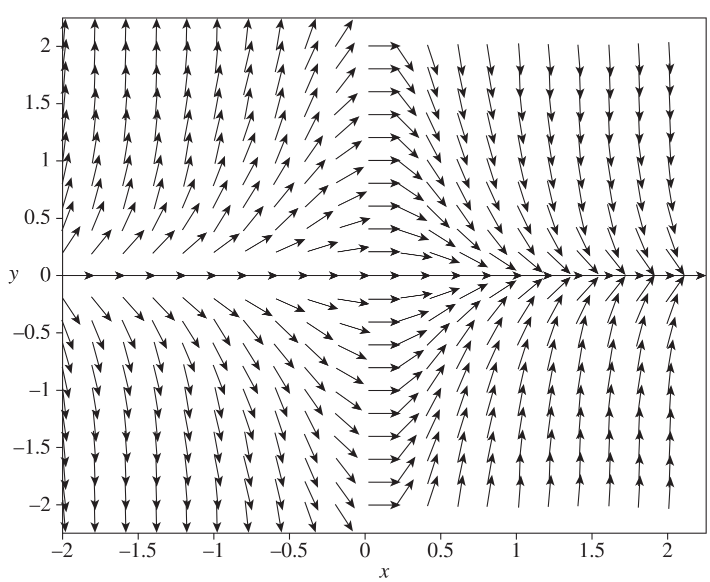


FIGURA 2-48
Gráfica del campo de direcciones de la ecuación $y' = -xy$.

2-10 ▪ RESUMEN

Una ecuación diferencial de primer orden solo incluye derivadas de primer orden y puede expresarse como $y' = f(x, y)$. La solución general de una ecuación diferencial de primer orden incluye una constante arbitraria C. La solución de un problema de valor inicial se obtiene determinando C mediante la condición inicial expresada como $y = y_0$ en $x = x_0$ o

$$y(x_0) = y_0 \tag{2-4}$$

Linealidad. Se dice que una ecuación diferencial de primer orden es lineal si lo es en y. Una ecuación lineal no incluye ninguna potencia, producto ni otra función no lineal de y ni de y', y puede expresarse como

$$y' + P(x)y = R(x) \tag{2-7}$$

donde P y R son funciones estrictamente de x que son continuas en el intervalo de interés. Si una ecuación no puede expresarse en esta forma, entonces la solución no es lineal.

Factor de integración. Una ecuación diferencial lineal de primer orden siempre puede resolverse de forma sencilla mediante el uso de un factor de integración definido como

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \tag{2-10}$$

Entonces, la solución general de una ecuación lineal de primer orden puede expresarse como

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)R(x)\,dx + C\right] \tag{2-12}$$

donde la constante arbitraria C se determina a partir de la condición inicial.

Caso de coeficiente constante. Muchos problemas de interés práctico dan como resultado ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes y lado derecho, y pueden expresarse como

$$y' + by = c \tag{2-15}$$

La solución de esta ecuación diferencial con la condición inicial $y(0) = y_0$ es

$$y = \frac{c}{b}(1 - e^{-bx}) + y_0 e^{-bx} \tag{2-17}$$

Para el caso especial de $c = 0$, se convierte en

$$y = y_0 e^{-bx} \tag{2-18}$$

Condición de unicidad. El teorema 2-1 afirma que, si las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en un intervalo abierto I que contenga el punto x_0, entonces el problema de valor inicial lineal de primer orden

$$y' + P(x)y = R(x),\ y(x_0) = y_0$$

tiene una solución única en I, dada por

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)R(x)\,dx + C\right]$$

donde $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ es el factor de integración.

El teorema 2-2 establece que si $f(x, y)$ es una función continua en algún rectángulo D que contenga el punto (x_0, y_0), entonces la ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$ tiene al menos una solución en un subintervalo de D que contenga el punto (x_0, y_0). Además, la solución es única si $\partial f/\partial y$ también es continua en D.

Ecuaciones separables. Se dice que la ecuación diferencial de primer orden $y' = h(x, y)$ es separable si su lado derecho puede expresarse como la relación de una función de x y una función de y que resulte en $y' = f(x)/g(x)$. Entonces, una ecuación separable puede formularse como

$$g(y)y' = f(x) \tag{2-36}$$

Su solución se obtiene por integración directa

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + C \tag{2-37}$$

ya que $y'dx = dy$.

Caso de ecuaciones homogéneas separables. La clase más conocida de ecuaciones diferenciales que puede reducirse a una forma separable es la homogénea. Se dice que una ecuación diferencial de primer orden es homogénea si es posible expresarla como

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2-46}$$

Como regla práctica, una ecuación es homogénea si las sumas de las potencias de x y y de cada término en el numerador y en el denominador son idénticas en el lado derecho. O, podemos aplicar la prueba de homogeneidad: reemplazar en la ecuación diferencial todas las x por λx, y todas las y por λy, y simplificar. Si, después de la simplificación, todas las λ se cancelan y tenemos la ecuación original, entonces la ecuación diferencial es homogénea. De lo contrario, no lo es.

Ecuación diferencial exacta. Una ecuación diferencial de primer orden que puede expresarse en la forma $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, se llama *ecuación diferencial exacta en una región D* si existe una función $S(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

para toda (x, y) en esa región. El teorema 2-3 sostiene que si las derivadas parciales $\partial M(x, y)/\partial y$ y $\partial N(x, y)/\partial x$ son continuas en una región rectangular D, entonces $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ es una ecuación diferencial exacta en esa región si y solo si

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

en todo punto de D.

Perspectiva histórica

Todos los métodos simbólicos que se presentan en este capítulo se desarrollaron hace mucho tiempo porque la gente no tenía otra manera de resolver las ecuaciones diferenciales. Entonces se conocían algunos métodos numéricos, pero su uso era muy tedioso antes de la llegada de la computadora. De hecho, los programas actuales de procesamiento simbólico usan un conjunto de reglas basadas en los métodos de este capítulo y los siguientes.

Éstos son los famosos personajes mencionados en este capítulo:

Jakob Bernoulli (1654-1705). Matemático suizo. Analizó por primera vez la ecuación diferencial que lleva su nombre. También desarrolló el método de separación de variables. Otros miembros de la familia Bernoulli también fueron prominentes matemáticos (vea los problemas 2-199 a 2-205).

Jacopo Francesco Riccati (1676-1754). Matemático italiano. Fue el primero en estudiar la ecuación diferencial que lleva su nombre (vea los problemas 2-206 a 2-211).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Matemático alemán. Desarrolló el cálculo infinitesimal independientemente de Newton; su notación se adoptó extensamente. También desarrolló diversas calculadoras mecánicas y refinó el sistema numérico binario, que es la base de las computadoras.

Thomas Malthus (1766-1834). Economista británico. Escribió *Un ensayo sobre el principio de la población*, en el que desarrolló las teorías de crecimiento y declinación de la población.

Isaac Newton (1643-1727). Físico inglés, matemático y astrónomo, entre otras actividades. Es, quizá, el científico más famoso de todos los tiempos. Desarrolló el cálculo independientemente de Leibniz. Desarrolló los principios básicos de la mecánica clásica, incluyendo la ley de la gravitación y sus leyes del movimiento. Experimentó con la óptica y desarrolló su ley del enfriamiento y el método de Newton para encontrar las raíces de una función.

Evangelista Torricelli (1608-1647). Físico y matemático italiano. Inventó el barómetro y descubrió la ley de Torricelli, que relaciona el caudal de un fluido a través de una abertura con la altura de éste.

Pierre François Verhulst (1804-1849). Matemático belga. Desarrolló y resolvió el modelo de ecuación diferencial logístico de crecimiento poblacional.

PROBLEMAS

2-1 Descripción general de las ecuaciones diferenciales de primer orden

2-30C ¿Puede una ecuación diferencial de primer orden incluir *a*) sen y', *b*) $e^{y'}$ o *c*) y?

2-31C ¿Es posible resolver una ecuación diferencial general de primer orden mediante integración directa? ¿Bajo qué condiciones?

2-32C ¿Es la ecuación diferencial $dy/dx = xy^2$ equivalente a $dx/dy = 1/xy^2$?

2-33C ¿Bajo qué condiciones tiene solución un problema de valor inicial lineal de primer orden con coeficientes constantes? ¿Cuándo es única esta solución?

2-34C ¿Cuántas constantes de integración incluye la solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden?

2-35C ¿Bajó qué condiciones tiene soluciones singulares un problema de valor inicial lineal de primer orden?

Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden son lineales:

2-36 *a*) $y' + 3x^2y = \operatorname{sen} x$ *b*) $2y' + 3x\sqrt{y} = e^x$

2-37 *a*) $y' + e^xy = 2\sqrt{x}$ *b*) $y'y^2 + \cos y = x$

2-38 *a*) $xy'^2 + x^2y = 1$ *b*) $y' - 5x \operatorname{sen} y = 0$

2-39 *a*) $yy' + xy = x$ *b*) $y'^2 - y^2 = x^2$

2-40 *a*) $y' - (y - x)^2 = 0$ *b*) $y' - 3e^{xy} = x^3$

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden mostrando todos los pasos implicados:

2-41 *a*) $2xy' - y = x^2$ *b*) $y' + \frac{1}{x}y = e^x$

2-42 *a*) $y' + 4xy = 2x$ *b*) $y' - 4y = xe^{4x}$

2-43 *a*) $y' + \left(3 - \frac{1}{x}\right)y = x^2 - x$

b) $y' + (\tanh x)y = 2x$

2-44 *a*) $(x^2 - 1)y' + 2xy = 4$ *b*) $x^2y' + 2xy = 1$

2-45 *a*) $y' + \frac{2}{x}y + x^2 = \operatorname{sen} 2x$ *b*) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^{2x}}{x}$

2-46 *a*) $xy' + (1 + x)y = 2$ *b*) $y' + \frac{1}{x}y = e^x$

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial lineales de primer orden mostrando todos los pasos implicados:

2-47 *a*) $y' - 2y = e^x$, $y(1) = 2$ *b*) $(x^2 - 1)y' - xy = 1$, $y(2) = 3$

2-48 *a*) $y' \cos x - y \operatorname{sen} x = 4$, $y(\pi) = 1$ *b*) $xy' + y = (x + 1)^2$, $y(1) = 2$

2-49 *a*) $x^2y' + xy = 4$, $y(1) = 3$ *b*) $y' + \frac{1}{x - 4}y = x^4$, $y(2) = 8$

2-50 *a*) $y' - \frac{2x}{2 - x^2}y = e^x$, $y(2) = 4$ *b*) $xy' + 4y = \cos x$, $y(0) = 1$

2-51 Considerando x como la variable dependiente en vez de y, resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - x}, \qquad y(0) = 1$$

2-52 Considerando x como la variable dependiente en vez de y, resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{e^{-y} + 2x}, \qquad y(0) = 0$$

2-53 Compruebe que si $y_1(x)$ es una solución de la ecuación lineal homogénea de primer orden $y' + P(x)y = 0$, entonces $Cy_1(x)$, donde C es una constante arbitraria, también es una solución de la ecuación.

2-54 Compruebe que si $y_1(x)$ es una solución de la ecuación no lineal homogénea de primer orden $y' + P(x)y^2 = 0$, entonces $Cy_1(x)$, donde C es una constante arbitraria, no es una solución de esa ecuación.

2-55 Compruebe que si $y_1(x)$ es una solución de la ecuación lineal no homogénea de primer orden $y' + P(x)y = Q(x)$, entonces $Cy_1(x)$, donde C es una constante arbitraria, no es una solución de esa ecuación.

2-3 Aplicaciones de ecuaciones lineales de primer orden

2-56C Obtenga una relación de la distancia que un rayo de luz con coeficiente de absorción a recorre en un medio antes de que se absorba la mitad de él.

2-57C Defina la velocidad terminal de una gota de lluvia. ¿Su velocidad depende de la altura a la cual se forma?

2-58 En un sitio de pesca grande con mucha disponibilidad de alimento se observa que la población de peces se duplica cada año cuando no se pesca ningún pez. Tomando el número inicial de peces en el sitio como N_0 y mediante la ley maltusiana de crecimiento, obtenga una relación para el número de peces como función del tiempo si se pesca continuamente a razón de 0.002 N_0 por día.

2-59 Se observa que la población de cierta colonia de bacterias se duplica cada 3 horas. Suponiendo que la ley maltusiana de crecimiento poblacional es válida, determine cuánto tiempo tardará en cuadruplicarse la población original.

2-60 Considere un país cuya población crece a razón de 0.2% por año. Si esta tasa de crecimiento permanece constante, ¿en cuántos años se duplicará la población de ese país?

2-61 Diga si alguna de las siguientes ecuaciones tiene una constante de tiempo. De ser así, calcúlela:

a) $6\dfrac{dy}{dt} + y^2 = 10$ *b*) $10\dfrac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t$

c) $10\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + 2y = t^2$

2-62 Dada la ecuación

$$6\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

y la condición inicial $y(0) = 10$, sin resolver la ecuación determine cuánto tarda $y(t)$ en llegar aproximadamente a $y = 3.7$. ¿Cuánto tarda en llegar a $y = 0.2$?

2-63 Dada la ecuación

$$15\frac{dy}{dt} + 3y = 24$$

y la condición inicial $y(0) = 10$, determine lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor de estado estacionario de y?
b) Sin resolver la ecuación, determine cuánto tarda $y(t)$ en llegar aproximadamente a $y = 5.04$, y cuánto en llegar a $y = 7.84$.

2-64 La vida media del radio 226 es cercana a 1 600 años. Determine la constante de desintegración de dicho elemento y la fracción que se desintegra en 100 años.

2-65 Una pequeña bola de cobre que está inicialmente a una temperatura $T_1 = 30$ se deja caer en agua helada en $t = 0$. Se observa que la temperatura de la bola baja a 20°C en $t = 1$ min. Utilice la ley del enfriamiento de Newton para determinar la temperatura de la bola en $t = 2$ min.

2-66 Una uva de 1 cm de diámetro que está inicialmente a una temperatura uniforme de 20°C se coloca en un refrigerador de modo que $\lambda = hA/mc = 0.003\ s^{-1}$. Determine la temperatura de la uva después de 10 min mediante la ley del enfriamiento de Newton.

2-67 Una placa caliente de aluminio que está inicialmente a una temperatura uniforme de 250°C se enfría exponiéndola a una corriente de aire a 50°C. Los diversos parámetros que participan en el proyecto son tales que $\lambda = hA/mc = 0.001\ s^{-1}$. Usando la ley de enfriamiento de Newton, determine el tiempo necesario para enfriar la placa a 100°C.

2-68 El coeficiente de absorción del agua para la luz verde es cercano a 0.03 m^{-1}. Determine la fracción de luz verde absorbida después de que la luz viaja 30 m en el agua.

2-69 Una luz roja con una longitud de onda de 1.22 μm entra a un estanque de 2 m de profundidad en un ángulo de 45°. El coeficiente de absorción del agua en esta longitud de onda es 0.5 m^{-1}. Determine la fracción de luz que llegará al fondo del estanque.

2-70 Un tanque contiene 200 L de salmuera con 10 kg de sal. Ahora entra agua pura al tanque a razón de 5/L min, y la mezcla bien agitada sale de éste a la misma velocidad. Determine la cantidad de la sal en el tanque después de 30 min. ¿Cuánto tardará la cantidad de sal en el tanque para ser 1 kg?

2-71 Repita el problema 2-70 suponiendo que la válvula de salida está cerrada.

2-72 Un cuerpo de masa $m = 5$ kg se deja caer desde la cúspide de un edificio de 50 m de altura. Golpea el suelo sólido con una colisión perfectamente elástica que invierte la dirección de su movimiento, pero no cambia la magnitud de la velocidad al ocurrir el golpe. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del cuerpo, con una constante de proporcionalidad $k = 2$ N · s/m y considerando $g = 9.75$ m/s^2, determine a qué altura rebotará el cuerpo después de golpear el suelo.

2-73 Un cuerpo esférico de masa m, cuya densidad es ρ_b, se suelta desde el reposo al agua y se le permite sumergirse. Mientras la gravedad tira del cuerpo hacia abajo, una fuerza de flotación, que se define por $\rho_w g v$, donde ρ_w es la densidad del agua (kg/m^3), g es la constante de la gravedad (m/s^2) y v es el volumen del cuerpo sumergido en el agua (m^3), está empujando el cuerpo hacia arriba. Suponiendo que la resistencia del agua debida al efecto viscoso es proporcional a la velocidad del cuerpo con una constante de proporcionalidad k, deduzca la ecuación de movimiento del cuerpo en términos de los parámetros dados. También determine la velocidad terminal de inmersión del cuerpo considerando que $t \to \infty$. Finalmente, grafique la velocidad del cuerpo como función del tiempo considerando $m = 15$ kg, $\rho_b = 2\,000$ kg/m^3, $\rho_w = 1\,000$ kg/m^3, $k = 15$ N · s/m, y $g = 9.81$ m/s^2.

2-74 El circuito RL que se muestra en la figura 2-22 tiene los siguientes valores: $R = 10^4\ \Omega$, $L = 0.003$ H y $v_s = 10$ V.

a) Si la corriente es inicialmente cero cuando se aplica el voltaje, determine el valor de estado estacionario de la corriente.
b) Sin resolver la ecuación diferencial, determine aproximadamente cuánto tardará la corriente en alcanzar su valor de estado estacionario.

2-75 Se deposita una cantidad de \$10 000 en una cuenta de ahorro a una tasa de interés de 4% compuesto continuamente. Determine la cantidad de dinero que habrá en la cuenta en 8 años. ¿Cuál sería su respuesta si el dinero se retirara de manera permanente a razón de \$1 por día? Establezca las ecuaciones diferenciales adecuadas en ambos casos y resuélvalas.

2-76 Se deposita una cantidad de \$5 000 en una cuenta de ahorro a una tasa de interés de 10% compuesto continuamente. Al mismo tiempo se retira dinero de la cuenta en forma constante a razón de \$2 por día. Resolviendo la ecuación diferencial rectora, determine cuánto tardará el saldo de la cuenta en llegar a cero.

2-77 Se deposita una cantidad de dinero A en una cuenta de ahorro con interés compuesto continuamente. Determine la tasa de interés si el dinero en la cuenta se duplica al final del quinto año.

2-4 Ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden

Para las ecuaciones diferenciales de primer orden dadas, determine aproximadamente la región del plano xy donde se garantiza la existencia y la unicidad de una solución a través de cualquier punto especificado mediante el teorema de la existencia y la unicidad.

2-78 *a*) $y' = \dfrac{x}{y}$ *b*) $y' = y(1 - x^2)$

2-79 *a*) $y' = xy$ *b*) $y' = \dfrac{xy}{y^2 - 1}$

2-80 *a*) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ *b*) $y' = 1 + xy$

Para los problemas de valor inicial de primer orden dados, determine aproximadamente la región del plano xy donde se garantiza la existencia de una solución. También establezca la región donde la solución es única.

2-81 *a*) $y' = \sqrt{x^2 - y^2}$, $y(0) = 1$ *b*) $y' = \dfrac{x}{y}$, $y(1) = 3$

2-82 *a*) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$, $y(2) = 4$ *b*) $y' = x^2y^3$, $y(0) = 0$

2-83 *a*) $y' = \dfrac{1}{x^3 + y^3}$, $y(0) = 2$ *b*) $y' = \dfrac{2xy}{1 - (x^2 + y^2)}$, $y(1) = 2$

2-5 Ecuaciones separables de primer orden

2-84C Defina la ortogonalidad para dos curvas que se intersecan. También establezca las trayectorias ortogonales.

2-85C ¿Es posible convertir una ecuación no separable en una separable? ¿Cómo?

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden mediante separación de variables:

2-86 *a*) $y' + 2e^{x+y} = 0$ *b*) $y' = \dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } y}$

2-87 *a*) $xy'^2 = 1 - y^2$ *b*) $y' = ay - bxy$

2-88 *a*) $(x^2 - 1)y' = 3y$ *b*) $y' = x^3y^3$

2-89 *a*) $y' = x \text{ sen } x \cos y$ *b*) $yy' = e^{x+y+1}$

2-90 *a*) $y' = e^{-y}(x + e^{-x})$ *b*) $xyy' = \sqrt{1 - y^2}$

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales transformándolas primero en forma separable y luego separando las variables:

2-91 *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2 + (y - x)e^{3(y-x)}}{(y - x)e^{3(y-x)}} = \dfrac{2}{(y - x)e^{3(y-x)}} + 1$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x + 2y - 3}$

2-92 *a*) $\dfrac{dy}{dx} = (x - y)^2$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4e^{y-2x}}{x^2 - 4xy + 4y^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{(x - 2y)^2e^{2x-y}} + \dfrac{1}{2}$

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial de primer orden usando el método de separación de variables:

2-93 *a*) $y' - 4xy^2 = x$, $y(1) = 0$ *b*) $x^2y' = 1 - y^2$, $y(1) = 0$

2-94 *a*) $y' = 2(x - y)^2$, $y(0) = 0$ *b*) $y' = x^2y^3$, $y(-2) = 1$

2-95 *a*) $y' = 3x^2y,\ y(2) = 1$

b) $y' = \dfrac{x}{y}\dfrac{\text{sen } x}{\cos y}, y(\pi/2) = 0$

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden usando dos métodos diferentes:

2-96 *a*) $y' + by = 0$ *b*) $y' = \dfrac{y}{1 - x^2}$

2-97 *a*) $y' = 6x^3y$ *b*) $y' + by = c$

2-98 Un tanque esférico de radio R está inicialmente lleno de agua. Ahora se abre un orificio de radio r en el fondo del tanque y se deja salir el agua. De acuerdo con la ley de Torricelli, el agua sale por la abertura a una velocidad de $V = \sqrt{2gy}$, donde y es la altura del agua sobre el orificio en ese momento, y g es la aceleración de la gravedad. Obtenga una relación para la profundidad del agua como función del tiempo t, y determine cuánto tarda el tanque en vaciarse.

2-99 Repita el problema 2-98 para un tanque cónico invertido si se abre un orificio en el fondo.

2-100 El crecimiento logístico poblacional con un umbral se describe mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = -(a - bN)N$$

Obtenga una solución general de esta ecuación y grafique el crecimiento (o la declinación) poblacional para varios valores iniciales de la población N_0. Determine el valor umbral de N_0, debajo del cual no habrá crecimiento y ciertas especies se extinguirán.

2-101 Un modelo más realista y complejo para el crecimiento poblacional es el que no permite el crecimiento no acotado pero permite la extinción. Tal modelo se describe agregando otro factor a la ecuación diferencial en el problema anterior de modo que la tasa de crecimiento se vuelve negativa cuando N es grande. Se expresa como

$$\frac{dN}{dt} = -(a - bN)(1 - cN)N$$

Obtenga una solución general de esta ecuación diferencial y determine las soluciones de equilibrio.

2-102 En una pesquería grande se observa que la población de peces crece de acuerdo con la ley logística cuando no se pesca. Obtenga una relación del número de individuos en función del tiempo si se pesca continuamente a razón constante f.

2-103 La primera etapa de un cohete de dos etapas tiene un empuje T de 300 kN y una masa en el despegue de $m = 5\,000$ kg. La fuerza de arrastre aerodinámico D para este cohete específico depende del cuadrado de la velocidad como $D = 0.027v^2$, donde v está en m/s.

a) Obtenga la ecuación de movimiento y despeje la velocidad $v(t)$.
b) Determine la velocidad del cohete después de 4s.

2-104 La primera etapa de un cohete de dos etapas tiene un empuje T de 300 kN y una masa en el despegue de $m = 5\,000$ kg. La fuerza de arrastre aerodinámico D depende del cuadrado de la velocidad como $D = \rho C_D A v^2/2$, donde ρ es la densidad de la masa atmosférica, A es el área de sección transversal del cohete (la superficie perpendicular al flujo) y C_D es el coeficiente de arrastre. Para este cohete, $A = 0.2$ m^2, $C_D = 0.5$ y, para la atmósfera baja, $\rho = 1.204$ kg/m^3

a) Obtenga la ecuación de movimiento y despeje la velocidad $v(t)$.
b) Determine la velocidad del cohete después de 3 s.

1-105 Determine las trayectorias ortogonales de la familia de curvas de un parámetro para *a*) $x^2 - y^2 = C$ y *b*) $x^2 + y^2 - 2kx = 0$.

2-106 Determine las trayectorias ortogonales de la familia de curvas de un parámetro para *a*) $y = ky^2$ y *b*) $x^2 + 4xy - y^2 + 1 = C$.

Ecuaciones diferenciales homogéneas separables de primer orden

2-107C ¿Cuáles son los criterios de homogeneidad para ecuaciones diferenciales de primer orden?

2-118C ¿Es siempre posible transformar una ecuación de primer orden homogénea en una separable? ¿Cómo?

Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden son homogéneas:

2-109 *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 - 2xy^2}{x^2 + y}$

2-110 *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 + x^2y}{2xy^2 - y^3}$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - \dfrac{y^3}{x}$

2-111 *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^4 - 3x^2y^2 + y^4}{xy^3 - 4y^4}$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = x^3 - y^3$

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneas (o reductibles a homogéneas):

2-112 *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x + y}$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2y}{x^3 + 3y^3}$

2-113 *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2 - y^2}{x^2}$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 2y}{2x - y}$

2-114 *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 6y^2}{2xy}$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 2xy}{x^2 + y^2}$

2-115 *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2y}{x^3 - y^3}$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x + 3y}{x - 2y}$

2-116 *a*) $xy\dfrac{dy}{dx} = y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}$ *b*) $x\dfrac{dy}{dx} = y - 4xe^{2y/x}$

2-117 *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - 10\sqrt{4x^2 - y^2}}{x}$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y}{x}$

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial de primer orden homogéneos (o reductibles a homogéneos):

2-118 *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2}{2xy},\ y(1) = 0$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y}{x + y},\ y(0) = 0$

2-119 *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x + y},\ y(0) = 1$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy - y^2}{3x^2},\ y(8) = 1$

2-120 *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 2y}{2x - y},\ y(1) = 0$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - \sqrt{x^2 + xy - y^2}}{x},\ y(1) = 0$

Algunas ecuaciones de primer orden no homogéneas pueden convertirse fácilmente a ecuaciones homogéneas cambiando las variables. Una clase de estas ecuaciones es la ***ecuación de fracción lineal*** *que se expresa como*

$$y' = \frac{ax + by + c}{Ax + By + C}$$

Estas ecuaciones no homogéneas pueden convertirse a la siguiente ecuación homogénea:

$$y' = \frac{aX + bY}{AX + BY}$$

definiendo dos nuevas variables como $x = X + x_0$ y $y = Y + y_0$ *donde*

$$x_0 = \frac{Bc - bC}{Ab - aB} \quad \text{y} \quad y_0 = \frac{aC - Ac}{Ab - aB}$$

con $Ab - aB \neq 0$. *Usando esta técnica, resuelva las siguientes ecuaciones:*

2-121 *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x + 3y + 1}{x - 1}$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 2y - 3}{x - y}$

2-122 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x - 4y - 5}{x + 2y}$

2-123 *a)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-4}$ *b)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y-1}{y}$

2-6 Ecuaciones diferenciales exactas de primer orden

2-124C ¿Cuándo es exacta una ecuación diferencial de primer orden y cuándo es inexacta?

2-125C Al integrar la ecuación 2-58, ¿por qué usamos la función arbitraria $g(y)$ en vez de la constante arbitraria C?

2-126C ¿Qué es el método de agrupamiento? ¿Funciona para ecuaciones diferenciales inexactas de primer orden?

Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden son exactas o no:

2-127 *a)* $3x + 1 + (3y - 1)y' = 0$
b) $3y - 1 - (3x + 1)y' = 0$

2-128 *a)* $y^2 - 2x + (2xy - e^y)y' = 0$
b) $y^2 - 2xyy' = 0$

2-129 *a)* $e^y \operatorname{sen} x + 2 - (e^y \cos x)y' = 0$
b) $e^x \operatorname{sen} y - (e^x \cos x)y' = 0$

2-130 *a)* $2x + y + (x - 2y)y' = 0$
b) $x + 2y + (x - 2y)y' = 0$

2-131 *a)* $x^2 + \operatorname{sen} x - (y^2 - \cos y)y' = 0$
b) $x^2 + \operatorname{sen} y - (y^2 - \cos x)y' = 0$

2-132 *a)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y-1}{x+y+1}$ *b)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y-1}{x+y+1}$

2-133 *a)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2xe^y}{x^2e^y+1}$ *b)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xe^x}{x^2e^y+1}$

2-134 *a)* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x \operatorname{sen} 2y + xe^x}{e^{2y} - x^2 \cos 2y}$ *b)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x \operatorname{sen} 2y + xe^x}{x^2 \cos 2y - e^{2y}}$

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial después de comprobar que la ecuación diferencial es exacta:

2-135 $(2x^2 + 1) + (4y^3 - 2y + 1)y' = 0, \quad y(0) = 1$

2-136 $(3x^2 \operatorname{sen} y + xe^x) + (x^3 \cos y - y^2 + 1)y' = 0,$
$y(1) = -2$

2-137 $(2x + 3y - 1) + (3x - 2y + 3)y' = 0,$
$y(0) = 0$

2-138 $(3x^2y + e^x \operatorname{sen} y) + (x^3 + e^x \cos y)y' = 0,$
$y(0) = \pi/2$

2-139 $y' = \dfrac{x^2e^x + 1}{y^2e^y - 1}, \; y(0) = 4$

2-140 $y' = \dfrac{2x - 3y - 1}{3x - 2y + 1}, \; y(-2) = 3$

2-7 Métodos gráficos

Trace el campo de dirección de las ecuaciones diferenciales y grafique una solución que satisfaga las condiciones iniciales especificadas:

2-141 *a)* $y' = x^2 + y^2, \; y(2) = 4$
b) $y' = xy + 2, \; y(1) = 2$

2-142 *a)* $y' = x^2 - y^2, \; y(1) = 1$
b) $y' = xy, \; y(2) = 6$

2-143 *a)* $y' = \sqrt{y}, \; y(3) = 2$ *b)* $y' = \dfrac{x}{y}, \; y(1) = 1$

2-144 *a)* $y' = y, \; y(0) = -1$ *b)* $y' = \dfrac{1}{y}, \; y(2) = 1$

2-145 *a)* $y' = x - y, \; y(2) = 3$
b) $y' = 0.5y^{1/3}, \; y(1) = 0.5$

2-9 Métodos de computadora para ecuaciones de primer orden

Resuelva por computadora las siguientes ecuaciones:

2-146 $(x^2 - 1)y' + 2xy = 4$

2-147 $y' = x \operatorname{sen} x \cos y$

2-148 $y' = \sqrt{x + 2y - 3}$

2-149 $y' = \dfrac{x^2y}{x^3 + 3y^3}$

Resuelva por computadora las siguientes ecuaciones:

2-150 $x^2y' + xy = 4, \; y(0) = 3$

2-151 $y' = 2(x - y)^3, \; y(0) = 0$

2-152 $y' = \dfrac{x^3 - xy^2}{y^3}, \; y(0) = -1$

Use una computadora para graficar el campo de dirección para los siguientes problemas:

2-153 $y' = x^2 - y^2$

2-154 $y' = 0.5y^{1/3}$

2-155 $y' = \sqrt{y}$

Use una computadora para crear la gráfica de contorno para los siguientes problemas. Use cinco contornos con valores igualmente espaciados de C.

2-156 La solución de $4yy' = x$ tiene la forma $4y^2 - x^2 = C$.

2-157 La solución de $4yy' + x = 0$ tiene la forma $4y^2 + x^2 = C$.

2-158 La solución de $yy' = 2$ tiene la forma $y^2 = 4x + C$.

Problemas de repaso

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, que incluyen discontinuidades de salto en las funciones $P(x)$ o $Q(x)$ (sugerencia: si $x = a$ es un punto de discontinuidad, resuelva dos veces la ecuación diferencial para $x < a$ y $x > a$, y luego combine las soluciones):

2-159 $y' - 4y = f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 10, & x \geq 0 \end{cases}$

2-160 $y' + f(x)y = 0$, donde $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$

2-161 $y' + y = f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

2-162 $y' + f(x)y = 1$, donde $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

2-163 Las mediciones de temperatura se basan en la transferencia de calor entre el sensor de un dispositivo de medición (como un termómetro ordinario o la junta de un termopar) y el medio cuya temperatura se va a medir. Una vez que el sensor o termómetro se pone en contacto con el medio, el sensor rápidamente recibe (o pierde, si está más caliente) calor y llega al equilibrio térmico con el medio. En ese momento el medio y el sensor están a la misma temperatura. El tiempo necesario para que se establezca el equilibrio térmico puede variar desde una fracción de segundo hasta varios minutos. Debido a su tamaño reducido y alta conductividad puede suponerse que el sensor está a una temperatura uniforme en todo momento, y la ley de enfriamiento de Newton es aplicable.

Comúnmente se usan termopares para medir la temperatura de corrientes de gases. Las características de la junta de termopar y el flujo de gas son tales que $\lambda = hA/mc = 0.02\text{s}^{-1}$. Inicialmente, la junta de termopar está a una temperatura T_i, y la corriente de gas a T_0. Determine cuánto tardará el termopar para detectar 95% de la diferencia inicial de temperatura entre la junta y el gas.

2-164 Un cuerpo de masa m en la cúspide de una torre de 100 m de alto se arroja verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s. Suponga que la resistencia del aire F_D que actúa sobre el cuerpo es proporcional a la velocidad V, de modo que $F_D = kV$. Tomando $g = 9.75\text{ m/s}^2$ y $k/m = 5$ s, determine: *a*) qué altura alcanzará el cuerpo arriba de la torre, *b*) cuánto tardará el cuerpo en tocar el suelo y *c*) la velocidad del cuerpo cuando toca el suelo.

2-165 Repita el problema 2-164 suponiendo que el cuerpo se arroja hacia arriba a 30° con respecto a la horizontal, en vez de verticalmente.

2-166 Considere un cuerpo de masa m que se deja caer desde el reposo en $t = 0$. El cuerpo cae bajo la influencia de la gravedad, y la resistencia del aire F_D que se opone al movimiento se supone proporcional al cuadrado de la velocidad, de modo que $F_D = kV^2$.

Llame x a la distancia vertical y tome la dirección positiva del eje x hacia abajo, con origen en la posición inicial del cuerpo. Obtenga relaciones para la velocidad y la posición del cuerpo en función del tiempo t.

2-167 Suponiendo que la tasa de cambio del precio P de cierta mercancía es proporcional a la diferencia entre la demanda D y la oferta S en cualquier tiempo t, las ecuaciones diferenciales que describen las fluctuaciones de precio con respecto al tiempo pueden expresarse como

$$\frac{dP}{dt} = k(D - s)$$

donde k es la constante de proporcionalidad cuyo valor depende de la mercancía específica. Resuelva la ecuación diferencial anterior expresando la oferta y la demanda como funciones simplemente lineales del precio en la forma $S = aP - b$ y $D = e - fP$.

2-168 Una reacción química que implica la interacción de dos sustancias A y B para formar un nuevo compuesto X se llama reacción de segundo orden. En tales casos se observa que la velocidad de reacción (o la rapidez con la que se forma el nuevo compuesto) es proporcional al producto de las cantidades remanentes de las dos sustancias originales. Si una molécula de A y una de B se combinan para forma una molécula de X (es decir, la ecuación de la reacción es $A + B \rightarrow X$), entonces la ecuación diferencial que describe esta reacción específica puede expresarse como

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

donde k es una constante positiva, a y b son las concentraciones iniciales de los reactivos A y B, respectivamente, y $x(t)$ es la concentración del nuevo compuesto en cualquier tiempo t. Suponiendo que no hay ninguna cantidad del compuesto X presente al inicio, obtenga una relación para $x(t)$. ¿Qué sucede cuando $t \rightarrow \infty$?

2-169 Repita el problema 2-168, suponiendo que la concentración inicial de la primera sustancia reactiva es el doble de la concentración inicial de la segunda sustancia, de modo que $a = 2b$.

2-170 Compruebe que cualquier ecuación diferencial de primer orden separable es necesariamente exacta.

2-171 Encuentre el valor de la constante a tal que la ecuación diferencial

$$2x + ay - 2 + (3x - 4y - 3)y' = 0$$

sea exacta y luego resuélvala.

2-172 Encuentre el valor de la constante b tal que la ecuación diferencial

$$4x^2 + by + (2x - 3y^2 + 1)y' = 0$$

sea exacta y luego resuélvala.

2-173 Encuentre la función $f(x)$ tal que la ecuación diferencial

$$e^x\text{sen}x + f(x)y^2 - 3 + (2xy - y^2)y' = 0$$

sea exacta y luego resuélvala.

2-174 Compruebe que la ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ tiene un factor de integración que es función de xy si la cantidad h solo depende de xy, donde

$$h = \frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

2-175 Un tanque de 2 m^3 está dividido en dos partes iguales mediante una partición permeable. Inicialmente, cada una contiene una solución de diferentes concentraciones, C_1 y C_2. Compruebe que la concentración en la primera parte está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2C_1}{dt^2} + 2k\frac{dC_1}{dt} = 0$$

donde k es la constante de proporcionalidad y resuelva esta ecuación diferencial reduciéndola a primer orden.

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales usando cualquier método aplicable. También determine la constante de integración cuando se especifica una condición inicial:

2-176 $y' - 2y = y^3, \quad y(0) = 1$

2-177 $(e^x + 1)y' = e^y + 1, \quad y(1) = 0$

2-178 $y' = e^{\ln x - y + 2}$

2-179 $y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2 - 8xy}}{x}$

2-180 $xy' + y = x - 1, \quad y(2) = 3$

2-181 $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}, \quad y(1) = 0$

2-182 $y' = \dfrac{1}{e^y - x}, \quad y(1) = 0$

2-183 $y' = \dfrac{2x^2y^3 - y^5}{x^5}$

2-184 $y'' - 2y' = x + 1$

2-185 $y'' + yy' = 0$

2-186 $4y'y'' = x - 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1/4$

2-187 $y''' + y'' = e^x$

Cualquier ecuación diferencial de orden ***n*** *que contenga solo dos derivadas consecutivas de la función incógnita* ***y*** *pero no a* ***y*** *como tal, puede reducirse a una ecuación diferencial de primer orden mediante la transformación $v = y^{(n-1)}$. Por ejemplo, la transformación $v = y''$ reduce la ecuación diferencial de tercer orden $y''' = f(x, y'')$ a la ecuación de primer orden $v' = f(x, v)$. Asimismo, una ecuación diferencial de segundo orden que no contenga la variable independiente* ***x*** *puede reducirse a una ecuación de primer orden mediante la transformación $v = y''$. Esta transformación reduce la ecuación de segundo orden*

$$y'' = f(y, y')$$

a

$$v\frac{dv}{dy} = f(y, u)$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden en ***v*** *con* ***y*** *como variable independiente. Esta ecuación puede resolverse, suponiendo que tenga solución, mediante cualquiera de los métodos aplicables que se expusieron en este capítulo. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial o valor límite reduciendo primero las ecuaciones diferenciales a primer orden:*

2-188 $y''' = 3y'' - 9x, \quad y(0) = 1, \quad y'(1) = 5,$
$y''(2) = 13$

2-189 $2y'' = \dfrac{y'^2 + 1}{y}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

2-190 $y'' + y^2y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1/3$

2-191 $y'' = x^2 + 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(2) = 2$

2-192 $y'' + 4yy' = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$

2-193 $y''' + \dfrac{1}{x+1}y'' = -2, \quad y(0) = -1,$
$y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0$

2-194 $y'' + y' = e^{3x}, \quad y(1) = -1, \quad y'(0) = 4$

2-195 $y'' + y' + y'^2 = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(1) = 1$

2-196 $y'' + (y' - 1)^2 - y'^2 = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

2-197 $x^2y'' = y', \quad y(0) = 1, \quad y'(1) = 0$

2-198 $y'' + 3y'^2 = y', \quad y(1) = 1, \quad y'(0) = 1$

Las ecuaciones de primer orden de la forma $y' + P(x)y = R(x)y^n$ se llaman ***ecuaciones de Bernoulli*** *por Jakob Bernoulli (1654-1705). Cuando $n = 0$ o $n = 1$, una ecuación de Bernoulli se convierte en ecuación lineal que puede resolverse de forma sencilla. Pero cuando $n \neq 0$ o $n \neq 1$, la ecuación de Bernoulli es no lineal; en general, tales ecuaciones son difíciles de resolver. Sin embargo, como demostró Leibniz en 1696, la transformación $v = y^{(1-n)}$ reduce la ecuación de Bernoulli a una ecuación lineal en* ***v***. *La prueba es sencilla y se deja al estudiante como ejercicio.*

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden usando la transformación. Cuando se especifique una condición inicial, también determine la constante de integración.

2-199 $y' - y = y^4, y(0) = 1$

2-200 $y' + 2y = -4y^3, y(0) = 1$

2-201 $y' - \dfrac{y}{x^2 - 1} = y^2$

2-202 $y' - (a - by)y = 0, y(0) = 100$

2-203 $y' - (a - by^2)y = 0$

2-204 $y' - \dfrac{1}{x}y = y^2, y(1) = 0$

2-205 Muestre que la transformación $v = y^{(1-n)}$ reduce la ecuación de Bernoulli a un ecuación lineal en v.

Las ecuaciones de primer orden de la forma $y' + P(x)y^2 + Q(x)y = R(x)$ se llaman ***ecuaciones de Riccati***, *por el matemático italiano J. F. Riccati (1676-1754). Si y_1 es una solución de esta ecuación, entonces la transformación $y = y_1 + 1/z$, reduce esta ecuación a la siguiente ecuación lineal de primer orden en* ***z***:

$$z' + [2y_1P(x) + Q(x)]z = -P(x)$$

Esto puede comprobarse fácilmente sustituyendo las expresiones ***y*** *y* ***y′*** *en la ecuación original y simplificando. Mediante la solución específica dada y la transformación $y = y_1 + 1/z$, resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden:*

2-206 $y' + y^2 + (2x - 4)y = 4(x - 1), \quad y_1 = -x$

2-207 $y' = 2y + y^2, \quad y_1 = 0$

2-208 $y' = 2(1 - y) - (1 - y)^2, \quad y_1 = 1$

2-209 $y' = 2e^{-2x}y^2 + y - e^{2x}, \quad y_1 = e^{2x}$

2-210 $y' = 3(x - y) - (x - y)^2 + 1, \quad y_1 + x$

2-211 Compruebe que si $y_1(x)$ es una solución, la transformación $y = y_1 + 1/z$ reduce la ecuación de Riccati a una ecuación lineal en z.

CAPÍTULO

3

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Las ecuaciones diferenciales lineales de *primer orden* pueden resolverse de manera sistemática mediante el uso de un factor de integración, como se expuso en el capítulo 2, y no es mucha diferencia si los coeficientes son constantes o variables mientras las integrales puedan realizarse. Pero éste no es el caso de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden o de orden superior, ya que no existe un procedimiento general para resolver tales ecuaciones a menos que los coeficientes sean constantes o cumplan ciertas condiciones. Muchas ecuaciones diferenciales que se presentan en las ciencias y la ingeniería son lineales de segundo orden con coeficientes constantes y, por tanto, es importante que dominemos el procedimiento de resolución para tales ecuaciones. Esto es precisamente lo que nos proponemos hacer en este capítulo.

Aunque la mayoría de las definiciones, los teoremas y los procedimientos que se describen en este capítulo son bastante generales, nos enfocaremos principalmente en las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes, por dos razones: 1) estas ecuaciones son las que los científicos y los ingenieros encuentran con mayor frecuencia en la práctica, y 2) los conceptos nuevos se pueden comprobar y aprender fácilmente en ecuaciones más simples. En el capítulo 4 extenderemos el análisis a ecuaciones lineales de orden superior con coeficientes constantes y, en el capítulo 5, a ecuaciones lineales con coeficientes variables mediante la introducción del método de soluciones con series. Estos tres capítulos proporcionan una cobertura completa de las ecuaciones lineales.

Comenzamos este capítulo repasando las definiciones y teoremas básicos que se relacionan con las ecuaciones diferenciales lineales (tales como ecuaciones lineales y homogéneas, dependencia e independencia lineal, principio de superposición y reducción de orden). Continuamos con la ecuación característica y explicamos el procedimiento de solución para ecuaciones homogéneas lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Posteriormente introducimos los métodos de coeficientes indeterminados y la variación de parámetros para determinar las soluciones particulares correspondientes a términos no homogéneos. Después analizamos la ecuación de Euler, que es una forma especial de ecuación lineal con coeficientes variables, ya que siempre puede transformarse en una ecuación con coeficientes constantes. Finalmente, aplicamos el procedimiento de solución a varias ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes que se presentan con frecuencia en la práctica. Estas aplicaciones incluyen vibraciones mecánicas y oscilaciones en circuitos eléctricos.

OBJETIVOS

Al terminar este capítulo usted deberá ser capaz de:

1. Usar el wronskiano para determinar si dos soluciones son linealmente independientes.
2. Identificar un conjunto fundamental de soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden.
3. Usar el método de reducción de orden para obtener una segunda solución fundamental cuando se conoce una solución.
4. Obtener la solución general de una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.
5. Obtener la solución particular de una ecuación lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes usando el método de coeficientes indeterminados y el método de variación de parámetros.
6. Resolver la ecuación de Euler de segundo orden.
7. Aplicar los resultados del capítulo para analizar aplicaciones en vibraciones mecánicas y oscilaciones en circuitos eléctricos.
8. Usar un software para obtener la solución de forma cerrada de una ecuación de segundo orden.

3-1 ▪ INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Recordará usted del capítulo 1 que una ecuación diferencial es **lineal** si no tiene potencias, productos u otras funciones no lineales de la variable dependiente y ni de sus derivadas. La ecuación diferencial lineal de segundo orden puede escribirse en la forma más general como

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \tag{3-1}$$

donde P, Q y R son funciones dadas, las cuales son constantes o dependen solo de la variable independiente x. Observe que una ecuación lineal no incluye alguna función no lineal de la variable dependiente (tal como y^2, e^y o y^2sen y).

La función $R(x)$ representa todos los términos que no incluyen la variable dependiente y ni alguna de sus derivadas, y se llama **término no homogéneo**. Se dice que una ecuación diferencial lineal es **no homogénea** cuando $R(x) \neq 0$, y es **homogénea** cuando $R(x) = 0$. Así, las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden pueden escribirse en la forma más general como

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{3-2}$$

Ecuación lineal no homogénea:

$$y'' + \frac{x^2}{x-2}y' - 6e^{-x}y = \underbrace{x^3 - 2}_{\substack{\text{Términos} \\ \text{no homogéneos, } R(x)}}$$

Ecuación homogénea relacionada:

$$y'' + \frac{x^2}{x-2}y' - 6e^{-x}y = 0$$

FIGURA 3-1
Una ecuación lineal no homogénea y su ecuación homogénea relacionada.

Al resolver una ecuación lineal no homogénea, a menudo conviene considerar por separado la parte homogénea de la ecuación. Esto se hace simplemente estableciendo $R(x) = 0$. La ecuación resultante se llama **ecuación homogénea relacionada, ecuación homogénea asociada** o **ecuación complementaria** de la ecuación diferencial dada (figura 3-1). Por tanto, la ecuación 3-2 es la ecuación homogénea relacionada de la ecuación 3-1.

Las ecuaciones diferenciales lineales también se clasifican respecto a los coeficientes de la variable dependiente y y sus derivadas. Si estos coeficientes son simplemente constantes, se dice que la ecuación tiene **coeficientes constantes**. Pero si uno o más coeficientes dependen de la variable independiente x, se dice que la ecuación tiene **coeficientes variables**. Por tanto, la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes puede expresarse en la forma más general como

$$y'' + by' + cy = R(x) \tag{3-3}$$

donde b y c son dos constantes reales (como 3, -4.2, $3/5$ o incluso cero). Observe que el término no homogéneo todavía puede ser una función de x. Por ejemplo,

$$y'' - 2y' + 6.8y = x^3 + e^{-2x} - 1 \tag{3-4}$$

es una ecuación lineal de segundo orden con *coeficientes constantes*; mientras que

$$y'' - 2xy' + 6.8y = x^3 + e^{-2x} - 1 \tag{3-5}$$

es una ecuación lineal de segundo orden con *coeficientes variables* (figura 3-2).

a) Con coeficientes constantes:

$$y'' + 6y' - 2y = xe^{-2x}$$

b) Con coeficientes variables:

$$y'' - 6x^2y' - \frac{2}{x-1}y = xe^{-2x}$$

FIGURA 3-2
Una ecuación lineal no homogénea con *a)* coeficientes constantes y *b)* coeficientes variables.

La distinción entre ecuaciones lineales con coeficientes constantes o variables es muy importante porque los procedimientos de solución de ambas clases de ecuaciones lineales son muy diferentes. Sin embargo, los teoremas fundamentales asociados a las ecuaciones lineales que discutiremos a continuación, son aplicables a ambas clases.

En el capítulo 2 mostramos que una ecuación diferencial lineal de primer orden con una condición inicial específica (es decir, un problema de valor inicial lineal de primer orden) tiene una solución única en un intervalo en el que los coeficientes son continuos. Éste también es el caso para los problemas de valor inicial lineales de orden superior, excepto porque ahora necesitamos especificar un número de condiciones iniciales igual al orden de la ecuación diferencial. (Dos condiciones iniciales para una ecuación de segundo orden, tres condiciones iniciales para una ecuación de tercer orden, etc.). La *existencia y unicidad* de la solución de problemas de valor inicial lineales de segundo orden se expresa mediante el siguiente teorema. Es posible encontrar su comprobación en referencias especializadas.

TEOREMA 3-1 Existencia y unicidad

Si las funciones P(x), Q(x) y R(x) son continuas en un intervalo $x_1 < x < x_2$, y x_0 es cualquier punto dentro de este intervalo, entonces la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

tiene, en el mismo intervalo, una solución única (una y solo una) que satisface las dos condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{y} \quad y'(x_0) = y'_0$$

Por tanto, aun cuando no sepamos todavía cómo resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden, al menos sabemos que hay una solución y es única dentro de un intervalo, siempre y cuando los coeficientes sean continuos en dicho intervalo y las dos condiciones iniciales se especifiquen en un punto de ese intervalo. Observe que la ecuación diferencial debe estar en la *forma estándar* (con 1 como coeficiente principal) para que este teorema sea aplicable. Si no es así, debemos dividir cada término entre el coeficiente de y'' para ponerlo en esa forma (figura 3-3). Una vez que el coeficiente de y'' sea 1, entonces el coeficiente de y' es $P(x)$, el coeficiente de y es $Q(x)$, y todos los términos restantes son $R(x)$.

El teorema 3-1 asegura que, una vez encontrada una función que satisfaga tanto la ecuación diferencial como las condiciones iniciales, se acaba la búsqueda de la solución. No hay alguna otra función que satisfaga la ecuación diferencial y las condiciones iniciales, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Dada la ecuación diferencial:

$$2xy'' - 8x^2y = 6$$

Su forma estándar es:

$$y'' - 4xy = \frac{3}{x}$$

1

FIGURA 3-3
Una ecuación diferencial de segundo orden puede escribirse en la forma estándar dividiendo cada término entre el coeficiente de y''.

EJEMPLO 3-1 **Existencia de una solución**

Compruebe que el problema de valor inicial dado tiene una solución única y determine el intervalo de dicha solución:

$$y'' + \frac{3x}{x-1}y' - 5y = \cos x - 2$$
$$y(5) = 3 \quad \text{y} \quad y'(5) = -1$$

Solución Éste es un *problema de valor inicial*, ya que ambas condiciones se especifican al mismo valor de x que es $x_0 = 5$. La ecuación diferencial es de *segundo orden* porque la derivada de orden superior es y'', *lineal* porque no incluye potencias ni funciones no lineales de y ni de sus derivadas, *no homogénea* porque el lado derecho es diferente de cero y los términos de ese lado no incluyen a la variable dependiente y ni a ninguna de sus derivadas, y está en la *forma estándar* porque el coeficiente de y'' es 1. Comparando con la ecuación 3-1, vemos que

$$P(x) = \frac{3x}{x-1}, \quad Q(x) = -5, \quad \text{y} \quad R(x) = \cos x - 2$$

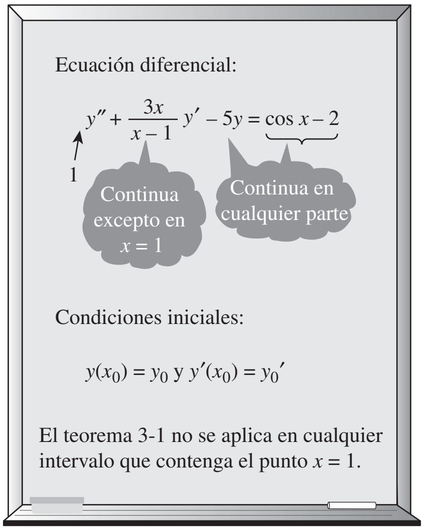


FIGURA 3-4
Un problema de valor inicial tendrá una solución única en cualquier intervalo siempre y cuando la ecuación diferencial no incluya ninguna discontinuidad en ese intervalo.

Las funciones $Q(x)$ y $R(x)$ son continuas, pero la función $P(x)$ es discontinua en $x = 1$. Por tanto, $P(x)$ es continua en cualquier intervalo que no contenga el punto $x = 1$ (figura 3-4). Específicamente, es continua en dos intervalos: $-\infty < x < 1$ y $1 < x < \infty$.

Considerando que las condiciones iniciales se especifican en $x_0 = 5$, que está en el segundo intervalo, el teorema 3-1 garantiza que este problema de valor inicial tiene una solución única en el intervalo $1 < x < \infty$.

EJEMPLO 3-2 Solución cero

Determine la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$y'' + 3xy' - 5y = 0$$
$$y(2) = 0 \quad \text{y} \quad y'(2) = 0$$

Solución Éste es un *problema de valor inicial* porque se especifican ambas condiciones para el mismo valor de x. La ecuación diferencial es *de segundo orden* porque la derivada de orden superior es y'', *lineal* porque no incluye potencias, productos, ni alguna otra función no lineal de y ni de sus derivadas, *homogénea* porque cada término incluye la variable dependiente y o una de sus derivadas, y está en la *forma estándar* porque el coeficiente de y'' es 1. Además, los coeficientes de la ecuación diferencial no incluyen ninguna discontinuidad; por tanto, el intervalo de la solución es $-\infty < x < \infty$.

Observamos que el punto $x_0 = 2$ (o cualquier otro) está en este intervalo. Por tanto, de acuerdo con el teorema 3-1, este problema de valor inicial tiene una y solo una solución, que se determina por inspección como $y = 0$, ya que la función $y = 0$ satisface tanto la ecuación diferencial como las condiciones iniciales.

Ecuación diferencial:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

Condiciones iniciales:

$y(x_0) = 0$ y $y'(x_0) = 0$

Solución:

$y = 0$

FIGURA 3-5
La solución trivial $y = 0$ es la única solución de esta ecuación lineal, homogénea, con coeficientes continuos y condiciones iniciales cero.

Usted quizá se vea tentado a probar algunas otras funciones para saber si el problema de valor inicial del ejemplo 3-2 tiene otra solución, ya que $y = 0$ es, después de todo, una solución trivial. Pero el teorema 3-1 indica que cualquier intento así será un desperdicio de tiempo, porque el problema de valor inicial tiene solo una solución y ya la encontramos: $y = 0$.

Generalizamos este hallazgo de la siguiente manera (figura 3-5): en un intervalo que contenga el punto x_0 y en el que los coeficientes de la ecuación diferencial en la forma estándar sean continuos, la solución trivial $y = 0$ es la única solución de un problema de valor inicial lineal de segundo orden, homogéneo, cuyas condiciones iniciales son $y(x_0) = 0$ y $y'(x_0) = 0$.

Para ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes, $R(x) = 0$ y los coeficientes son naturalmente continuos en $-\infty < x < \infty$. Por tanto, las soluciones de tales ecuaciones son válidas para todas las x. No necesitamos especificar un intervalo en este caso. De manera más general, si los coeficientes y los términos no homogéneos son continuos en todo el eje x, entonces x_0 puede ser cualquier punto, y la solución es válida para todas las x.

Es necesario distinguir entre la *solución de una ecuación diferencial* y una *solución de un problema de valor inicial*. Una ecuación diferencial de segundo orden incluye y''; por tanto, es natural esperar que la solución y incluya dos integraciones y dos constantes arbitrarias C_1 y C_2. Considerando que estas constantes arbitrarias pueden adoptar un número infinito de valores, una ecuación diferencial lineal de segundo orden tendrá un número infinito de soluciones diferentes. Para determinar los valores de dos constantes arbitrarias, C_1 y C_2, necesitamos especificar dos condiciones (tales como el valor de la función y su primera derivada en algún punto o en algunos puntos), y es preciso que la solución satisfaga estas condiciones. Este par de condiciones nos dará dos ecuaciones para determinar C_1 y C_2.

Una posibilidad es especificar ambas condiciones en el mismo punto x_0. En este caso, tendremos un *problema de valor inicial*, el cual garantiza el teorema 3-1 que tendrá una solución única en un intervalo que contenga el punto x_0 bajo las condiciones dadas. Por tanto, entre un número infinito de curvas de solución, una y solo una curva satisfará las dos condiciones iniciales especificadas, dando una solución única al problema de valor inicial. Considerando que las dos condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y'_0$ pueden interpretarse como los valores de la curva de solución y su pendiente en el punto x_0, concluimos que no hay dos curvas de solución que tengan la misma pendiente en su punto de intersección.

No podemos evitar preguntarnos qué sucederá si ambas condiciones se especifican en puntos diferentes, digamos en x_1 y x_2. En este caso, tendremos un *problema de valor en la frontera*, y el teorema 3-1 no asegura que este problema tendrá alguna solución única, ni siquiera que tendrá una solución (figura 3-6). Pero bastará decir que un problema de valor en la frontera tendrá alguna solución única solo cuando las dos condiciones en la frontera permitan obtener valores únicos para las constantes arbitrarias C_1 y C_2.

a) Problema de valor inicial:

$$y'' + 2y' - 3x^2y = x^3e^{-x}$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -5$$

$y(x)$ existe y es única.

b) Problema de valor en la frontera:

$$y'' + 2y' - 3x^2y = x^3e^{-x}$$

$$y(0) = 2, \quad y'(8) = 3$$

$y(x)$ puede no ser única;
tal vez ni siquiera exista.

FIGURA 3-6
Cuando las funciones $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son continuas, el teorema 3-1 garantiza la existencia y la unicidad de la solución de un problema de valor inicial, pero no existe alguna garantía como ésta para un problema de valor límite o valor en la frontera.

EJEMPLO 3-3 Conducción de calor estacionaria a través de una pared plana

Bajo condiciones estacionarias, la distribución de temperatura en la pared plana de espesor L que se muestra en la figura 3-7 está regida por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden $y'' = 0$, donde y representa la temperatura de la pared en la ubicación x. Determine la solución general (la distribución de temperatura en la pared) y la solución específica para los siguientes casos:

a) Condiciones iniciales $y(0) = 10$ y $y'(0) = -5$
b) Condiciones en la frontera $y(0) = 10$ y $y(L) = 0$
c) Condiciones en la frontera $y'(0) = -5$ y $y'(L) = 10$
d) Condiciones en la frontera $y'(0) = -5$ y $y'(L) = -5$

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Las funciones $P(x) = Q(x) = R(x) = 0$ en este caso son continuas en todo el eje x. Por tanto, al menos matemáticamente, la solución no está limitada a algún intervalo finito. Sin embargo, la ecuación diferencial describe la distribución de temperatura en el medio $0 \leq x \leq L$; por tanto, limitaremos la solución solo a este intervalo.

La ecuación diferencial se puede integrar directamente. De esta manera, obtenemos la solución general mediante dos integraciones sucesivas:

$$y' = C_1 \tag{3-6}$$

y

$$y = C_1x + C_2 \tag{3-7}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Observe que la solución general de esta ecuación diferencial de segundo orden incluye dos constantes arbitrarias como se esperaba.

En este caso, la solución general se parece a la fórmula general de una línea recta cuya pendiente es C_1 y cuyo valor en $x = 0$ es C_2. Por tanto, cualquier línea recta es una solución de la ecuación diferencial $y'' = 0$ (figura 3-8). Observe que las líneas de solución pueden intersecarse entre sí. Es decir, diferentes soluciones pueden tener el mismo valor en el mismo punto. Pero nunca pueden tener la misma pendiente en el punto de intersección y seguir siendo soluciones diferentes.

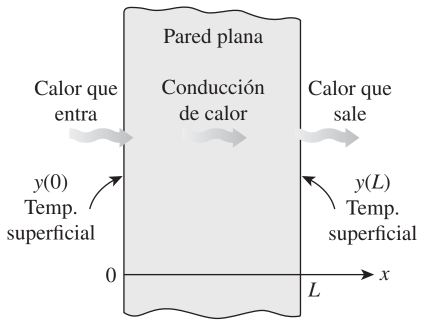


FIGURA 3-7
La pared plana que se discute en el ejemplo 3-3.

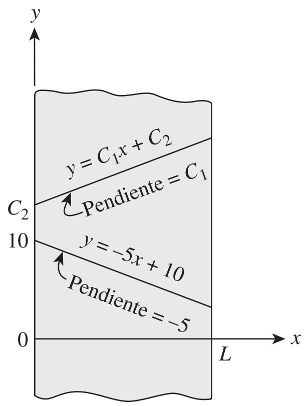


FIGURA 3-8
Cualquier línea recta es una solución de la ecuación diferencial $y'' = 0$, pero solo una de esas líneas satisfará las condiciones iniciales $y(0) = 10$ y $y'(0) = 5$.

a) La solución que satisface las condiciones iniciales especificadas se obtiene aplicando las dos condiciones a la solución general y despejando C_1 y C_2

$$y'(0) = -5 \rightarrow C_1 = -5$$
$$y(0) = 10 \rightarrow 10 = -5.0 + C_2 \rightarrow C_2 = 10$$

Por tanto, $y(x) = -5x + 10$, que es la ecuación de una línea específica. De acuerdo con el teorema 3-1, ninguna otra línea de solución satisfará ambas condiciones iniciales. Por tanto, ésta es la solución única del problema especificado de valor inicial (figura 3-8).

b) La solución que satisface las condiciones en la frontera especificadas se obtiene aplicando las condiciones a la solución general para determinar C_1 y C_2:

$$y(0) = 10 \rightarrow 10 = C_1 \cdot 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 10$$
$$y(L) = 0 \rightarrow 0 = C_1 \cdot L + 10 \rightarrow C_1 = -\frac{10}{L}$$

Por tanto, $y(x) = -(10/L)\,x + 10$, que es nuevamente la ecuación de una línea específica. El problema de valor en la frontera tiene una solución única en este caso. Físicamente, este problema corresponde a la especificación de la temperatura de la pared en ambas superficies.

c) La solución que satisface las condiciones en la frontera especificadas se obtiene aplicándolas a la solución general para determinar C_1 y C_2:

$$y'(0) = -5 \rightarrow C_1 = -5$$
$$y'(L) = 10 \rightarrow C_1 = 10$$

lo cual es imposible, ya que C_1 no puede ser -5 y 10 al mismo tiempo. Por tanto, este problema de valores en la frontera no tiene solución. Físicamente, esto corresponde a suministrar calor a la pared plana desde ambos lados y esperar que la temperatura de la pared permanezca constante (que no cambie con el tiempo), lo cual nunca sucederá.

d) La solución que satisface las condiciones en la frontera especificadas se obtiene aplicándolas a la solución general para determinar C_1 y C_2:

$$y'(0) = -5 \rightarrow C_1 = -5$$
$$y'(L) = -5 \rightarrow C_1 = -5$$

Por tanto, $y(x) = -5x + C_2$, que no es una solución única porque C_2 es arbitraria. La solución representa una familia de líneas rectas cuya pendiente es -5. Físicamente, este problema corresponde al de requerir que el flujo de calor suministrado a la pared en $x = 0$ sea igual al caudal de remoción de calor del otro lado de la pared en $x = L$. Esta información no es suficiente para fijar la distribución de temperatura en la pared. De modo que no sorprende que la solución de este problema de valor en la frontera no sea única.

$$y'' = 0 \rightarrow y = C_1x + C_2$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 10 \\ y'(L) &= 0 \end{aligned}\right\} \; y(x) = \text{única}$$

$$\left.\begin{aligned} y'(0) &= -5 \\ y'(L) &= 10 \end{aligned}\right\} \; y(x) = \text{inexistente}$$

$$\left.\begin{aligned} y'(0) &= -5 \\ y'(L) &= -5 \end{aligned}\right\} \; y(x) = \text{no única}$$

FIGURA 3-9
Un problema de valor en la frontera puede tener una solución única, un número infinito de soluciones o ninguna solución.

En el ejemplo anterior observamos lo siguiente:

1. La solución general de una ecuación diferencial lineal de segundo orden incluye dos constantes arbitrarias.
2. Un problema de valor inicial tiene una solución única cuando la ecuación diferencial es lineal, homogénea y tiene coeficientes continuos.
3. Dependiendo de las condiciones especificadas, un problema de valor en la frontera puede tener una solución única, un número infinito de soluciones o ninguna solución (figura 3-9). Estas conclusiones se reafirman en las siguientes secciones.

Repaso de la sección

Los problemas marcados con una "C" son conceptuales para discusión

3-1C ¿Cómo se identifican los términos homogéneos en una ecuación diferencial?

3-2C ¿Cómo se obtiene la ecuación homogénea relacionada de una ecuación diferencial dada?

3-3C ¿Es posible clasificar una ecuación diferencial como una ecuación con coeficientes constantes aun cuando el término no homogéneo no sea una constante?

3-4C ¿Cuál es la diferencia entre la solución de una ecuación diferencial y la solución de un problema de valor inicial?

3-5C En qué condiciones un problema de valor en la frontera de segundo orden tiene una solución única?

3-6 Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden son: 1) lineales o no lineales, 2) homogéneas o no homogéneas y 3) con coeficientes constantes o variables.

a) $y'' + 3yy' = 6x^2$ *b*) $y'' - 3y = e^{2x}$

c) $x^2y'' + xy' + y = 0$; *d*) $y'' + xy' - 3y = \operatorname{sen} 2x$

(*Respuestas: a*) $y'' + 3yy' = 6x^2$, no lineal, no homogénea, coeficientes constantes; *b*) $y'' - 3y = e^{2x}$, lineal, no homogénea, coeficientes constantes; *c*) $x^2y'' + xy' + y = 0$, lineal, homogénea, coeficientes variables; *d*) $y'' + xy' - 3y = \operatorname{sen} 2x$, lineal, no homogénea, coeficientes variables).

3-7 Determine en qué intervalo se garantiza que los problemas de valor inicial dados tienen una solución única.

a) $y'' + 3y' = \cos x$, $y(\pi) = 0$, y $y'(\pi) = -2$

b) $x^2y'' + 2xy' - y = e^x$, $y(0) = 2$, y $y'(0) = 5$

(*Respuestas: a*) solución única en el intervalo $-\infty < x < +\infty$; *b*) el teorema 3-1 no garantiza nada).

3-8 Al derivar dos veces las siguientes funciones y eliminar las constantes C_1 y C_2, determine la ecuación diferencial de segundo orden que satisface la siguiente familia de funciones:

a) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$ *b*) $y = C_1x + C_2$

(*Respuestas: a*) $y'' - 4y = 0$; *b*) $y'' = 0$).

3-2 ▪ INDEPENDENCIA LINEAL Y EL WRONSKIANO DE FUNCIONES

La expresión $C_1y_1 + C_2y_2$ donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias se llama *combinación lineal* de las funciones y_1 y y_2. Por tanto, la expresión $C_1x + C_2$ es una combinación lineal de las funciones $y_1 = x$ y $y_2 = 1$. En seguida explicamos la dependencia lineal y la independencia lineal de las funciones.

*Se dice que dos funciones son **linealmente dependientes** en un intervalo $x_1 < x < x_2$ si una función es un múltiplo constante de la otra para todos los valores de x en ese intervalo. En caso contrario, se dice que son **linealmente independientes**.*

Funciones:

$y_1 = 3e^x$

$y_2 = 2e^x$

Su razón:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{3e^x}{2e^x} = \frac{3}{2} = \text{constante}$$

(Linealmente dependientes)

FIGURA 3-10
Dos funciones son linealmente dependientes si su razón es una constante.

En otras palabras, dos funciones son linealmente dependientes en un intervalo si su razón es una constante en ese intervalo (figura 3-10). En caso contrario, son lineal-

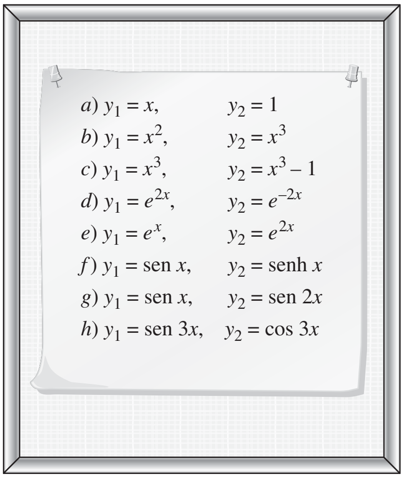


FIGURA 3-11
Ejemplos de pares de funciones linealmente independientes.

mente independientes. Por ejemplo, las funciones $y_1 = x$ y $y_2 = 1$ son linealmente independientes ya que $y_1/y_2 = x/1 = x$, que es una variable. Pero las funciones $5x$ y $-2x$ son linealmente dependientes en cualquier intervalo, ya que $y_1/y_2 = 5x/(-2x) = -2.5$, que es una constante. En la figura 3-11 se presentan algunos pares comunes de funciones que son linealmente independientes en cualquier intervalo. Observe que dos funciones son linealmente dependientes en un intervalo específico I si su razón es una constante para todas las x en ese intervalo.

La independencia lineal también puede expresarse más formalmente como:

Dos funciones y_1 y y_2 son linealmente independientes en un intervalo $x_1 < x < x_2$ si la ecuación

$$C_1y_1 + C_2y_2 = 0$$

se satisface para todas las x en ese intervalo solo cuando $C_1 = C_2 = 0$.

Si es posible satisfacer esta ecuación para todas las x cuando uno de los coeficientes C_1 o C_2 (o ambos) son diferentes de cero, entonces ambas funciones son linealmente dependientes en el intervalo.

EJEMPLO 3-4 **Funciones linealmente independientes**

Determine si los siguientes pares de funciones son linealmente dependientes o independientes para $-\infty < x < +\infty$.

a) $y_1 = 6x$ y $y_2 = 2$
b) $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$
c) $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$
d) $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{2x}$
e) $y_1 = \text{sen } x$ y $y_2 = \cos x$
f) $y_1 = x$ y $y_2 = x + 1$

Solución Todos estos pares de funciones son linealmente independientes, ya que la razón de las dos funciones en cada par depende de x (es decir, no es una constante), como se ilustra aquí:

a) $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{6x}{2} = 3x$

b) $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{1}{x}$

c) $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$

d) $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$

e) $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \tan x$

f) $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{x}{x + 1}$

El wronskiano de dos funciones

La dependencia o la independencia lineal de dos funciones puede determinarse obteniendo su razón. Sin embargo, este enfoque no funcionará cuando necesitemos determinar la independencia lineal de tres o más funciones. Por tanto, necesitamos un procedimiento más sistemático para determinar la independencia lineal de las funciones.

Considere dos funciones diferenciables y_1 y y_2. Por la definición de independencia lineal, ambas funciones son linealmente independientes en un intervalo si la ecuación

$$C_1y_1 + C_2y_2 = 0 \tag{3-8}$$

se satisface para todas las x en ese intervalo si y solo si $C_1 = C_2 = 0$. Ahora derivamos esta ecuación y obtenemos

$$C_1y_1' + C_2y_2' = 0 \tag{3-9}$$

Estas dos ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de las cuales pueden despejarse C_1 y C_2. Para eliminar C_2, multiplicamos la primera ecuación por y_2' y la segunda por y_2 y restamos. Entonces obtenemos

$$C_1(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0 \tag{3-10}$$

Del mismo modo, al multiplicar la primera ecuación por y_1', la segunda por y_1, y restando, obtenemos

$$C_2(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0 \tag{3-11}$$

Observe que el factor $y_1y_2' - y_1'y_2$ es el mismo en ambas ecuaciones. Si este factor no es cero, entonces la única manera de satisfacer ambas ecuaciones es $C_1 = C_2 = 0$, ya que para que un producto sea cero, por lo menos uno de sus factores debe ser cero. Para simplificar el uso con cualquier número de funciones, este factor se representa por W y con frecuencia se expresa como un determinante de la forma:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 \tag{3-12}$$

La función $W(y_1, y_2)$ se llama **wronskiano** de las funciones y_1 y y_2, la cual debe su nombre al matemático polaco J.M. Wronski (1776-1853). Con la ayuda de su wronskiano, la dependencia y la independencia lineales de dos funciones pueden definirse de la siguiente manera (figura 3-12):

Dos funciones son linealmente dependientes en un intervalo si su wronskiano es cero en ese intervalo para todas las x. De no ser así, son linealmente independientes.

Observe que el wronskiano de dos funciones puede ser cero para algunos valores de x y diferente a cero para otros en un intervalo especificado $x_1 < x < x_2$. Para ser linealmente dependientes, el wronskiano de las dos funciones debe ser cero para todas las x en ese intervalo.

El uso del wronskiano es innecesario al determinar la independencia lineal de dos funciones, ya que es mucho más simple calcular la relación de las dos funciones. El valor real del wronskiano se notará cuando expliquemos la independencia lineal de tres o más funciones. El wronskiano también juega un papel importante en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales, como usted verá más adelante en este capítulo.

Si $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

$= y_1 y_2' - y_1' y_2$

$\neq 0$

entonces y_1 y y_2 son linealmente independientes.

FIGURA 3-12
Dos funciones son linealmente independientes si su wronskiano no es idénticamente cero.

EJEMPLO 3-5 Wronskiano de dos funciones

Calcule el wronskiano de los siguientes pares de funciones y determine si son linealmente dependientes o independientes en todo el eje x.

a) $y_1 = x + 1$, y $y_2 = x^2$
b) $y_1 = \operatorname{sen} x$, y $y_2 = \cos x$
c) $y_1 = x^3$, y $y_2 = -2x^3$

Solución El wronskiano de cada par de funciones se determina por la definición de wronskiano, $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$.

a) $W(y_1, y_2) = (x+1)(x^2)' - (x+1)'x^2$
$= (x+1)(2x) - x^2$
$= x(x+2)$

El wronskiano se vuelve cero en los dos puntos $x = 0$ y $x = -2$. Pero, con todo, ambas funciones son linealmente independientes en cualquier intervalo, aun cuando el intervalo contenga los puntos 0 y -2. Esto se debe a que el wronskiano tiene que ser cero para todas las x en un intervalo para que las funciones sean linealmente dependientes en ese intervalo.

b) $W(y_1, y_2) = \operatorname{sen} x(\cos x)' - (\operatorname{sen} x)' \cos x$
$= \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x) - \cos x \cos x$
$= -(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = -1 \neq 0$

Por tanto, estas dos funciones son linealmente independientes.

c) $W(y_1, y_2) = x^3(-2x^3)' - (x^3)'(-2x^3)$
$= x^3(-6x^2) - (3x^2)(-2x^3)$
$= -6x^5 + 6x^5 = 0$

El wronskiano de ambas funciones es cero; por tanto, son linealmente dependientes en cualquier intervalo.

Independencia lineal y el wronskiano de *n* funciones

Con frecuencia, el estudio de las ecuaciones diferenciales de segundo orden y de orden superior exige la determinación de la independencia lineal de tres o más funciones. Por tanto, extendemos esta explicación a un conjunto de n funciones.

Primero definimos la *combinación lineal* de n funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ como

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias. La independencia lineal de n funciones se define así:

> *Las n funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes en un intervalo $x_1 < x < x_2$ si la ecuación*
>
> $$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n = 0$$
>
> *se satisface para todas las x en ese intervalo solo cuando $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$. De no ser así, se dice que estas n funciones son linealmente dependientes en ese intervalo.*

Por tanto, las n funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes si la ecuación anterior puede satisfacerse para todas las x en el intervalo especificado cuando al menos uno de los coeficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ es diferente de cero.

Se deja como ejercicio para el estudiante comprobar que si n funciones son linealmente dependientes, entonces por lo menos una de tales funciones puede expresarse como una combinación lineal de las demás. A la inversa, si es posible expresar una de las funciones en un conjunto de n funciones como una combinación lineal de las demás, entonces dichas funciones son linealmente dependientes en ese intervalo. Para ser más específicos, si dos de las n funciones son linealmente dependientes, entonces estas n funciones también lo son. Por ejemplo, las funciones

x y $5x$ son linealmente dependientes en cualquier intervalo. Entonces, de aquí se desprende que los elementos de cualquier conjunto de n funciones que contenga estas dos funciones también son linealmente dependientes en cualquier intervalo.

En algunas ocasiones, la dependencia lineal de n funciones especificadas puede determinarse por inspección (figura 3-13), pero ésta es una excepción más que la regla. Un procedimiento sistemático para determinar si n funciones dadas son linealmente independientes incluye la evaluación de su wronskiano, como aquí se expresa.

Las n funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, cada una de ellas con, al menos, n-ésimas derivadas en un intervalo $x_1 < x < x_2$ son linealmente independientes en este intervalo si su wronskiano

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdot & \cdot & \cdot & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{3-13}$$

no es cero en ese intervalo.

Observe que el wronskiano de n funciones $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, en general, es una función de x. Por tanto, puede ser cero para algunas x y no serlo para otras en un intervalo específico $x_1 < x < x_2$. Para que sean linealmente dependientes, el wronskiano de las funciones debe ser cero para todas las x. Es decir, el wronskiano debe ser cero (figura 3-14). Los estudiantes pueden ir a la sección 7-5 para repasar determinantes y matrices.

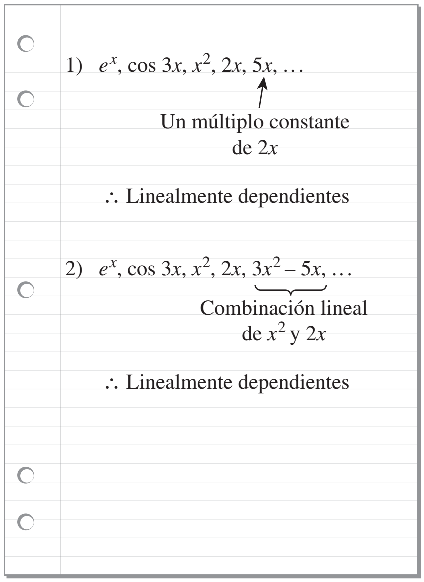


FIGURA 3-13
La dependencia lineal de n funciones a veces puede determinarse por inspección.

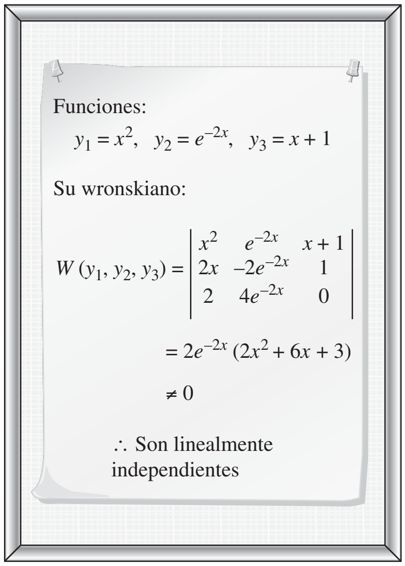


FIGURA 3-14
Tres (o más) funciones son linealmente independientes si su wronskiano no es idénticamente cero.

EJEMPLO 3-6 Funciones linealmente independientes

Determine si las funciones 1, $2x$ y sen x son linealmente dependientes o independientes en todo el eje x, $-\infty < x < +\infty$.

Solución Considerando $y_1 = 1$, $y_2 = 2x$ y $y_3 = \text{sen}\, x$, el wronskiano de estas tres funciones se determina por la ecuación 3-13 formando un determinante de 3×3 y evaluándolo. Esto da

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2x & \text{sen}\, x \\ 0 & 2 & \cos x \\ 0 & 0 & -\text{sen}\, x \end{vmatrix} = -2\,\text{sen}\, x$$

que no es idénticamente cero (es decir, no es cero para toda x). Es cero solo para $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$). Por tanto, estas tres funciones son linealmente independientes.

Repaso de la sección

3-9C ¿Las funciones $y_1 = 0$ y $y_2 = f(x)$ son linealmente dependientes o independientes? Responda a la misma pregunta para las funciones $y_1 = 1$ y $y_2 = f(x)$.

3-10C Considere dos funciones y_1 y y_2 cuyo wronskiano sea cero para algunos valores de x y no lo sea para otros valores de x. ¿Estas dos funciones son linealmente dependientes o independientes?

3-11 Determine si los siguientes pares de funciones y_1 y y_2 son linealmente dependientes o independientes 1) por inspección y 2) determinando su wronskiano.

a) $y_1 = x + 1$ y $y_2 = x^2 - 1$ *b)* $y_1 = \text{sen}(\alpha + \beta)$ y $y_2 = \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta$

(*Respuestas: a*) $W = (x+1)^2 \neq 0$, de modo que las funciones y_1 y y_2 son linealmente independientes; *b*) $W = 0$, por lo que las funciones y_1 y y_2 son linealmente dependientes).

3-12 Establezca si las siguientes funciones son linealmente dependientes o independientes mediante la determinación de su wronskiano:

$$y_1 = x + 1,\ y_2 = x^3, \text{ y } y_3 = x^2 - 1$$

(*Respuesta:* $W = -2x^3 - 6x^2 - 6x \neq 0$, lo cual indica que y_1, y_2 y y_3 son linealmente independientes).

3-3 ▪ TEORÍA DE LAS ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Si $y_1 = x$ y $y_2 = 1$ son dos soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$y'' = 0,$$

también lo son

$y_3 = 2x \quad (= 2y_1)$
$y_4 = 5 \quad (= 5y_2)$
$y_5 = x + 1 \quad (= y_1 + y_2)$
$y_6 = 3x - 4 \quad (= 3y_1 - 4y_2)$

y, en general,

$y = C_1x + C_2$

FIGURA 3-15
Principio de superposición.

Examinemos nuevamente la solución de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, $y'' = 0$ discutida en el ejemplo 3-3. La solución general de esta ecuación se dio como

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

donde $y_1 = x$ y $y_2 = 1$. Es posible verificar por sustitución directa que tanto y_1 como y_2 satisfacen la ecuación diferencial. Un múltiplo constante de cualquiera de las dos soluciones, así como su suma $y_1 + y_2$ también lo hacen. En general, la combinación lineal $C_1y_1 + C_2y_2$ satisface la ecuación diferencial para cualquier valor de las constantes C_1 y C_2 (figura 3-15). No solo eso, sino que la combinación lineal $C_1y_1 + C_2y_2$ contiene todas las soluciones de la ecuación diferencial. Es decir, cualquier solución de la ecuación diferencial $y'' = 0$ puede obtenerse de la solución general asignando valores adecuados a las constantes C_1 y C_2.

La exposición intuitiva anterior conduce al siguiente teorema importante:

TEOREMA 3-2 Principio de superposición

Si y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

entonces la combinación lineal

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, también es una solución de esta ecuación.

Comprobación Este teorema se comprueba derivando dos veces la ecuación

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

y sustituyendo los resultados en la ecuación diferencial:

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2'$$
$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2''$$

Entonces,
$$\begin{aligned} y'' + Py' + Qy &= (C_1y_1'' + C_2y_2'') + P(C_1y_1' + C_2y_2') + Q(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &= C_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + C_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2) \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que y_1 y y_2 son soluciones, satisfacen la ecuación diferencial; lo cual completa la prueba.

El principio de superposición puede expresarse en palabras más sencillas:

Si una función es una solución de una ecuación diferencial lineal homogénea, un múltiplo constante de ella también es una solución. Si dos funciones son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, su suma también es una solución de dicha ecuación diferencial.

Observe que el principio de superposición solamente es aplicable a ecuaciones diferenciales lineales homogéneas. No es aplicable a ecuaciones no lineales ni a ecuaciones no homogéneas aun cuando sean lineales. A continuación se presentan algunos ejemplos que ilustran este concepto.

EJEMPLO 3-7 Principio de superposición (ecuaciones homogéneas)

Verifique que e^{-2x} es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 4y = 0$ y compruebe que $5e^{-2x}$ también es una solución de esta ecuación.

Solución Primero observamos que la ecuación diferencial es lineal y homogénea. Por sustitución directa podemos verificar que e^{-2x} es una solución de la ecuación dada,

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= (e^{-2x})'' - 4e^{-2x} \\ &= 4e^{-2x} - 4e^{-2x} \\ &= 0 \qquad (\textit{coincide}) \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $5e^{-2x}$ en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= (5e^{-2x})'' - 4(5e^{-2x}) \\ &= 20e^{-2x} - 20e^{-2x} \\ &= 0 \qquad (\textit{coincide}) \end{aligned}$$

Por tanto, $5e^{-2x}$ (que es un múltiplo constante de e^{-2x}) también es una solución de la ecuación diferencial dada. Esto era de esperarse, ya que (de acuerdo con el teorema 3-2) un múltiplo constante de una solución de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución (figura 3-16).

La función e^{-2x} es una solución de la ecuación lineal homogénea

$$y'' - 4y = 0$$

$5e^{-2x}$ también lo es.

FIGURA 3-16
Un múltiplo constante de una solución de una ecuación *lineal homogénea* también es una solución.

EJEMPLO 3-8 Principio de superposición (ecuaciones homogéneas)

Verifique que e^{-2x} y e^{2x} son soluciones de la ecuación diferencial $y'' - 4y = 0$. Además compruebe que $e^{-2x} + e^{2x}$ también es una solución de esta ecuación.

Solución Primero observamos que la ecuación diferencial es lineal y homogénea. Por sustitución directa podemos verificar que tanto e^{-2x} como e^{2x} son soluciones de la ecuación dada,

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= (e^{-2x})'' - 4e^{-2x} \\ &= 4e^{-2x} - 4e^{-2x} \\ &= 0 \qquad (\textit{coincide}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= (e^{2x})'' - 4e^{2x} \\ &= 4e^{2x} - 4e^{2x} \\ &= 0 \qquad (\textit{coincide}) \end{aligned}$$

Como e^{-2x} y e^{2x} son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$y'' - 4y = 0$$

$e^{-2x} + e^{2x}$ también lo es.

FIGURA 3-17
La suma de las dos soluciones de una ecuación *lineal homogénea* también es una solución.

Ahora sustituimos $e^{-2x} + e^{2x}$ en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= (e^{-2x} + e^{2x})'' - 4(e^{-2x} + e^{2x}) \\ &= 4e^{-2x} + 4e^{2x} - 4e^{-2x} - 4e^{2x} \\ &= 0 \qquad (\textit{coincide}) \end{aligned}$$

Por tanto, $e^{-2x} + e^{2x}$ también es una solución de la ecuación diferencial dada. Esto era de esperarse, ya que (de acuerdo con el teorema 3-2) la suma de dos soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución (figura 3-17).

EJEMPLO 3-9 Principio de superposición (ecuaciones no homogéneas)

Verifique que e^{-2x} es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 3y - e^{-2x} = 0$, y vea si $5e^{-2x}$ también es una solución de esta ecuación.

Solución Primero observamos que ésta es una ecuación lineal pero no homogénea, porque el último término no incluye y ni alguna de sus derivadas. Por sustitución directa podemos verificar que e^{-2x} es una solución de la ecuación dada:

$$\begin{aligned} y'' - 3y - e^{-2x} &= (e^{-2x})'' - 3e^{-2x} - e^{-2x} \\ &= 4e^{-2x} - 3e^{-2x} - e^{-2x} \\ &= 0 \qquad (\textit{coincide}) \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $5e^{-2x}$ en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y'' - 3y - e^{-2x} &= (5e^{-2x})'' - 3(5e^{-2x}) - e^{-2x} \\ &= 20e^{-2x} - 15e^{-2x} - e^{-2x} \\ &= 4e^{-2x} \\ &\neq 0 \qquad (\textit{no coincide}) \end{aligned}$$

Por tanto, $5e^{-2x}$ no es una solución de la ecuación diferencial dada. Esto no es sorprendente, ya que la ecuación diferencial no es homogénea, y el principio de superposición no es aplicable a ecuaciones no homogéneas, aun cuando sean lineales (figura 3-18).

La función e^{-2x} es una solución de la ecuación lineal no homogénea

$$y'' - 4y = e^{-2x}$$

pero $5e^{-2x}$ no lo es.

FIGURA 3-18
El principio de superposición no es aplicable a ecuaciones *no homogéneas*.

EJEMPLO 3-10 Principio de superposición y ecuaciones no lineales

Verifique que $y = x$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + x^2y' - y^2 = 0$ y vea si $2x$ también es una solución de esta ecuación.

Solución Primero observamos que ésta es una ecuación diferencial no lineal porque el último término incluye una potencia de y. Por sustitución directa podemos verificar que x es una solución de la ecuación dada:

$$\begin{aligned} y'' + x^2y' - y^2 &= (x)'' + x^2(x)' - (x)^2 \\ &= 0 + x^2 - x^2 \\ &= 0 \qquad (\textit{coincide}) \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $2x$ en la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} y'' + x^2y' - y^2 &= (2x)'' + x^2(2x)' - (2x)^2 \\ &= 0 + 2x^2 - 4x^2 \\ &\neq 0 \qquad (\textit{no coincide}) \end{aligned}$$

Por tanto, $2x$ no es solución de la ecuación diferencial dada. Nuevamente, esto no sorprende, ya que la ecuación diferencial es no lineal y el principio de superposición no aplica a ecuaciones no lineales (figura 3-19).

La función x es una solución de la ecuación no lineal

$$y'' + x^2y' - y^2 = 0$$

pero $2x$ no lo es.

FIGURA 3-19
El principio de superposición no es aplicable a ecuaciones no lineales.

Parece que una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden tiene un número infinito de soluciones, pero la mayoría de éstas difiere por un factor constante. Entonces, no podemos evitar preguntarnos cuántas de éstas son *soluciones fundamentales*, a partir de las que pueden obtenerse otras por el principio de superposición. En otras palabras, nos gustaría saber cuántas soluciones linealmente independientes puede tener una ecuación diferencial lineal homogénea. Resulta que el número de ellas es igual al orden de la ecuación diferencial. Pero antes de probar esto, desarrollaremos una relación importante.

TEOREMA 3-3 Identidad de Abel

Considere la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

cuyos coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ son continuos en un intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$, y sean y_1 y y_2 dos soluciones cualesquiera de esta ecuación diferencial en este intervalo. Entonces, el wronskiano de y_1 y y_2 es siempre cero (lo cual indica que ambas soluciones son linealmente dependientes), o nunca cero (lo cual indica que ambas soluciones son linealmente independientes)(figura 3-20).

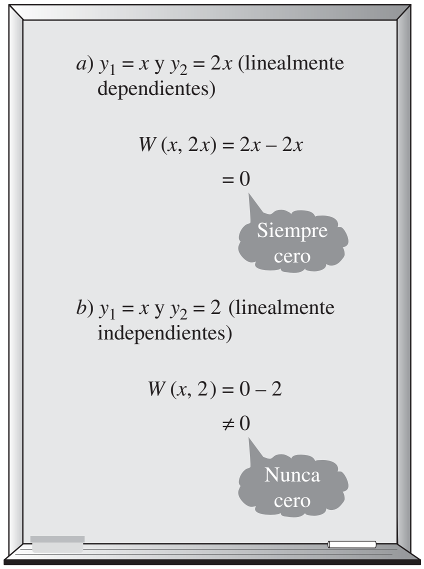


FIGURA 3-20
Identidad de Abel para la ecuación diferencial $y'' = 0$ cuyas soluciones fundamentales son x y 1.

Comprobación Como y_1 y y_2 son soluciones, satisfacen la ecuación diferencial:

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$$
$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

Multiplicando la primera ecuación por y_2, la segunda por y_1, y restando la primera de la segunda se obtiene

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + P(x)(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0$$

o

$$W' + P(x)W = 0 \tag{3-14}$$

Como, por definición del wronskiano, $W = y_1y_2' - y_1'y_2$ y

$$W' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

La ecuación 3-14 es diferencial lineal de primer orden, y su solución es

$$\boxed{W = Ke^{-\int P(x)dx}} \tag{3-15}$$

donde K es una constante y W es el wronskiano $W(y_1, y_2)$. La función exponencial en esta relación nunca es cero, ya que $P(x)$ es una función continua y, por tanto, la integral $\int P(x)dx$ no puede hacerse infinita. Entonces, la única manera en que el wronskiano W puede ser cero es si $K = 0$, en cuyo caso W es idénticamente cero.

Si $K \neq 0$, entonces W nunca es cero en el intervalo en el que $P(x)$ es continuo; así concluye la prueba.

El primero en deducir la ecuación 3-15 fue el matemático noruego N.H. Abel (1802-1829), y se conoce como **fórmula de Abel**. Esta nos permite determinar el wronskiano de dos soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes continuos mediante un factor constante.

El teorema 3-3 indica que $W(y_1, y_2)$ no puede ser cero para algunos valores de x y no serlo para otros valores de x en un intervalo en el que los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea son continuos. Por tanto, al determinar la independencia lineal de dos soluciones en un intervalo específico, basta con evaluar $W(y_1, y_2)$ en cualquier punto conveniente x_0 en ese intervalo, ya que si $W(y_1, y_2)$ es cero en x_0, también lo es para todas las x, mientras que y_1 y y_2 son linealmente independientes. Del mismo modo, si $W(y_1, y_2) = 0$ en x_0, entonces y_1 y y_2 son linealmente independientes en ese intervalo.

EJEMPLO 3-11 Aplicación de la fórmula de Abel

Determine el wronskiano de las soluciones $y_1 = x^{1/3}$ y $y_2 = 1/x$ de la ecuación diferencial

$$x^2y'' + \frac{5}{3}xy' - \frac{1}{3}y = 0$$

en el intervalo $0 < x < \infty$ usando *a*) la fórmula del wronskiano y *b*) la fórmula de Abel.

Solución Ésta es una ecuación lineal homogénea de segundo orden y puede escribirse en forma estándar dividiendo cada término entre el coeficiente de y'', que es x^2:

$$y'' + \frac{5}{3x}y' - \frac{1}{3x^2}y = 0$$

Por tanto, $P(x) = 5/3x$ y $Q(x) = -1/3x^2$, son continuas en cualquier intervalo que no contenga el punto $x = 0$. Así, esperamos que el wronskiano $W(y_1, y_2)$ sea idénticamente cero o que nunca lo sea en el intervalo $0 < x < \infty$.

a) Por la fórmula del wronskiano, tenemos

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2 = x^{1/3}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right)\frac{1}{x} = -\frac{4}{3}x^{-5/3} \neq 0$$

b) Por la fórmula de Abel, tenemos

$$W(y_1, y_2) = Ke^{-\int P(x)dx} = Ke^{-\int \frac{5}{3x}dx} = Ke^{-\frac{5}{3}\ln x} = Kx^{-5/3}$$

Por tanto, $K = -4/3$. Observe que $W(y_1, y_2)$ nunca es cero en $0 < x < \infty$, indicando que ambas soluciones son linealmente independientes.

Usaremos la fórmula de Abel para probar el siguiente teorema importante.

TEOREMA 3-4 Solución general de ecuaciones homogéneas

La ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

cuyos coeficientes P(x) y Q(x) son continuos en un intervalo $x_1 < x < x_2$, siempre tiene dos soluciones y_1 y y_2 que son linealmente independientes en ese intervalo. Además, cualquier solución de esta ecuación diferencial en ese intervalo puede expresarse en forma única como una combinación lineal de estas dos soluciones como

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{3-16}$$

que es la solución general.

Comprobación La primera parte de este teorema se verifica demostrando que existen dos soluciones cuyo wronskiano no es cero. Considere un punto x_0 y los siguientes dos problemas de valor inicial de la ecuación diferencial dada en el intervalo $x_1 < x < x_2$:

1. $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ con $y(x_0) = 1,\ y'(x_0) = 0$
2. $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ con $y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 1$

De acuerdo con el teorema 3-1, cada uno de estos problemas de valor inicial tiene una solución única. Ahora, supongamos que y_1 y y_2 son las respectivas soluciones del primero y del segundo problemas de valor inicial. Usando las condiciones iniciales dadas, el wronskiano de estas dos soluciones en el punto x_0 se determina como

$$W[y_1(x_0), y_2(x_0)] = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$$

que no es cero. Por tanto, concluimos que las soluciones y_1 y y_2 existen y que son linealmente independientes porque su wronskiano no es idénticamente cero; así concluye la prueba de la primera parte.

Para probar la segunda parte, sean y_1 y y_2 dos soluciones linealmente independientes, y sea y_3 cualquier otra solución. Por la fórmula de Abel, tenemos

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2 = K_1e^{-\int P(x)dx} \neq 0 \tag{3-17}$$

donde $K_1 \neq 0$. Del mismo modo,

$$W(y_1, y_3) = y_1y_3' - y_1'y_3 = K_2e^{-\int P(x)dx} \tag{3-18}$$

$$W(y_2, y_3) = y_2y_3' - y_2'y_3 = K_3e^{-\int P(x)dx} \tag{3-19}$$

Multiplicando la ecuación 3-18 por y_2 y la ecuación 3-19 por y_1, y restando, tenemos

$$(y_1y_2' - y_1'y_2)y_3 = K_3e^{-\int P(x)dx}y_1 - K_2e^{-\int P(x)dx}y_2$$

Reemplazando los términos en el paréntesis por sus equivalentes de la ecuación 3-17, tenemos

$$K_1e^{-\int P(x)dx}y_3 = K_3e^{-\int P(x)dx}y_1 - K_2e^{-\int P(x)dx}y_2$$

Cancelando el término exponencial y dividiendo entre K_1,

$$y_3 = \frac{K_3}{K_1}y_1 - \frac{K_2}{K_1}y_2 \tag{3-20}$$

o $y_3 = C_1y_1 + C_2y_2$, donde definimos $C_1 = K_3/K_1$ y $C_2 = -K_2/K_1$. De esta manera, cualquier solución y_3 puede expresarse como una combinación lineal de y_1 y y_2; así concluye la prueba.

Ante este teorema, concluimos que $y = C_1y_1 + C_2y_2$ es **la solución general** porque contiene todas las soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo especificado. Es posible obtener cualquier solución de la ecuación mediante la solución general asignando valores adecuados a las constantes C_1 y C_2.

De modo que el conjunto de soluciones y_1 y y_2 se conoce como **conjunto fundamental** de soluciones que se define como una colección de soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden en un intervalo. Observe que una ecuación diferencial puede tener varios conjuntos fundamentales de soluciones, como se muestra en la figura 3-21, y cualquiera de estos conjuntos puede usarse para construir la solución. Es posible comprobar que todas las soluciones generales obtenidas usando diferentes conjuntos de soluciones fundamentales son equivalentes entre sí.

Ecuación diferencial:

$$y'' - y = 0$$

Conjuntos fundamentales de soluciones:

1) e^x y e^{-x}

2) $2e^x$ y $5e^{-x}$

3) $-e^x$ y $3e^x + 2e^{-x}$

4) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

5) $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$

6) $\cosh x$ y e^x

7) $3 \operatorname{senh} x$ y $e^x - 4e^{-x}$

FIGURA 3-21
Una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes continuos puede tener varios conjuntos de soluciones fundamentales, y es posible usar cualquiera de esos conjuntos para construir la solución general de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 3-12 Conjuntos fundamentales de soluciones

Mediante sustitución directa es posible comprobar que las funciones e^x, e^{-x}, $2e^x - 3e^{-x}$, $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$. También es posible verificar por inspección que la razón de cualquier par de estas funciones es una variable. Por tanto, dos funciones cualesquiera entre éstas son linealmente independientes entre sí y forman un conjunto fundamental de soluciones. Entonces se deduce que la solución general de una ecuación diferencial dada puede expresarse como $y = C_1y_1 + C_2y_2$, donde y_1 y y_2 son cualquier par de funciones solución dadas. Por tanto, la solución general puede tomarse como $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ o $y = K_1 \cosh x + K_2 \operatorname{senh} x$, donde C_1, C_2, K_1 y K_2 son constantes arbitrarias. Compruebe que ambas soluciones generales son equivalentes entre sí.

Solución Usando las definiciones de las funciones hiperbólicas $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$, la segunda solución puede expresarse como

$$\begin{aligned} y &= K_1 \cosh x + K_2 \operatorname{senh} x \\ &= K_1\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + K_2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{K_1}{2} + \frac{K_2}{2}\right)e^x + \left(\frac{K_1}{2} - \frac{K_2}{2}\right)e^{-x} \\ &= C_1e^x + C_2e^{-x} \end{aligned}$$

donde $C_1 = (K_1 + K_2)/2$ y $C_2 = (K_1 - K_2)/2$. Por tanto, ambas soluciones generales son mutuamente equivalentes, y podemos construir la solución general de una ecuación lineal homogénea de segundo orden usando cualquier par de sus soluciones que son linealmente independientes.

El estudiante también puede verificar que el wronskiano de tres soluciones cualesquiera entre las soluciones dadas es cero, lo cual indica que solo dos soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden pueden ser linealmente independientes. El teorema 3-4 es análogo a un teorema de álgebra vectorial (figura 3-22). Cualquier vector en un plano puede expresarse como una combinación lineal de dos vectores en ese plano que no sean paralelos entre sí (es decir, que sean linealmente independientes).

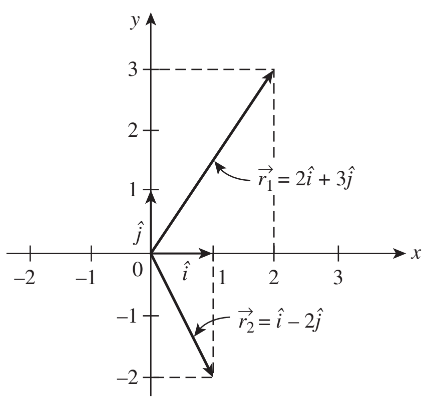


FIGURA 3-22
En álgebra vectorial, todos los vectores en un plano pueden expresarse como una combinación lineal de los dos vectores unitarios linealmente independientes $\hat{i}$ y $\hat{j}$.

El teorema 3-4 asegura la existencia de dos soluciones linealmente independientes. También asegura que en un conjunto de cualquier número de soluciones, solo dos pueden ser linealmente independientes. Garantiza, por ejemplo, que la ecuación $y'' - 4y = 0$ tiene dos soluciones linealmente independientes que pueden tomarse como e^{-2x} y e^{2x}, y también garantiza que cualquier solución de esta ecuación diferencial pueda obtenerse de estas dos soluciones. De modo que resolver una ecuación lineal homogénea de segundo orden es equivalente a encontrar dos soluciones linealmente independientes. Entonces, la solución general de esta ecuación diferencial se obtiene de la ecuación 3-16.

Repaso de la sección

3-13C ¿Una ecuación diferencial tiene que ser lineal y homogénea para que sea aplicable el principio de superposición?

3-14C ¿Para qué clase de ecuación diferencial un múltiplo constante de una solución también es una solución?

3-15C ¿Para qué clase de ecuación diferencial la suma de dos soluciones también es una solución?

3-16C Considere una ecuación homogénea lineal de segundo orden con coeficientes continuos y sus dos soluciones y_1 y y_2 que son linealmente independientes. ¿Es posible que esta ecuación diferencial tenga una solución que no pueda expresarse como $C_1y_1 + C_2y_2$, donde C_1 y C_2 son constantes?

3-17 Para cada una de las siguientes ecuaciones de segundo orden, sea y_1 una solución de la ecuación. Determine por inspección si ky_1, donde k es una constante, es también una solución de esa ecuación.

a) $y'' + e^y y' - 2y = 6$ *b*) $y'' - 2y' + y = x^3 \cos 2x$

c) $y'' - 5x^2y' = 0$ *d*) $y'' - y = 0$

(*Respuestas: a*) y *b*) es una ecuación diferencial no homogénea y, por tanto, ky_1 no es una solución; *c*) y *d*) es una ecuación diferencial lineal homogénea y, por tanto, ky_1 es una solución).

3-18 Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden, sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación. Determine por inspección si $y_1 + y_2$ también es una solución de esa ecuación.

a) $y'' + y'\cos y + 8xy = 0$ *b*) $y'' + 6y' + 9\sqrt{y} = x^3$

c) $x^3y'' - xy' = 0$ *d*) $y'' + k^2y = 0$

(*Respuestas: a*) y *b*) es una ecuación diferencial no lineal y, por tanto, $y_1 + y_2$ *no* es una solución; *c*) y *d*) es una ecuación diferencial lineal homogénea y, por tanto, $y_1 + y_2$ también es una solución).

3-19 Considere las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden y dos de sus soluciones, y_1 y y_2 para $x > 0$. Por inspección, identifique el par de soluciones cuyo wronskiano $W(y_1, y_2)$ no es nunca cero para $x > 0$. Verifique sus hallazgos calculando $W(y_1, y_2)$ para cada caso.

a) $y'' - 4y = 0,\ y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = -3e^{2x}$

b) $y'' - 4y = 0,\ y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = e^{-2x}$

c) $y'' - 4y = 0,\ y_1 = 3e^{-2x}$ y $y_2 = e^{3-2x}$

(*Respuestas: a*) y_1 y y_2 son linealmente dependientes y $W = 0$; *b*) y_1 y y_2 son linealmente independientes y $W = -4$; *c*) y_1 y y_2 son linealmente dependientes y $W = 0$).

3-20 Considere las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden y dos de sus soluciones, y_1 y y_2 para $x > 0$. Determine si y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones. En caso afirmativo, desarrolle una relación para $y(x)$ que contenga todas las soluciones de la ecuación diferencial.

a) $y'' - y = 0,\ y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$

b) $y'' - y = 0,\ y_1 = \text{senh } x$ y $y_2 = \cosh x$

c) $y'' - y = 0,\ y_1 = e^x$ y $y_2 = \cosh x$

(*Respuestas: a*) $W = -2 \neq 0,\ y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^x + C_2e^{-x}$

b) $W = -1 \neq 0,\ y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1 \text{ senh } x + C_2 \cosh x$

c) $W = -1 \neq 0,\ y(x) = C_1e^x + C_2 \cosh x$).

3-4 ▪ REDUCCIÓN DE ORDEN

Antes de comenzar realmente a resolver ecuaciones diferenciales, tenemos que considerar otro aspecto: reducir una ecuación homogénea lineal de segundo orden a una de primer orden cuando se conoce una de sus soluciones. El método para reducir en una unidad el orden de una ecuación diferencial cuando se dispone de una de sus soluciones se llama **reducción de orden**, y lo desarrolló el matemático francés Jean d'Alembert (1717-1783).

Sea y_1 una solución no trivial ($y_1 \neq 0$) de la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Entonces sabemos que Cy_1, donde C es constante, también es solución de esta ecuación. Ahora nos preguntamos si vy_1, donde v es una función de x, también puede ser una solución de esta ecuación diferencial. De ser así, vy_1 será una solución linealmente independiente de y_1, ya que la relación de ambas soluciones es v, que no es una constante. Por tanto, encontrar la función v es equivalente a obtener la segunda solución linealmente independiente de la ecuación diferencial dada.

Ahora supondremos que $y = vy_1$ es una solución de la ecuación diferencial, e intentaremos determinar la función v. Tomando la primera y la segunda derivadas de $y = vy_1$, $y' = v'y_1 + vy_1'$ y $y'' = v''y_1 + v'y_1' + v'y_1' + vy_1''$. Sustituyendo en la ecuación diferencial y reacomodando,

$$y_1v'' + [2y_1' + P(x)y_1]v' + [y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1]v = 0$$

La cantidad en el último paréntesis es cero, ya que y_1 es una solución. Dividiendo los términos restantes entre y_1 obtenemos

$$v'' + \left[P(x) + \frac{2y_1'}{y_1}\right]v' = 0$$

o tomando $w = v'$,

$$w' + \left[P(x) + \frac{2y_1'}{y_1}\right]w = 0 \qquad \textbf{(3-21)}$$

que es una ecuación lineal homogénea de primer orden en w. Su solución es

$$w = Ce^{-\int(P(x)+2y_1'/y_1)\,dx} = Ce^{-2\int(y_1'/y_1)dx}e^{-\int P(x)\,dx}$$

Como
$$e^{-2\int(y_1'/y_1)\,dx} = e^{-2\int(1/y_1)dy_1} = e^{-2\ln|y_1|} = \frac{1}{y_1^2}$$

tenemos
$$w = \frac{C}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx} \qquad \textbf{(3-22)}$$

donde C es una constante arbitraria, que consideraremos $C = 1$. Entonces, v se obtiene integrando la ecuación 3-22:

$$v = \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx \qquad \textbf{(3-23)}$$

Por tanto, la función v puede determinarse por la fórmula anterior (figura 3-23). Sin embargo, no es necesario memorizar esta fórmula, ya que es demasiado sencillo sustituir vy_1 en la ecuación diferencial dada y seguir estos pasos lógicos.

Una vez que están disponibles v y por tanto vy_1, la segunda solución linealmente independiente de la ecuación resulta $y_2 = vy_1$. Entonces, la solución general puede expresarse como

$$y = C_1y_1 + C_2vy_1 \qquad \textbf{(3-24)}$$

Ecuación diferencial:
$y'' = 0$

Una solución:
$y_1 = x$

Ec. 3-23:
$$v = \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}dx = -\frac{1}{x}$$

Segunda solución linealmente independiente:
$y_2 = y_1v = -1 =$ una constante

Solución general:
$y = C_1x + C_2$

FIGURA 3-23
Método para encontrar la segunda solución linealmente independiente de una ecuación diferencial mediante el método de reducción de orden.

Observe que si conserváramos la constante de integración C en la ecuación 3-22, la solución general incluiría C_2C en lugar de C_2. Pero esto no tiene importancia, ya que podemos volver a denominar C_2C como otra constante arbitraria, digamos C_3. Por tanto, siempre podemos ignorar la constante de integración (o asignarle cualquier valor conveniente) al determinar v. También observe que y_1 y y_2 son linealmente independientes, ya que su razón es $y_2/y_1 = v$, que nunca es una constante. Esto se debe a que el integrando de la ecuación 3-23 nunca será cero. En otras palabras, la expresión para v siempre incluirá la variable independiente x.

Resumimos el método de reducción de orden en el siguiente teorema:

TEOREMA 3-5 Reducción de orden

Si y_1 es una solución conocida diferente de cero de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

cuyos coeficientes P(x) y Q(x) son continuos en un intervalo $x_1 < x < x_2$, entonces $y_2 = vy_1$, donde

$$v = \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}\,dx$$

también es una solución linealmente independiente de y_1 en ese intervalo. Además, la solución general de esta ecuación diferencial en el intervalo dado es

$$y = C_1y_1 + C_2vy_1$$

Observe que el método de reducción de orden no es absoluto para resolver ecuaciones diferenciales, ya que se necesita que una de las soluciones esté disponible antes de poder aplicarlo. Sin embargo, éste es muy atractivo cuando una solución se determina de alguna manera por otro método, o simplemente por inspección.

EJEMPLO 3-13 **Reducción de orden**

Dado que $y_1 = x$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$$

encuentre una segunda solución linealmente independiente por el método de reducción de orden en el intervalo $x > 0$.

Solución Ésta es una ecuación lineal homogénea de segundo orden, y buscamos su segunda solución linealmente independiente en la forma $y = vy_1 = vx$. Obteniendo sus derivadas primera y segunda,

$$y_2' = v'x + v$$
$$y_2'' = v''x + v' + v' = v''x + 2v'$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$x^2(v''x + 2v') - 4x(v'x + v) + 4vx = 0$$

que se simplifica a $v'' - 2v'/x = 0$ o $w' - 2w/x = 0$ donde $w = v'$. Ésta es una ecuación diferencial lineal de primer orden, y su solución es $w = x^2$. Entonces, v se determina por integración como $v = x^3/3$. Observe que suprimimos la constante de integración, ya que no tiene importancia. Entonces, la segunda solución linealmente independiente resulta $y_2 = vy_1 = x^4/3$. Observe que las funciones x y x^4 son linealmente independientes, como se esperaba. Finalmente, la solución general de esta ecuación diferencial para $x > 0$ puede expresarse como $y = C_1x + C_2x^4$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Observe que absorbimos el factor constante $1/3$ en la constante arbitraria C_2.

Repaso de la sección

3-21C ¿Cuál es el valor práctico del método de reducción de orden? ¿Cuándo consideraría usted usar este método?

3-22 Usando la siguiente solución, determine la segunda solución linealmente independiente de la ecuación lineal homogénea de segundo orden dada mediante el método de reducción de orden:

$$y'' - y = 0, \qquad y_1 = e^x$$

(*Respuesta:* $y_2 = -\frac{1}{2}e^{-x}$. La solución general es $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$).

3-5 ▪ ECUACIONES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Hasta ahora hemos analizado de la teoría de ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden, y aprendimos acerca de las propiedades de sus soluciones. Ahora vamos a aprender a resolver tales ecuaciones. Resulta que las ecuaciones lineales homogéneas pueden resolverse en forma sistemática si sus coeficientes son constantes. Sin embargo, salvo por algunos casos especializados, no existen procedimientos sencillos para solucionar tales ecuaciones cuando sus coeficientes son variables. En esta sección consideraremos ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes. Las ecuaciones con coeficientes variables que usualmente se resuelven en términos de series infinitas, se abordarán en el capítulo 5.

Considere la ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes,

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3-25}$$

donde los coeficientes a, b y c son constantes reales (el coeficiente principal diferente de cero siempre puede convertirse en 1 dividiendo cada término entre a). Considerando que los coeficientes constantes son funciones continuas en el intervalo $-\infty < x < \infty$ (todo el eje x), las soluciones de tales ecuaciones son válidas en cualquier intervalo, y por tanto no necesitamos especificar un intervalo para la solución. En este caso, podemos resumir el teorema clave como sigue:

> *Una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes siempre tiene dos soluciones linealmente independientes,* y_1 y y_2 *que son aplicables a cualquier intervalo, y su solución general se expresa como* $y = C_1y_1 + C_2y_2$, *donde* C_1 y C_2 *son constantes arbitrarias (figura 3-24).*

La gran pregunta es, por supuesto, cómo encontrar las dos soluciones y_1 y y_2. Un cuidadoso examen de la ecuación 3-25 revela que agregando la función solución y

Ecuación diferencial:

$y'' = 0$

Dos soluciones linealmente independientes:

$y_1 = x$ y $y_2 = 1$

Solución general:

$y = C_1x + C_2 \cdot 1$

Válida para:

$-\infty < x < \infty$

FIGURA 3-24
Una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes tiene dos soluciones linealmente independientes cuya combinación lineal da la solución general para todas las x.

sus derivadas después de multiplicarlas por algunas constantes, se obtiene cero para todas las x. Entonces concluimos que la función solución y sus derivadas pueden diferir, como máximo, por un múltiplo constante. La única función elemental cuyas derivadas son múltiplos constantes de la misma es la función exponencial e^{mx}, donde m es una constante. Eso se verifica dado que las funciones

$$y = e^{mx} \tag{3-26}$$

$$y' = me^{mx} \tag{3-27}$$

$$y'' = m^2e^{mx} \tag{3-28}$$

difieren una de otra por m o m^2, que son constantes. Por tanto, supondremos que la solución de la ecuación 3-25 es de la forma e^{mx} (figura 3-25). Sustituyendo esta función en la ecuación 3-25 obtenemos

$$a(e^{mx})'' + b(e^{mx})' + c(e^{mx}) = 0$$

que se simplifica a $e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$. Pero la función exponencial e^{mx} no puede ser cero si la solución será general. Entonces, debemos tener

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{3-29}$$

Esta ecuación algebraica cuadrática se llama **ecuación característica** (o *ecuación auxiliar*), ya que produce los valores aceptables de m que caracterizan la solución de una ecuación diferencial dada. Una comparación de la ecuación característica y la ecuación diferencial sugiere una forma sencilla de obtener la ecuación característica: en la ecuación diferencial, reemplace y'' por m^2, y' por m y y por 1 (figura 3-26). Este procedimiento convierte la ecuación diferencial en la ecuación característica.

Usted recordará del álgebra que una ecuación polinómica de grado n tiene n raíces. Por tanto, la ecuación característica tendrá dos raíces: m_1 y m_2, ya que incluye un polinomio de segundo grado en m. Ambas raíces se determinan por la fórmula cuadrática como

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3-30}$$

Esto da los valores permisibles de m, y las soluciones son, por tanto

$$y_1 = e^{m_1x} \quad \text{y} \quad y_2 = e^{m_2x} \tag{3-31}$$

Si m_1 y m_2 son reales y distintas, las dos soluciones anteriores son linealmente independientes, y podemos formar la solución general. Pero m_1 y m_2 pueden ser iguales entre sí; e incluso ser números complejos si $b^2 - 4ac$ es negativo. La naturaleza de la solución difiere para casos distintos, y necesitamos considerar cada caso por separado (figura 3-27).

Caso 1: Raíces reales y desiguales ($m_1 \neq m_2$)

Como usted recordará del álgebra, cuando $b^2 - 4ac > 0$, las raíces de la ecuación característica $am^2 + bm + c = 0$ serán reales y desiguales. Entonces $m_1 \neq m_2$, y las dos soluciones e^{m_1x} y e^{m_2x} son linealmente independientes, ya que su relación es $e^{m_1x}/e^{m_2x} = e^{(m_1-m_2)x}$, la cual no es una constante. Entonces, la solución general resulta

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} \tag{3-32}$$

Si

$$y = e^{-3x}$$

Entonces

$$y' = -3e^{-3x} = -3y$$
$$y'' = 9e^{-3x} = 9y$$

FIGURA 3-25
La función exponencial e^{mx} difiere de sus derivadas solo por una constante, lo cual la hace una elección ideal para la solución de prueba de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.

Ecuación diferencial:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$am^2 + bm + c = 0$$

(Ecuación característica)

FIGURA 3-26
La ecuación característica de una ecuación de segundo orden puede obtenerse reemplazando y'' por m^2, y' por m, y y por 1.

Ecuación cuadrática:

$$am^2 + bm + c = 0$$

Las raíces:

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tres casos:

1) $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow m_1 \neq m_2$ (real)

2) $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow m_1 = m_2$ (real)

3) $b^2 - 4ac < 0 \rightarrow m_1 \neq m_2$ (compleja)

FIGURA 3-27
Un pequeño recordatorio de álgebra.

EJEMPLO 3-14 Ecuación homogénea con $m_1 \neq m_2$

Determine la solución general de la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = 0$.

Solución Ésta es una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, y su ecuación característica se obtiene reemplazando el orden por el grado, esto es, y'' por m^2, y' por m y y por 1 para obtener $m^2 + m - 2 = 0$, que puede factorizarse como $(m - 1)(m + 2) = 0$.

Las raíces de esta ecuación son $m_1 = 1$ y $m_2 = -2$, que son reales y desiguales. Entonces, por la ecuación 3-32, la solución general de la ecuación diferencial dada es $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. Por sustitución directa podemos comprobar que esta solución general, así como las soluciones individuales e^x y e^{-2x} satisfacen la ecuación diferencial.

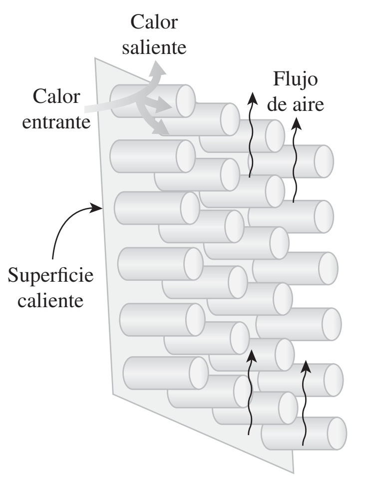


FIGURA 3-28
Las aletas de espiga se usan comúnmente en la práctica para aumentar la rapidez de transferencia de calor de superficies calientes.

EJEMPLO 3-15 Transferencia de calor a través de aletas (primera parte)

En la práctica es común usar aletas de aluminio en forma de espiga de diámetro uniforme D y longitud L para mejorar la transferencia de calor de superficies calientes, al proporcionar área superficial adicional para efectuar la transferencia, como se muestra en la figura 3-28. La base de la aleta está en perfecto contacto con la superficie caliente y, por tanto, la temperatura en la base de la aleta es la misma que la de la superficie caliente. El calor se conduce primero de la superficie caliente a la aleta a través de su base. Al fluir el calor hacia la punta de la aleta, parte de éste se transfiere al aire circundante a través de la superficie exterior de la aleta. Como resultado de esta pérdida de calor, la temperatura de la aleta disminuye al alejar el punto de medición de la base.

Aplicando el principio de conservación de la energía a una sección transversal de la aleta (figura 3-29) y utilizando la ley de Fourier de conducción de calor y la ley de enfriamiento de Newton, la ecuación diferencial que rige la distribución de temperatura $T(x)$ a lo largo de la aleta bajo operación en estado estacionario en un medio que está a 0°C se determina como

$$T'' - \lambda T = 0 \tag{3-33}$$

donde $\lambda = 4h/kD$. Donde h es el coeficiente de transferencia de calor entre la aleta y el medio circundante, y k es la conductividad térmica del material de la aleta. Observe que λ es una cantidad positiva.

Tomando $L = 0.5$ m, $\lambda = 4$ m^{-1}, la temperatura de la base de la aleta como $T(0) = 200$°C y la pendiente del perfil de temperatura en la base como $T'(0) = -480$°C/m, determine la distribución de temperatura a lo largo de la aleta así como el valor de la temperatura en el extremo de la aleta, $x = L = 0.5$ m.

Solución Éste es un problema de valor inicial, ya que ambas condiciones se especifican en el mismo punto. Puede formularse como

$$T'' - 4T = 0$$
$$T(0) = 200$$
$$T'(0) = -480$$

La ecuación diferencial es lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, y su ecuación característica es $m^2 - 4 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $m_1 = -2$ y $m_2 = 2$, que son reales y desiguales. Entonces, la solución general de la ecuación diferencial es, por la ecuación 3-32,

$$T(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} \tag{3-34}$$

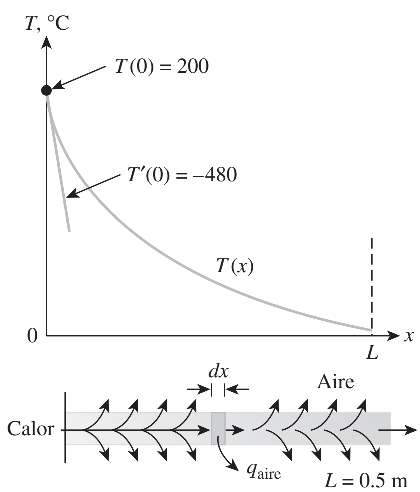


FIGURA 3-29
Elemento diferencial y condiciones iniciales para la aleta de una sola espiga del ejemplo 3-15.

Su derivada con respecto a x es

$$T'(x) = -2C_1e^{-2x} + 2C_2e^{2x} \tag{3-35}$$

Las constantes arbitrarias se determinan aplicando las condiciones iniciales:

$$T(0) = 200 \rightarrow C_1 + C_2 = 200$$
$$T'(0) = -480 \rightarrow -2C_1 + 2C_2 = -480$$

ya que $e^0 = 1$. Despejando de ambas ecuaciones las dos incógnitas, obtenemos $C_1 = 220$ y $C_2 = -20$. Sustituyendo estos valores en la ecuación 3-34, obtenemos la solución de este problema de valor inicial,

$$T(x) = 220e^{-2x} - 20e^{2x} \tag{3-36}$$

El valor de la temperatura en cualquier ubicación x a lo largo de la aleta puede determinarse sustituyendo ese valor x en la ecuación de solución 3-36. Entonces, la temperatura de la aleta en $x = L = 0.5$ m es

$$T(0.5) = 220e^{-2\times0.5} - 20e^{2\times0.5} = 26.57°\text{C}$$

Por tanto, la temperatura de la aleta cae de 200 en su base a 26.57 en su extremo, como resultado de la transferencia de calor de la aleta al medio circundante (figura 3-30).

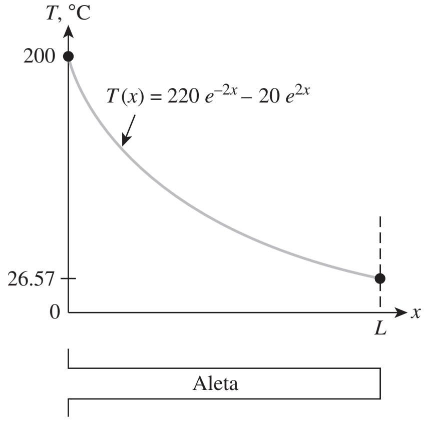


FIGURA 3-30
La variación de la temperatura a lo largo de la aleta de espiga del ejemplo 3-15.

Solución alternativa Usted quizá se pregunte qué sucedería si hubiéramos expresado la solución general en términos de las funciones hiperbólicas $\cosh 2x$ y $\text{senh}\ 2x$ en vez de las funciones exponenciales e^{2x} y e^{-2x}. Después de todo, ambas familias de funciones están estrechamente relacionadas entre sí por

$$\cosh mx = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2} \quad \text{y} \quad \text{senh}\ mx = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} \tag{3-37}$$

Por sustitución directa podemos demostrar que tanto $\cosh 2x$ como $\text{senh}\ 2x$ satisfacen la ecuación diferencial, y por tanto son soluciones. Además, ambas soluciones son linealmente independientes, ya que su razón ($\text{senh}\ 2x/\cosh 2x = \tanh 2x$) no es una constante. Entonces podemos expresar la solución general de la misma ecuación diferencial como

$$T(x) = D_1 \cosh 2x + D_2\ \text{senh}\ 2x \tag{3-38}$$

donde D_1 y D_2 son constantes arbitrarias. Pero sabemos que una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes puede tener solo dos soluciones linealmente independientes, y la solución general que se construye usando ambas soluciones contiene todas las soluciones de la ecuación diferencial. En otras palabras, las dos soluciones generales que se ven diferentes deben ser mutuamente equivalentes. Usando las definiciones de las funciones hiperbólicas (ecuación 3-37), podemos comprobar que éste es efectivamente el caso. Comprobaremos esto en el problema de valor inicial.

La derivada de la ecuación 3-38 con respecto a x es

$$T'(x) = 2D_1\ \text{senh}\ 2x + 2D_2 \cosh 2x$$

Las constantes arbitrarias se determinan nuevamente mediante la aplicación de las condiciones iniciales. Dado que $\cosh 0 = 1$ y $\text{senh}\ 0 = 0$,

$$T(0) = 200 \rightarrow D_1 = 200$$

$$T'(0) = -480 \rightarrow 2D_2 = -480 \rightarrow D_2 = -240$$

Ecuación diferencial:

$$T'' - 4T = 0$$

Raíces de la ecuación característica:

$$m_1 = 2, \quad m_2 = -2$$

Formas posibles de la solución general:

$T = A_1 \operatorname{senh} 2x + A_2 \cosh 2x$

$T = B_1 \operatorname{senh} 2(L - x) + B_2 \cosh 2(L - x)$

$T = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$

$T = D_1 e^{-2(L-x)} + D_2 e^{2(L-x)}$

FIGURA 3-31
Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes tiene solo dos soluciones linealmente independientes, pero pueden expresarse en varias formas. Aunque todas son equivalentes, tal vez algunas formas sean más convenientes que otras para usarlas en un problema dado.

Sustituyendo estos valores en la ecuación 3-38 obtenemos la solución del problema de valor inicial dado,

$$T(x) = 200 \cosh 2x - 240 \operatorname{senh} 2x \tag{3-39}$$

Para comprobar que esta solución es equivalente a la que se obtuvo antes (ecuación 3-36), reemplazamos las funciones hiperbólicas anteriores por sus expresiones equivalentes en términos de funciones exponenciales. Obtenemos

$$T(x) = 200\,\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} - 240\,\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 220e^{-2x} - 20e^{2x}$$

que es idéntica a la primera solución que se obtuvo. Esto debe reafirmar nuestra convicción de que una vez que determinamos la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea, cualquier solución de esa ecuación, sin importar lo diferente que pueda parecer, puede obtenerse de la solución general como caso especial (figura 3-31).

EJEMPLO 3-16 **Transferencia de calor a través de aletas (segunda parte)**

Resuelva el problema descrito en el ejemplo anterior reemplazando las condiciones iniciales por las condiciones en la frontera $T(0) = 200$ y $T(0.5) = 26.57$°C.

Solución Éste es un problema de valor en la frontera, ya que las dos condiciones se especifican en puntos diferentes. Puede formularse como

$$T'' - 4T = 0$$
$$T(0) = 200$$
$$T(0.5) = 26.57$$

La solución general de la ecuación diferencial es independiente de las condiciones iniciales o de frontera, y se determinó como $T(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$. En este caso, las constantes arbitrarias se determinan aplicando las condiciones en la frontera:

$$T(0) = 200 \;\rightarrow\; C_1 + C_2 = 200$$

$$T(0.5) = 26.57 \;\rightarrow\; C_1e^{-2\times 0.5} + C_2e^{2\times 0.5} = 26.57$$

Resolviendo simultáneamente ambas ecuaciones para despejar las dos incógnitas se tiene $C_1 = 220$ y $C_2 = -20$. Sustituyendo estos valores en la solución general, obtenemos la solución de este problema de valor en la frontera, $T(x) = 220e^{-2x} - 20e^{2x}$, que es la misma que la solución al problema de valor en la frontera (figura 3-30). Esto no sorprende, ya que elegimos la condición en la frontera en $x = L = 0.5$ como el valor de la temperatura obtenido en la solución anterior. Por tanto, podemos fijar una curva de solución específica de una ecuación diferencial lineal de segundo orden ya sea especificando el valor de la solución o su pendiente en los mismos puntos (un problema de valor inicial) o los valores de la solución en dos puntos diferentes (un problema de valor en la frontera). Observe que si usáramos una temperatura diferente en $x = 0.5$, obtendríamos una solución diferente.

Caso 2: Raíces reales e iguales ($m_1 = m_2$)

Cuando $b^2 - 4ac = 0$, las raíces de la ecuación característica $am^2 + bm + c = 0$ serán reales e iguales entre sí. Por la ecuación 3-30, se determinan como $m_1 = m_2 = m =$

$-b/2a$. Entonces las dos soluciones correspondientes a cada una de ellas se vuelven idénticas,

$$y_1 = e^{m_1x} = e^{m_2x} = e^{mx} = e^{-(b/2a)x}$$

Por tanto, la ecuación característica da solo una solución en este caso. La segunda solución linealmente independiente se determina aplicando el método de reducción de orden como $y_2 = v(x)y_1$, donde, por la ecuación 3-23,

$$v(x) = \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx = \int \frac{e^{-\int (b/a)dx}}{\left[e^{-(b/2a)x}\right]^2}dx = \int \frac{e^{-\int (b/a)x}}{e^{-(b/a)x}}dx = \int dx = x$$

Aquí ignoramos intencionalmente las constantes de integración, por simplicidad, ya que no tienen ninguna consecuencia, como se explicó en la sección 3-4. Por tanto, la segunda solución es

$$y_2 = vy_1 = xy_1 = xe^{-mx} \qquad \textbf{(3-40)}$$

Por sustitución directa podemos verificar que y_2 satisface la ecuación diferencial (ecuación 3-33), de manera que es una solución. No solo esto, y_1 y y_2 son linealmente independientes ya que $y_2/y_1 = x$, que no es una constante. Entonces la solución general en el caso de raíces reales e iguales resulta (figura 3-32) $y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$, o

$$\boxed{y = (C_1 + C_2x)e^{mx}} \qquad \textbf{(3-41)}$$

Así, llegamos a la conclusión de que, cuando la ecuación característica tiene raíces reales e iguales, la segunda solución linealmente independiente se obtiene multiplicando la primera por x.

RAÍCES REPETIDAS

Si

$$m_1 = m_2 = m$$

Entonces

$$y_1 = e^{mx}$$
$$y_2 = xe^{mx}$$

y

$$y = (C_1 + C_2\, x)e^{mx}$$

FIGURA 3-32
Cuando las raíces de la ecuación característica son reales e iguales, la segunda solución linealmente independiente se obtiene multiplicando la primera por x.

EJEMPLO 3-17 **Ecuaciones homogéneas con raíces repetidas ($m_1 = m_2$)**

Determine la solución general de la ecuación diferencial $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Solución Ésta es una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, y su ecuación característica es

$$m^2 + 6m + 9 = 0$$

que puede factorizarse como

$$(m + 3)^2 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son $m_1 = m_2 = m = -3$, que son reales e iguales. De modo que una solución de la ecuación dada es e^{-3x}, y la segunda solución linealmente independiente es xe^{-3x}. Entonces, la solución general resulta (ecuación 3-41) $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$. Por sustitución directa podemos verificar que las funciones e^{-3x} y xe^{-3x}, así como cualquier combinación lineal de éstas, satisfacen la ecuación diferencial dada. Además, cualquier solución de la ecuación diferencial puede obtenerse de la solución general que precede mediante la asignación de valores adecuados a las constantes C_1 y C_2.

Caso 3: Raíces complejas ($m_{1,2} = \alpha \pm i\beta$)

Cuando $b^2 - 4ac < 0$, las raíces de la ecuación característica $am^2 + bm + c = 0$ serán complejas, ya que la ecuación 3-30 incluirá la raíz cuadrada de un número negativo. Estas ecuaciones dejan claro que las raíces son necesariamente complejas conjugadas entre ellas. Es decir, $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, donde $i = \sqrt{-1}$ $\alpha = -b/2a$ y $\beta = \sqrt{4ac - b^2}/2a$. Dado que $e^{c+d} = e^ce^d$, las dos

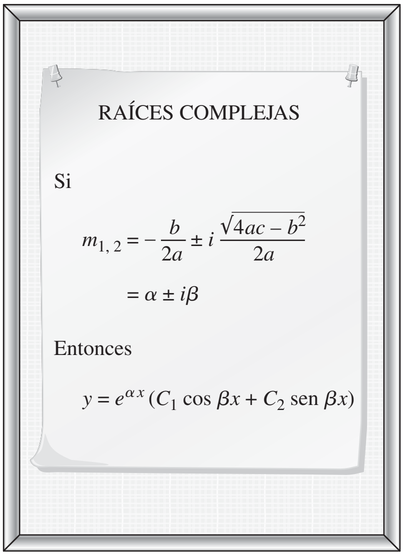


FIGURA 3-33
Cuando las raíces de la ecuación característica son complejas, la solución general es real e incluye las funciones periódicas seno y coseno.

soluciones correspondientes a las dos raíces de la ecuación característica son $y_1 = e^{m_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x}$ y $y_2 = e^{m_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x}$. Ambas soluciones son linealmente independientes, ya que su razón es $y_1/y_2 = e^{i\beta x}/e^{-i\beta x} = e^{2i\beta x}$, que no es constante. Por tanto, la solución general es

$$\begin{aligned} y &= Ae^{\alpha x}e^{i\beta x} + Be^{\alpha x}e^{-i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}(Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}) \end{aligned} \tag{3-42}$$

donde A y B son constantes arbitrarias. La solución general en la ecuación 3-42 incluye funciones complejas, y nos gustaría expresarla en términos de funciones reales. Para hacer esto, necesitamos tener una mejor comprensión de la función e^{ix}, donde x es un número negativo o positivo, y ser capaces de manipularlo.

Usted puede recordar del cálculo que la expansión de la serie de Taylor de la función exponencial es

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3-43}$$

Reemplazando x por ix y reacomodando, obtenemos

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad \textbf{(3-44)} \\ &= \cos x + i \operatorname{sen} x \qquad \textbf{(3-45)} \end{aligned}$$

ya que las dos series en la ecuación 3-44 son las expansiones respectivas de la serie de Taylor de cos x y sen x. Del mismo modo,

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x \tag{3-46}$$

ya que cos $(-x)$ = cos x y sen $(-x)$ = $-$sen (x). Las ecuaciones 3-45 y 3-46 se conocen como *identidades de Euler.*

Con la ayuda de estas relaciones, los términos en los paréntesis de la ecuación 3-42 pueden expresarse como

$$\begin{aligned} Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x} &= A(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) + B(\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x) \\ &= (A + B)\cos \beta x + i(A - B)\operatorname{sen} \beta x \\ &= C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x \end{aligned} \tag{3-47}$$

donde $C_1 = A + B$ y $C_2 = i(A - B)$ son dos constantes arbitrarias. Entonces, la solución general de la ecuación diferencial puede expresarse como (figura 3-33)

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)} \tag{3-48}$$

lo cual solo incluye funciones reales.

EJEMPLO 3-18 Ecuación homogénea con raíces complejas

Determine la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + 3y = 0.$$

Solución Ésta es una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, y su ecuación característica es $m^2 - 2m + 3 = 0$, cuyas raíces son

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{4 - 12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

Por tanto, $\alpha = 1$ y $\beta = \sqrt{2}$, y la solución general es, por la ecuación 3-48, $y = e^x(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}x)$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Caso especial: Raíces puramente imaginarias

Cuando el coeficiente b en la ecuación característica $am^2 + bm + c = 0$ es $b = 0$, las dos raíces son $m_{1,2} = \pm\sqrt{-c/a}$. Así, si la razón c/a es positiva, las dos raíces serán puramente imaginarias y pueden expresarse como $m_{1,2} = \pm i\sqrt{c/a}$. En este caso, la forma de la solución de la ecuación 3-48 es $y = C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x$, donde $\beta = \sqrt{c/a}$. La solución es una oscilación de amplitud constante con una frecuencia en radianes de $\sqrt{c/a}$.

El caso de raíces puramente imaginarias se presenta frecuentemente en el análisis de objetos mecánicos cuyo movimiento consiste en una oscilación o vibración. Los siguientes dos ejemplos ilustran un par de aplicaciones con oscilaciones.

EJEMPLO 3-19 Ecuación de movimiento de un péndulo

El péndulo que se muestra en la figura 3-34*a*) consiste en una masa concentrada m_c a una distancia L_c del punto O, fijada a una varilla de longitud L_R con inercia I_{RG} alrededor de su centro de masa. La inercia de la masa concentrada m_c alrededor del punto O es $m_C L_C^2$. *a*) Obtenga la ecuación de movimiento. *b*) Explique el caso en el que la masa de la varilla m_R es pequeña en comparación con la masa concentrada. *c*) Determine la ecuación de movimiento para pequeños ángulos θ.

Solución *a*) Quizá recuerde, de la física, el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia, que sostiene que el momento de inercia de la varilla alrededor del punto O es

$$I_{RO} = I_{RG} + m_R\left(\frac{L_R}{2}\right)^2$$

De modo que la inercia total del péndulo alrededor del punto O es

$$I_O = I_{RO} + m_C L_C^2 = I_{RG} + m_R\left(\frac{L_R}{2}\right)^2 + m_C L_C^2$$

L es la distancia entre el punto O y el centro de masa G de todo el péndulo. El momento M_O alrededor del punto O lo causa el componente perpendicular del peso total $(m_C + m_R)g$ que actúa a través del centro de masa en G (figura 3-34*b*), y es $-(m_C + m_R)gL \operatorname{sen} \theta$. La ecuación de movimiento deseada se obtiene por la ley básica del movimiento para la rotación alrededor de un punto fijo O, que es

$$\begin{pmatrix}\text{momento másico de inercia}\\ \text{alrededor de un punto fijo } O\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{aceleración}\\ \text{angular}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{suma de los momentos}\\ \text{alrededor del punto } O\end{pmatrix}$$

Esto da la ecuación del movimiento:

$$I_O\ddot{\theta} = M_O = -(m_C + m_R)gL \operatorname{sen} \theta = -mgL \operatorname{sen} \theta$$

donde $m = m_C + m_R$. Sin embargo, la distancia L entre el punto O y el centro de masa G de todo el péndulo no está dada, pero puede calcularse como sigue (figura 3-34*c*). Si toda la masa del péndulo estuviera concentrada en G, la fuerza del peso produciría el mismo momento alrededor del punto O que el originado por el péndulo completo. Así, tomando los momentos alrededor del punto O tenemos

$$mgL = m_C g L_C + m_R g\left(\frac{L_R}{2}\right)$$

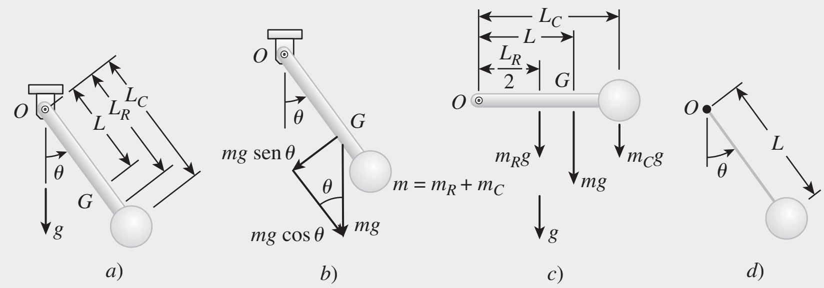


FIGURA 3-34
Péndulo de varilla y bola.

Despejando L obtenemos

$$L = \frac{m_C L_C + m_R L_R/2}{m_C + m_R}$$

b) Si despreciamos la masa de la varilla m_R en comparación con la masa concentrada m_C, podemos considerar $m_R = I_{RG} = 0$, $m = m_C$, $L = L_C$ e $I_O = mL^2$. En este caso, la ecuación de movimiento se reduce a $mL^2\ddot{\theta} = -mgL\,\text{sen}\,\theta$. Cancelando una L y la m, obtenemos $L\ddot{\theta} = -g\,\text{sen}\,\theta$. Éste es un modelo para un péndulo cuya masa se concentra a una distancia L del punto de pivote como el que se muestra en la figura 3-34*d*). Observe que esta ecuación de movimiento es independiente del valor de m.

c) Para pequeños ángulos, $\text{sen}\,\theta \approx \theta$, si θ está en radianes. Sustituyendo esta aproximación en la ecuación da $L\ddot{\theta} = -g\theta$. Ésta es una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes. La ecuación característica es $L\beta^2 = -g$. Las raíces son imaginarias: $\beta = \pm i\sqrt{g/L}$. La solución tiene la forma

$$\theta(t) = C_1\,\text{sen}\sqrt{\frac{g}{L}}\,t + C_2\cos\sqrt{\frac{g}{L}}\,t$$

La frecuencia de oscilación es $\sqrt{g/L}$ radianes/tiempo, y el periodo es $2\pi\sqrt{L/g}$. Así, un péndulo más largo, tendrá un periodo más largo.

EJEMPLO 3-20 Ecuación de movimiento de balanceo de un barco

En la figura 3-35*a*) se muestra la vista en sección transversal de un barco que experimenta un movimiento de balanceo. El principio de Arquímedes dice que la fuerza de flotación B es igual al peso del líquido desplazado. Para flotar, B debe ser igual al peso del barco $W = mg$. Por tanto, $B = W = mg$. El *metacentro* M es el punto de intersección de la línea de acción de la fuerza de flotación y la línea central del barco. La distancia h entre M y el centro de masa G se llama *altura metacéntrica*. Obtenga la ecuación que describe el movimiento de balanceo del barco en términos de θ.

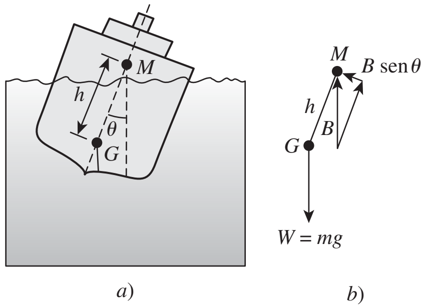


FIGURA 3-35
Movimiento de balanceo de un barco.

Solución Use el siguiente principio de las leyes de movimiento de Newton:

$$\begin{pmatrix}\text{momento másico de inercia}\\ \text{alrededor del centro de masa } G\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{aceleración}\\ \text{angular}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{suma de momentos}\\ \text{alrededor del punto } G\end{pmatrix}$$

Por el diagrama de fuerzas de la figura 3-35b, obtenemos

$$I_G\ddot{\theta} = M_G = -(B\,\text{sen}\,\theta)h$$

donde I_G es el momento másico de inercia del barco alrededor del punto G. Con $B = mg$, obtenemos $I_G\ddot{\theta} = -mgh\,\text{sen}\,\theta$. Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación del péndulo en el ejemplo 3-19, y podemos obtener un modelo lineal usando la misma aproximación $\text{sen}\,\theta \approx \theta$. Esto da $I_G\ddot{\theta} = -mgh\theta$. Este modelo desprecia el arrastre sobre el casco del barco al balancearse, pero podemos usar la solución de esta ecuación para obtener un estimado preliminar de la frecuencia de balanceo del barco.

La ecuación característica es $I_G p^2 = -mgh$. Las raíces son imaginarias: $p = \pm i\sqrt{mgh/I_G}$. La solución tiene la forma

$$\theta(t) = C_1 \,\text{sen}\sqrt{\frac{mgh}{I_G}}\,t + C_2\cos\sqrt{\frac{mgh}{I_G}}\,t$$

La frecuencia de oscilación es $\sqrt{mgh/I_G}$ radianes/tiempo, y el periodo es $2\pi\sqrt{I_G/mgh}$.

TABLA 3-1

Solución general de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes.

Ecuación diferencial: $ay'' + by' + cy = 0$

Ecuación característica: $am^2 + bm + c = 0$

Raíces características: $m_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Naturaleza de m_1 y m_2	**Solución general**
Caso 1: Reales y desiguales ($m_1 \neq m_2$) $b^2 - 4ac > 0$	$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$
Caso 2: Reales e iguales ($m_1 = m_2 = m$) $b^2 - 4ac = 0$	$y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$
Caso 3: Complejos conjugados ($m_{1,2} = \alpha + i\beta$) $b^2 - 4ac < 0$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\,\text{sen}\,\beta x)$

El lector siempre debe recordar que los procedimientos de solución que se presentan en esta sección se aplican a ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes. Para una mejor referencia, en la tabla 3-1 resumimos las soluciones de tales ecuaciones para los tres casos diferentes.

Repaso de la sección

3-23C Considere una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Si todas las funciones y_1, y_2 y y_3 satisfacen esta ecuación, ¿podemos decir que cualquiera de estas funciones debe ser una combinación lineal de las otras dos?

3-24C ¿Existe una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes a la que satisfagan las funciones e^{2x}, e^{-2x} y e^{3x}?

3-25C Cuando las raíces de la ecuación característica de una ecuación lineal homogénea, de segundo orden con coeficientes constantes son complejas, ¿son necesariamente conjugadas una de otra?

3-26 Determine la solución general de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes:

a) $y'' + y = 0$ *b*) $y'' + 2y' + y = 0$ *c*) $y'' - y = 0$

(*Respuestas: a*) $y = C_1\cos x + C_2\text{sen}\, x$; *b*) $y = (C_1 + C_2x)e^{-x}$; *c*) $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$).

3-27 Determine la solución específica del siguiente problema de valor inicial:

$$y'' + 4y = 0, \qquad y(\pi) = 0 \quad \text{y} \quad y'(\pi) = 1$$

(*Respuesta:* $y = \frac{1}{2}$ sen $2x$).

3-28 Determine la solución específica del siguiente problema de valor en la frontera:

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = 100 \quad \text{y} \quad y(5) = 0$$

(*Respuesta:* $y = \frac{100}{\text{senh } 5}\,\text{senh}(5 - x)$).

3-6 ▪ TEORÍA DE LAS ECUACIONES LINEALES NO HOMOGÉNEAS

Hasta este punto nos limitamos a tratar ecuaciones lineales homogéneas puesto que son más fáciles de resolver. Ahora extendemos el análisis a ecuaciones no homogéneas. En esta sección trataremos la teoría básica de las ecuaciones no homogéneas, y en las dos secciones siguientes presentaremos un par de métodos para resolver tales ecuaciones.

Las ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden pueden expresarse como

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \tag{3-49}$$

donde se supone que las funciones $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son continuas en el intervalo de interés. Su ecuación homogénea relacionada se obtiene estableciendo $R(x) = 0$.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{3-50}$$

Las soluciones de ecuaciones no homogéneas están estrechamente asociadas con sus ecuaciones homogéneas relacionadas. El primer paso al resolver una ecuación no homogénea es obtener la solución de su ecuación homogénea relacionada y expresar esta solución como

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{3-51}$$

donde y_1 y y_2 son un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea. La función y_h representa la solución general de la ecuación homogénea relacionada, y se conoce como **solución homogénea** o **solución complementaria**. En contraste, una función que no incluye ninguna constante arbitraria y satisface toda la ecuación no homogénea se llama **solución particular**. El siguiente paso consiste en modificar la solución homogénea para que satisfaga la ecuación no homogénea dada. Esto se hace de acuerdo con el siguiente teorema:

TEOREMA 3-6 Solución general de ecuaciones lineales no homogéneas

Si y_p es una solución particular de la ecuación lineal no homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

donde las funciones P(x), Q(x) y R(x) son continuas en un intervalo $x_1 < x < x_2$, y y_h es la solución general de su ecuación homogénea relacionada, entonces la solución general de esta ecuación no homogénea en ese intervalo es

$$y = y_h + y_p = C_1y_1 + C_2y_2 + y_p \tag{3-52}$$

donde y_1 y y_2 son un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea relacionada, y C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Comprobación Sea y_p una solución particular de la ecuación no homogénea y sea y cualquiera otra solución de ésta. Entonces naturalmente cada solución satisfará la ecuación diferencial: $y_p'' + Py_p' + Qy_p = R$, y $y'' + Py' + Qy = R$. Ahora restamos la primera ecuación de la segunda. Los términos no homogéneos se cancelarán durante este proceso y obtendremos

$$(y - y_p)'' + P(y - y_p)' + Q(y - y_p) = 0$$

Por lo que la función $y - y_p$ satisface la ecuación homogénea relacionada, y debe ser igual a su solución general, $y - y_p = y_h$. O, después de reacomodar, tenemos $y = y_h + y_p$; así concluye la prueba (figura 3-36).

Por tanto, una vez que dispongamos de la solución general de la ecuación homogénea relacionada, todo lo que necesitamos hacer es determinar una solución particular y_p que satisfaga la ecuación no homogénea dada para construir su solución general (figura 3-36).

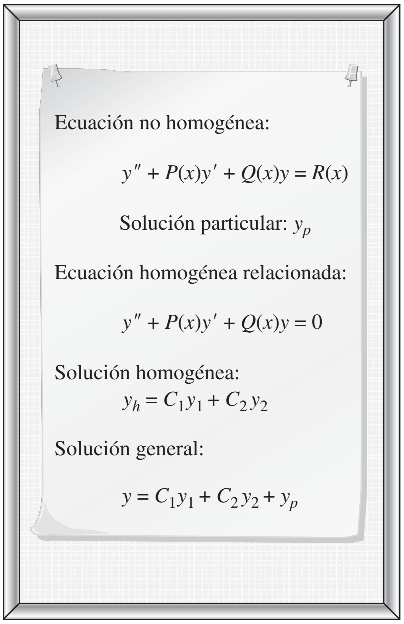


FIGURA 3-36
La solución general de una ecuación lineal no homogénea se obtiene sumando la solución homogénea y_h y una solución particular y_p la cual es una función que satisface la ecuación no homogénea.

EJEMPLO 3-21 Solución de una ecuación no homogénea

Determine la solución general de la ecuación diferencial $y'' - 4y = 8$.

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Su ecuación homogénea relacionada es $y'' - 4y = 0$, cuya solución general se determinó en el ejemplo 3-14 como $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$. Ahora necesitamos encontrar una solución particular que satisfaga la ecuación no homogénea original. Por inspección, vemos que $y = -2$ satisface la ecuación dada. Por tanto, $y_p = -2$. Entonces, por la ecuación 3-52, la solución general de la ecuación no homogénea dada resulta $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - 2$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Por sustitución directa podemos comprobar que esta solución satisface la ecuación diferencial dada. Además, todas las soluciones de tal ecuación diferencial pueden obtenerse de esta solución asignando valores adecuados a C_1 y C_2. Observe que cualquier solución de una ecuación no homogénea incluirá la solución particular, ya que es la única función que cancelará el término no homogéneo cuando se sustituya la solución en la ecuación diferencial.

Para evitar cualquier confusión, debemos señalar que una solución particular no es única. Hay muchas soluciones que satisfarán la ecuación no homogénea dada, y cualquiera de ellas puede servir como solución particular. En el ejemplo 3-21 podríamos haber elegido que la solución particular fuera $y_p = -2 + e^{2x}$, ya que una combinación lineal de cualquier par de soluciones también es una solución. Esto puede verificarse por sustitución directa. Una selección diferente para una solución particular no afecta la solución general ya que las funciones que incluyen cualquier solución de la ecuación homogénea relacionada pueden combinarse con la solución homogénea $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$, dejando únicamente que la solución particular más sencilla quede aparte de y_h (figura 3-37).

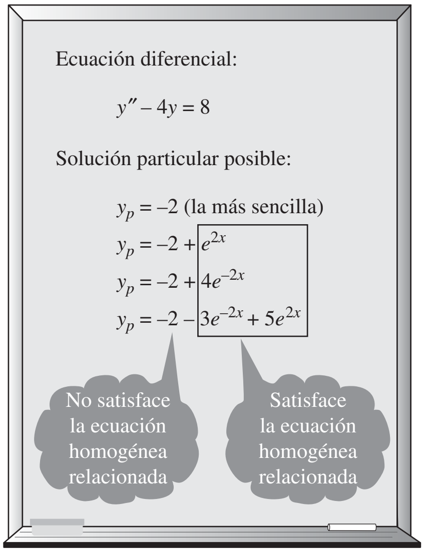


FIGURA 3-37
La solución particular de una ecuación diferencial no es única, y cualquier solución particular cumplirá la tarea. Sin embargo, es más conveniente usar la más sencilla.

El término no homogéneo *R(x)* a menudo incluye varios términos y, en tales casos, a veces resulta más cómodo encontrar una solución particular que corresponda a cada término no homogéneo, y luego sumarlos. En otras palabras, aplicar el principio de superposición. Expresamos esto en el siguiente teorema:

TEOREMA 3-7 Principio de superposición para soluciones particulares

Si y_{p1} es una solución particular de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) \quad \textbf{(3-53)}$$

y y_{p2} es una solución particular de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_2(x) \tag{3-54}$$

entonces $y_{p1} + y_{p2}$ es una solución particular de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x) \tag{3-55}$$

Comprobación Sustituyendo la suma de las dos soluciones particulares en la ecuación 3-53 resulta

$$(y''_{p1} + y''_{p2}) + P(y'_{p1} + y'_{p2}) + Q(y_{p1} + y_{p2}) = R_1(x) + R_2(x)$$

que puede reacomodarse como

$$(y''_{p1} + Py'_{p1} + Qy_{p1}) + (y''_{p2} + Py'_{p2} + Qy_{p2}) = R_1(x) + R_2(x)$$

Pero los términos en el primer paréntesis son iguales a $R_1(x)$ ya que y_{p1} es una solución de la ecuación 3-53, y los términos del segundo paréntesis son iguales a $R_2(x)$ ya que y_{p2} es una solución de la ecuación 3-54. Entonces la última ecuación se satisface; así concluye la prueba.

Este teorema es el resultado de la linealidad de la ecuación diferencial, y puede extenderse a ecuaciones cuyo término no homogéneo incluya cualquier número de términos.

EJEMPLO 3-22 Superposición de soluciones particulares

Se sabe que $y_{p1} = -2$ es una solución particular de $y'' - 4y = 8$; y que $y_{p2} = x/2$ es una solución particular de $y'' - 4y = -2x$. Compruebe que $y_p = -2 + x/2$ es una solución particular de $y'' - 4y = 8 - 2x$.

Solución Este resultado es consecuencia directa del principio de superposición de una solución particular y puede verificarse por sustitución directa (figura 3-38):

$$\begin{aligned} y''_p - 4y_p &= (-2 + x/2)'' - 4(-2 + x/2) \\ &= 0 + 8 - 2x \\ &= 8 - 2x \end{aligned}$$

Entonces y_p satisface la ecuación.

Si

$$y'' - 4y = 8 \rightarrow y_{p1} = -2$$

y

$$y'' - 4y = -2x \rightarrow y_{p2} = x/2$$

Entonces

$$y'' - 4y = 8 - 2x \rightarrow y_{p3} = -2 + x/2$$

FIGURA 3-38
Principio de superposición para soluciones particulares.

Observe que el término *solución particular* también se usa para referirse a una solución específica que satisfaga un conjunto de condiciones iniciales o en la frontera además de la ecuación diferencial. Pero el contexto normalmente clarifica el uso que se le quiere dar a la expresión.

En las siguientes dos secciones hablaremos de dos maneras sistemáticas de determinar la solución particular y_p de ecuaciones no homogéneas: el *método de coeficientes indeterminados* y el *método de variación de parámetros.*

Repaso de la sección

3-29C ¿Puede cualquier función que satisfaga la ecuación no homogénea dada, incluyendo una constante, considerarse como la solución particular y_p para usarse en la relación de solución general?

3-30C ¿Piensa usted que puede existir una ecuación diferencial lineal no homogénea cuya solución particular sea $y_p = 0$?

3-31C ¿Cuál es el valor práctico del principio de superposición para las soluciones particulares?

3-32 Determine las soluciones generales de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes, usando la solución particular dada, y exprésela en la forma más simple:

a) $y'' - y = 2, y_p = -2$ *b)* $y'' - y = 2, y_p = -2 + 3e^x$

(*Respuestas: a)* $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 2$; *b)* $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 2$).

3-7 ▪ ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS: EL MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Probablemente el método más sencillo para obtener una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea con coeficientes constantes $y'' + by' + cy = R(x)$ es el **método de coeficientes indeterminados**; el cual se basa en hacer una *conjetura razonada* respecto a la forma general de una solución particular y_p que incluya algunos coeficientes constantes desconocidos, y luego determinar estos coeficientes haciendo que la solución conjeturada satisfaga la ecuación diferencial no homogénea.

Aunque puede parecer que este método no tiene buen fundamento, puesto que implica adivinar la solución particular, hay un procedimiento bien desarrollado para el método de coeficientes indeterminados cuando la ecuación diferencial tiene coeficientes constantes, y el término no homogéneo $R(x)$ está en una forma adecuada. El requisito básico sobre $R(x)$ es que tenga solo un número finito de derivadas linealmente independientes; tal requisito lo satisface un término no homogéneo que consistente en:

1. una constante, k,
2. un polinomio, $P_n(x)$,
3. una función exponencial, e^{kx} y
4. las funciones sen αx o cos αx.

o un número finito de productos de estas funciones. Por tanto, la forma general de un término no homogéneo adecuado para el método de coeficientes indeterminados es $e^{kx}P_n(x)\cos\alpha x$ o $e^{kx}P_n(x)\,\text{sen}\,\alpha x$. El método de coeficientes indeterminados puede aplicarse en estos casos de manera sencilla (figura 3-39). Aquí k y α son constantes reales, n es un entero no negativo y $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

Aunque las funciones antes mencionadas son más bien limitadas, un amplio grupo de problemas que se encuentran en la práctica incluye solo estas funciones, de modo que esta corta lista cubre un gran número de problemas de interés práctico. Si la ecuación diferencial tiene coeficientes variables, entonces no hay garantía de que este método funcionará. O, si el término no homogéneo incluye funciones tales como $1/x$, ln x o tan x, que tienen una infinidad de derivadas linealmente independientes, el método de coeficientes indeterminados es impráctico, ya que la solución particular se necesita tomar como una serie con un número infinito de constantes desconocidas. En tales casos se debe usar el método de variación de parámetros, que explicaremos en la siguiente sección. Ahora veremos varios aspectos del método de coeficientes indeterminados, con ejemplos.

Funciones simples:

k

e^{kx}

sen αx

cos αx

$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$

Formas generales:

$e^{kx}P_n(x)$ sen αx

$e^{kx}P_n(x)$ cos αx

(k, α, β, y a son constantes reales; n es un entero no negativo)

FIGURA 3-39
Formas de los términos no homogéneos para los cuales es aplicable el método de coeficientes indeterminados.

EJEMPLO 3-23 Soluciones particulares donde $R(x) = e^{kx}$

Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial $y'' - 4y = 10e^{3x}$.

Solución Encontrar una solución particular a una ecuación diferencial es equivalente a hallar una función que satisfaga la ecuación diferencial dada.

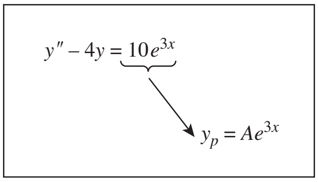


FIGURA 3-40
La forma general de la solución particular correspondiente a una función exponencial es un múltiplo constante de esa función exponencial.

En este caso, debemos elegir una función y_p tal que, cuando restemos cuatro veces la función misma de su segunda derivada obtengamos $10e^{3x}$. Obviamente, éste será el caso solo si la función y_p y sus derivadas incluyen un múltiplo constante de la función exponencial e^{3x}. Por tanto, una elección inteligente para la solución particular es (figura 3-40) $y_p = Ae^{3x}$, donde A es un coeficiente constante que está por determinarse, lo cual da origen al nombre del *método de coeficientes indeterminados*. La primera y la segunda derivadas de y_p son

$$y'_p = 3Ae^{3x}$$

$$y''_p = 9Ae^{3x}$$

sustituyendo y_p y y''_p en la ecuación diferencial, tenemos $9Ae^{3x} - 4Ae^{3x} = 10e^{3x}$ o $5Ae^{3x} = 10e^{3x}$. El único valor de A que satisfará la última expresión es $A = 2$. Por tanto, una solución particular de la ecuación diferencial dada es $y_p = 2e^{3x}$. Observe que durante el proceso de solución, conjeturamos la forma general de la función que podría satisfacer la ecuación diferencial dada, y tomamos un múltiplo constante de dicha función como la solución particular. Luego determinamos el coeficiente desconocido y, por tanto, la forma específica de la solución particular haciendo que la función supuesta satisfaga la ecuación diferencial. Éstos son pasos típicos del método de coeficientes indeterminados.

También observe que, a diferencia de las soluciones homogéneas, un múltiplo constante de una solución particular no es una solución particular.

EJEMPLO 3-24 Soluciones particulares cuando $R(x) = \text{sen}\,\alpha x$ o $\cos\alpha x$

Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial $y'' + y' - 3y = 6\,\text{sen}\,2x$.

Solución Esta vez el término no homogéneo es $R(x) = 6\,\text{sen}\,2x$. En el ejemplo anterior, la solución particular resultó ser un múltiplo constante de $R(x)$ y, por tanto, nos vemos tentados a probar $y_p = A\,\text{sen}\,2x$ para la solución particular. Sustituyendo esta función y sus derivadas en la ecuación diferencial dada obtendremos

$$-4A\,\text{sen}\,2x + 2A\cos 2x - 3A\,\text{sen}\,2x = 6\,\text{sen}\,2x$$

o

$$2A\cos 2x - 7A\,\text{sen}\,2x = 6\,\text{sen}\,2x \qquad \textbf{(3-56)}$$

Esta ecuación se satisfará para todas las x si y solo si: 1) los coeficientes de $\cos 2x$ son los mismos en ambos lados, y 2) los coeficientes de $\text{sen}\,2x$ son los mismos en ambos lados del signo igual. El primer requisito da $A = 0$, mientras que el segundo requisito da $A = -6/7$. Esto, obviamente, es una contradicción, y nos lleva a creer que la solución particular no puede ser de la forma $A\,\text{sen}\,2x$, ya que ningún valor de A satisfará la ecuación 3-56.

¿Qué es lo que estuvo mal aquí? ¿Por qué una idea que funcionó tan bien en el ejemplo anterior falló en este otro? La respuesta es sencilla: en el ejemplo anterior, las derivadas de la forma supuesta de y_p no dieron ninguna función que fuera linealmente independiente de y_p, pero en este ejemplo sí sucedió esto. En concreto, las derivadas de $y_p = Ae^{kx}$ incluyen múltiplos constantes de e^{kx}. Por tanto, el lado izquierdo de la ecuación diferencial incluye solo la función e^{kx} después de la sustitución, que es la función en el lado derecho. Pero las derivadas de $y_p = A\,\text{sen}\,kx$ no solo incluyen $\text{sen}\,kx$, sino también $\cos kx$, que es linealmente independiente de $\text{sen}\,kx$. Por tanto, la solución particular en este caso puede incluir ambas funciones, y su forma propia es (figura 3-41)

$y_p = A \text{ sen } 2x + B \cos 2x$. Sustituyendo y_p, y'_p y y''_p en la ecuación diferencial, tenemos

$$(-4A\,\text{sen}2x - 4B\cos 2x) + (2A\cos 2x - 2B\,\text{sen}2x)$$
$$-3(A\,\text{sen}2x + B\cos 2x) = 6\,\text{sen}2x$$

o
$$(-7A - 2B)\text{sen}2x + (2A - 7B)\cos 2x = 6\,\text{sen}2x$$

Igualando el coeficiente de $\text{sen } 2x$ y $\cos 2x$ en ambos lados, obtenemos $-7A - 2B = 6$ y $2A - 7B = 0$, cuya solución es $A = -42/53$ y $B = -12/53$. Por tanto, una solución particular de la ecuación diferencial dada es

$$y_p = -\frac{42}{53}\,\text{sen}\,2x - \frac{12}{53}\cos 2x$$

Bien. Parece que nuestra segunda opción para y_p funcionó, pero tiene demasiadas conjeturas. ¿Cómo podemos estar seguros de que la función que obtuvimos es la respuesta correcta? La regla es muy sencilla y tranquilizante: *si obtenemos una respuesta*, *siempre es la respuesta correcta* (suponiendo, por supuesto, que no se cometió algún error de álgebra) (figura 3-42).

Este ejemplo muestra que la forma seleccionada de la solución particular no solo debe incluir el término no homogéneo $R(x)$, sino también las funciones linealmente independientes que dan sus derivadas.

$$y'' + y' - 3y = \underbrace{6 \text{ sen } 2x}$$
$$y_p = A \text{ sen } 2x + B \cos 2x$$

FIGURA 3-41
La forma general de la solución particular correspondiente a una función seno (o coseno) incluye ambas funciones seno y coseno.

> Si el método de coeficientes indeterminados da como resultado una respuesta significativa para la solución particular, ésta siempre es la respuesta correcta.

FIGURA 3-42
Regla sencilla que alivia la ansiedad.

EJEMPLO 3-25 Soluciones particulares donde *R*(*x*) es un polinomio

Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial $y'' + 2y' - 4y = 8x^2$.

Solución Esta vez, el término no homogéneo es $R(x) = 8x^2$. Nuevamente, el primer pensamiento que viene a la mente para la forma general de la solución particular $y_p = Ax^2$, es un múltiplo constante de $R(x)$. Sin embargo, sospechamos que esto no funcionará porque la primera y la segunda derivadas de Ax^2 son $2Ax$ y $2A$, que no son múltiplos constantes de Ax^2. En otras palabras, las funciones Ax^2, $2Ax$ y $2A$, son linealmente independientes. Por tanto, la forma correcta de la solución particular es una combinación lineal de estas tres funciones (figura 3-43): $y_p = Ax^2 + Bx + C$, donde A, B y C son constantes desconocidas. Para determinarlas, calculamos la primera y la segunda derivadas de y_p y sustituimos en la ecuación diferencial dada:

$$2A + 2(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = 8x^2$$

o
$$-4Ax^2 + (4A - 4B)x + (2A + 2B - 4C) = 8x^2$$

Esta ecuación se satisfará para todas las x si y solo si los coeficientes de cada potencia de x son iguales en ambos lados de la ecuación. Dado que $8x^2$ puede considerarse como $8x^2 + 0x + 0$, este requisito da las tres ecuaciones siguientes:

$$-4A = 8$$
$$4A - 4B = 0$$
$$2A + 2B - 4C = 0$$

cuya solución es $A = -2$, $B = -2$ y $C = -2$. Por tanto, una solución particular de la ecuación diferencial dada es $y_p = -2x^2 - 2x - 2$. Este resultado puede verificarse por sustitución directa en la ecuación diferencial.

$$y'' + 2y' - 4y = \underbrace{8x^2}$$
$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

FIGURA 3-43
La forma general de la solución particular correspondiente a x^n es un polinomio de grado n.

En el método de coeficientes indeterminados, suponer muy pocos términos para y_p da como resultado una contradicción; suponer muchos términos da como resultado coeficientes cero para los términos innecesarios.

FIGURA 3-44
Otra sencilla regla para la paz mental.

Discusión 1

Descubrimos que si suponemos muy pocos términos para y_p, acabamos teniendo una contradicción. ¿Qué pasa si hacemos lo opuesto? Es decir, ¿qué sucede si suponemos demasiados términos para y_p? Por ejemplo, ¿qué pasaría su supusiéramos $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ en este ejemplo? Podemos averiguarlo muy fácilmente sustituyendo esta forma de y_p en la ecuación diferencial y despejando los cuatro coeficientes desconocidos. No sorprendería que encontráramos cero para el coeficiente de x^3, y que llegáramos a la solución particular antes determinada.

Así, concluimos que *no hay nada malo en suponer demasiados términos para* y_p*, salvo que tendremos trabajo extra, solo para descubrir que supusimos demasiados términos* (figura 3-44).

Discusión 2

Ahora tratemos de encontrar una solución particular para la ecuación diferencial cuyo término no homogéneo se modifica como $y'' + 2y' - 4y = 8x^2 - 3x + 1$. Este problema es idéntico al anterior, salvo que el término no homogéneo $R(x)$ ahora incluye dos términos adicionales. Pero $R(x)$ es todavía un polinomio de segundo grado, y las derivadas primera y segunda de las funciones x^2 y $8x^2 - 3x + 1$ incluyen las mismas funciones linealmente independientes. Por tanto, la forma general de la solución particular en este caso también es $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Se deja como ejercicio para el estudiante comprobar que la solución particular en esta ocasión es

$$y_p = -2x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{15}{8}$$

Por tanto, concluimos que *da lo mismo que la forma general de la solución particular correspondiente cuando* $R(x)$ *sea un polinomio de grado n o un solo término que incluya la potencia n de x, y es un polinomio de grado n cuyos coeficientes están por determinarse* (figura 3-45).

$$y'' + 2y' - 4y = \underbrace{8x^2 - 3x + 1}$$

o

$$y'' + 2y' - 4y = \underbrace{8x^2}$$

$$\downarrow$$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

FIGURA 3-45
La forma general de la solución particular correspondiente a x^n o $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

EJEMPLO 3-26 Superposición de soluciones particulares

Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' - 4y = 8x^2 - 3x + 1 + 2\,\text{sen}\,x + 4\cos x - 6e^{2x}$$

Solución Es difícil ignorar que el término no homogéneo $R(x)$ incluye muchos términos en este caso, y esperaríamos que la forma general de la solución particular fuera complicada. En casos como éste, lo primero que hacemos es agrupar los términos en el lado derecho, de modo que la forma general de la solución particular tenga el menor número de coeficientes desconocidos.

Por ejemplo, si consideramos juntos los tres primeros términos como un polinomio de segundo grado, la solución particular correspondiente a estos tres términos será $Ax^2 + Bx + C$, que incluye solo tres coeficientes desconocidos. Sin embargo, si consideramos cada término por separado, tendríamos que introducir seis coeficientes desconocidos para cubrir los primeros tres términos del lado derecho. Asimismo, considerando sen x y cos x como otro grupo, podemos expresar la ecuación diferencial dada como

$$y'' + 2y' - 4y = (8x^2 - 3x + 1) + (2\,\text{sen}\,x + 4\cos x) - (6e^{2x})$$

La forma correcta de la solución particular de esta ecuación es (figura 3-46).

$$y_p = (A_1x^2 + A_2x + A_3) + (B_1\,\text{sen}\,x + B_2\cos x) + Ce^{2x}$$

donde todas las constantes A, B y C son desconocidas.

Ecuación diferencial:

$$y'' + 2y' - 4y = \underbrace{x^2 + 2} - \underbrace{3\,\text{sen}\,2x} + \underbrace{e^{-x}}$$

$$y_{p1} = Ae^{-x}$$

$$y_{p2} = B_1\,\text{sen}\,2x + B_2\cos 2x$$

$$y_{p3} = C_1x^2 + C_2x + C_3$$

Solución particular:

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}$$

FIGURA 3-46
Superposición de las soluciones particulares cuando el término no homogéneo incluye tres términos de diferente naturaleza.

Ahora podríamos sustituir y_p y sus derivadas en la ecuación diferencial dada y tratar de determinar los coeficientes desconocidos. Sin embargo, para esto será necesario tratar con expresiones más largas y resolver seis ecuaciones con seis incógnitas. Un procedimiento más práctico sería partir la ecuación dada en tres ecuaciones, cada una de las cuales contenga solo un grupo de términos no homogéneos, determinar la solución particular para cada caso y combinarlas aplicando el principio de superposición. Las tres ecuaciones y sus soluciones particulares supuestas son:

1. $y'' + 2y' - 4y = 8x^2 - 3x + 1,$ $\qquad y_{p1} = A_1x^2 + A_2x + A_3$
2. $y'' + 2y' - 4y = 2\operatorname{sen} x + 4\cos x,$ $\qquad y_{p2} = B_1\operatorname{sen} x + B_2\cos x$
3. $y'' + 2y' - 4y = -6e^{2x},$ $\qquad y_{p3} = Ce^{2x}$

La primera ecuación tiene la solución particular

$$y_{p1} = -2x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{15}{8}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, el lector puede verificar que las soluciones particulares de las ecuaciones segunda y tercera son

$$y_{p2} = -\frac{2}{29}\operatorname{sen} x - \frac{24}{29}\cos x$$

$$y_{p3} = \frac{3}{2}e^{2x}$$

Entonces, la solución particular de la ecuación diferencial dada se construye usando el principio de superposición, dando

$$\begin{aligned} y_p &= y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} \\ &= -2x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{15}{8} - \frac{2}{29}\operatorname{sen} x - \frac{24}{29}\cos x + \frac{3}{2}e^{2x} \end{aligned}$$

Nuevamente, podemos verificar este resultado mediante una sustitución directa en la ecuación diferencial dada.

EJEMPLO 3-27 Soluciones particulares que son un producto de funciones

Encuentre una solución particular de la ecuación $y'' + 2y' - 4y = xe^{2x} + 5e^{2x}$.

Solución Esta ecuación se distingue de la anterior en que el primer término del lado derecho incluye el producto de dos funciones. Para tener idea de la forma adecuada de la solución particular correspondiente al primer término, calculamos su primera y segunda derivadas e identificamos las funciones linealmente independientes que incluyen:

$$\begin{aligned} R_1(x) &= xe^{2x} \\ R_1'(x) &= e^{2x} + 2xe^{2x} \\ R_1''(x) &= 2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x} \end{aligned}$$

Reconocemos dos funciones linealmente independientes en estas ecuaciones como e^{2x} y xe^{2x}. Por tanto, la forma adecuada de la solución particular correspondiente a $R_1(x) = xe^{2x}$ es una combinación lineal de ambas funciones:

$$y_p = Axe^{2x} + Be^{2x} = (Ax + B)e^{2x} \tag{3-57}$$

donde A y B son constantes desconocidas. El segundo término del lado derecho $5e^{2x}$ contribuiría una constante multiplicada por e^{2x}, que ya se incluye en la solución particular. Por tanto, la ecuación 3-57 es la forma general de la solución particular de la ecuación dada. Ahora calculamos la primera y la segunda derivadas de y_p y sustituimos en la ecuación diferencial dada.

$$
\begin{aligned}
&[(4A + 4B)e^{2x} + 4Axe^{2x}] + 2[(A + 2B)e^{2x} + 2Axe^{2x}] \\
&\quad -4[Be^{2x} + Axe^{2x}] = xe^{2x} + 5e^{2x}
\end{aligned}
$$

Igualando los coeficientes de las funciones en ambos lados de esta ecuación da:

$$
\begin{aligned}
e^{2x}&: \ 6A + 4B = 5 \\
xe^{2x}&: \ 4A = 1
\end{aligned}
$$

cuya solución es $A = 1/4$, $B = 7/8$. Por tanto, la solución particular de la ecuación diferencial dada es

$$
y_p = \left(\frac{1}{4}x + \frac{7}{8}\right)e^{2x}
$$

Nuevamente, podemos verificar este resultado sustituyéndola en la ecuación diferencial dada. Esto es una prueba suficiente de que nuestro resultado es correcto.

Discusión Observe que también podríamos determinar la forma general de la solución particular correspondiente al producto xe^{2x} determinando la forma de las soluciones particulares correspondientes a cada factor y luego tomar su producto. En este caso, sería (figura 3-47).

$$
\begin{aligned}
y_p &= (A_1x + A_2)(B_1e^{2x}) \\
&= (A_1B_1x + A_2B_1)e^{2x} \\
&= (Ax + B)e^{2x}
\end{aligned}
$$

donde consideramos $A = A_1B_1$ y $B = A_2B_1$. Por tanto, obtuvimos la misma forma general para la solución particular.

$$y'' + 2y' - 4y = xe^{2x}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\overbrace{(A_1x + A_2)} \quad \overbrace{(B_1e^{2x})}$$

$$\downarrow$$

$$(\underbrace{A_1B_1}_{A}x + \underbrace{A_2B_1}_{B})e^{2x}$$

$$\downarrow$$

Por tanto, $$y_p = (Ax + B)e^{2x}$$

FIGURA 3-47
La forma de la solución particular correspondiente a un producto puede tomarse como el producto de la solución particular correspondiente a cada factor y luego simplificarla para evitar ecuaciones algebraicas no lineales.

El procedimiento antes descrito puede usarse para productos más complicados y, entonces, es posible usar la forma simplificada de la solución particular que incluya el número mínimo de incógnitas como la forma deseada de la solución particular. Por ejemplo, la forma general de la solución particular correspondiente a $R(x) = x^2e^{-3x}$ sen $2x$ es

$$
\begin{aligned}
y_p &= (A_1x^2 + A_2x + A_3)(B_1 \operatorname{sen} 2x + B_2 \cos 2x)C_1e^{-3x} \\
&= (A_1B_1C_1x^2 + A_2B_1C_1x + A_3B_1C_1)e^{-3x} \operatorname{sen} 2x \\
&\quad + (A_1B_2C_1x^2 + A_2B_2C_1 + A_3B_2C_1)e^{-3x} \cos 2x \\
&= (D_1x^2 + D_2x + D_3)e^{-3x} \operatorname{sen} 2x + (E_1x^2 + E_2x + E_3)e^{-3x} \cos 2x
\end{aligned}
$$

Observe que el número de constantes desconocidas es el mismo tanto en la forma inicial como en la forma final de la solución particular. Sin embargo, esta última es definitivamente preferible en los cálculos porque dará seis ecuaciones algebraicas *lineales* para los coeficientes desconocidos que se pueden resolver. La forma inicial de la solución particular dará como resultado seis ecuaciones algebraicas *no lineales* para la determinación de seis constantes desconocidas que son más complicadas y difíciles de resolver.

EJEMPLO 3-28 Soluciones particulares donde $R(x)$ es una solución de su ecuación homogénea relacionada

Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial $y'' - 4y = e^{2x}$.

Solución Esta ecuación parece ser exactamente igual a la del primer ejemplo de esta sección, salvo que el término no homogéneo incluye e^{2x} en vez de e^{3x}. Por tanto, seguimos justo el mismo procedimiento y suponemos que la solución particular es $y_p = Ae^{2x}$. Calculando la segunda derivada de y_p y sustituyendo en la ecuación dada, obtenemos $4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = e^{2x}$ o $0 = e^{2x}$, lo cual es imposible (figura 3-48).

¿Qué estuvo mal esta vez? La forma supuesta de la solución particular dio cero en el lado izquierdo, indicando que es una solución de la ecuación relacionada $y'' - 4y = 0$. Efectivamente, la solución general de la ecuación homogénea relacionada es $y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$.

Es claro que el término homogéneo e^{-2x} es una solución de la ecuación homogénea, lo cual confirma nuestra sospecha. Una solución de la ecuación homogénea siempre dará cero en el lado izquierdo, por tanto, nunca podrá ser una solución de la ecuación no homogénea dada.

Esta situación puede resolverse aplicando el método de variación de parámetros que se explica en la siguiente sección, y el resultado es

$$y_p = Axe^{2x} \tag{3-58}$$

que es x veces la solución inicialmente supuesta. Sustituyendo ahora esta forma de la solución particular junto con su segunda derivada en la ecuación diferencial y despejando A obtenemos $A = 0.25$. Entonces, la solución particular que buscamos es $y_p = 0.25xe^{2x}$.

Ecuación diferencial:

$$y'' - 4y = e^{2x}$$

Considerando $y_p = Ae^{2x}$ nos da

$$0 = Ae^{2x}$$

Por tanto, e^{2x} es una solución homogénea.

FIGURA 3-48
La forma supuesta de una solución particular que casualmente es una solución de la ecuación homogénea relacionada dará siempre cero en el lado izquierdo de la ecuación diferencial.

El procedimiento descrito para manejar términos no homogéneos cuando son soluciones de la ecuación homogénea es bastante general y puede expresarse así: *cuando un término no homogéneo es una solución de la ecuación homogénea relacionada, multiplique la forma inicialmente supuesta de una solución particular por la variable independiente x* (figura 3-49).

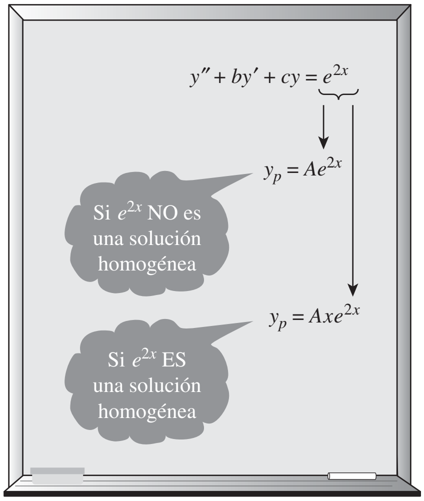


FIGURA 3-49
La forma supuesta de una solución particular que casualmente es una solución de la ecuación homogénea relacionada debe modificarse al multiplicarla por la variable independiente x.

EJEMPLO 3-29 Soluciones particulares donde $R(x)$ y $xR(x)$ son soluciones de una ecuación homogénea relacionada

Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

Solución Nuevamente, primero suponemos que la solución particular será de la forma $y_p = Ae^{2x}$. Pero al sustituir esta función y sus derivadas en la ecuación diferencial obtenemos $0 = e^{2x}$, lo cual sugiere que e^{2x} debe ser una solución de la ecuación homogénea relacionada. Por tanto, de acuerdo con el ejemplo anterior, modificamos la solución particular multiplicándola por x y obtenemos $y_p = Axe^{2x}$. Pero esta forma modificada también resulta en algo indeseado: $0 = e^{2x}$. Otra vez, esto sugiere que xe^{2x} también debe ser una solución de la ecuación homogénea relacionada. Podemos verificar esto encontrando la solución general de la ecuación homogénea relacionada, $y'' - 4y' + 4y = 0$. Efectivamente, la ecuación característica es $m^2 - 4m + 4 = 0$, cuyas raíces son $m_1 = m_2 = m = 2$. Entonces, $m = 2$ es una raíz repetida, y la solución general de la ecuación homogénea relacionada es $y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$, lo cual explica por qué e^{2x} y xe^{2x} daban cero en el lado izquierdo al sustituir en la ecuación dada. De modo que simplemente seguimos multiplicando la forma supuesta

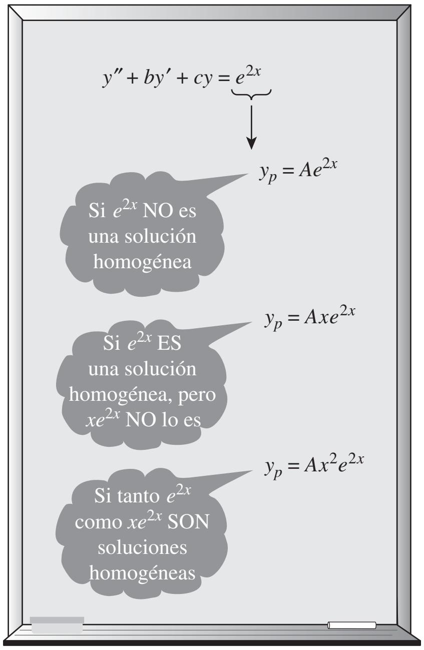


FIGURA 3-50
La forma supuesta de una solución particular que casualmente sea una solución de la ecuación homogénea relacionada debe modificarse multiplicándola por x^k, donde x es la variable independiente y k es el número entero positivo más pequeño que elimine tal duplicación.

de esta solución particular por x hasta que ya no sea una solución de la parte homogénea de la ecuación. De modo que probamos

$$y_p = Ax^2e^{2x} \tag{3-59}$$

Sustituyendo esta forma de la solución particular junto con sus derivadas primera y segunda en la ecuación diferencial dada y despejando A obtenemos $A = 0.5$. Por tanto, la solución particular que estamos buscando es $y_p = 0.5x^2e^{2x}$. Podemos resumir lo que aprendimos de los dos ejemplos anteriores así: *cuando un término no homogéneo es una solución de la ecuación homogénea relacionada, multiplique la forma inicialmente supuesta de la solución particular por la potencia más baja de la variable independiente x de manera que ningún término de la solución particular sea una solución de la ecuación homogénea* (figura 3-50).

EJEMPLO 3-30 Solución general de una ecuación no homogénea

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial $y'' - y' = x + 2$.

Solución Primero encontramos la solución general de la parte homogénea de la ecuación $y'' - y' = 0$. Su ecuación característica es $m^2 - m = 0$, cuyas raíces son $m_1 = 0$ y $m_2 = 1$. Entonces, la solución general de la ecuación homogénea relacionada es

$$y_h = C_1e^{0x} + C_2e^{1x} = C_1 + C_2e^x$$

Para la solución particular, normalmente intentaríamos $y_h = Ax + B$ pero cualquier constante (C_1 o B) es una solución de la ecuación homogénea y, por tanto, necesitamos modificar la solución particular multiplicándola por x. Entonces, la forma adecuada de la solución particular en este caso sería $y_p = x(Ax + B)$, cuyas derivadas primera y segunda son $y_p' = 2Ax + B$ y $y_p' = 2A$. Sustituyéndolas en la ecuación diferencial, obtenemos $(2A) - (2Ax + B) = x + 2$ o $-2Ax + (2A - B) = x + 2$. Igualando los coeficientes de cada potencia de x en ambos lados obtenemos

$$-2A = 1$$
$$2A - B = 2$$

cuya solución es $A = -0.5$ y $B = -3$. Por tanto, la solución particular es $y_p = x(-0.5x - 3)$. Entonces la solución general resulta $y = y_h + y_p = C_1 + C_2e^x - 0.5x^2 - 3x$.

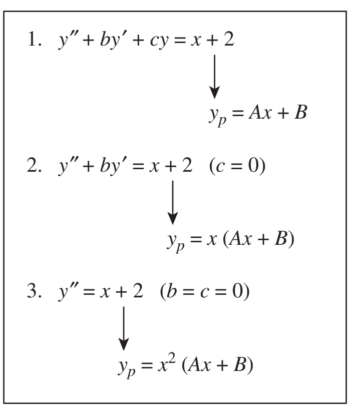


FIGURA 3-51
La forma de la solución particular de $y'' + by' + cy = E_x + F$ depende de si b o c son cero.

Observe que una constante A siempre es una solución de la parte homogénea de la ecuación diferencial $y'' + ay' = R(x)$, ya que ambas derivadas de una constante son cero, lo cual satisface automáticamente la ecuación homogénea relacionada. Asimismo, el polinomio de primer grado $Ax + B$ siempre es una solución de la parte homogénea de la ecuación diferencial $y'' = R(x)$ porque la segunda derivada de un polinomio de primer grado es cero. Por tanto, cuando $R(x)$ es un polinomio, necesitaremos multiplicar la forma supuesta de la solución particular por x en el primer caso, y por x^2 en el segundo (figura 3-51).

EJEMPLO 3-31 Un problema de valor inicial

La ecuación diferencial que rige la distribución de temperatura a lo largo de una aleta en un medio de temperatura T_{aire} está dada por $T'' - \lambda(T - T_{\text{aire}}) = 0$, que es una ecuación no homogénea. Determine la distribución de temperatura a lo largo de la aleta para $\lambda = 4$, $T(0) = 200°C$, $T'(0) = -420°C/m$ y $T_{\text{aire}} = 20°C$.

Solución Éste es un problema de valor inicial, ya que ambas condiciones se especifican en el mismo punto. Puede formularse como

$$T'' - 4T = -80$$

$$T(0) = 200$$

$$T'(0) = -420$$

La ecuación diferencial es lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, y su ecuación característica es $m^2 - 4 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $m_1 = -2$ y $m_2 = 2$, que son reales y desiguales. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea relacionada es (por la ecuación 3-32), $T(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$. El lado derecho de la ecuación es una constante, y una constante no es una solución de una ecuación homogénea relacionada. Por tanto, la forma adecuada de la solución particular en este caso es $y_p = A$. Sustituyendo en la ecuación diferencial, $0 - 4A = -80$, lo cual da $y_p = A = 20$. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial dada es $T(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + 20$. La derivada de la solución general es $T'(x) = -2C_1e^{-2x} + 2C_2e^{2x}$.

Las constantes arbitrarias se determinan aplicando las condiciones iniciales:

$$T(0) = 200 \rightarrow C_1 + C_2 = 200$$

$$T'(0) = -420 \rightarrow -2C_1 + 2C_2 = -420$$

como $e^0 = 1$. Resolviendo simultáneamente estas ecuaciones para despejar ambas incógnitas obtenemos $C_1 = -195$ y $C_2 = -15$. Sustituyendo estos valores en la solución general obtenemos la solución de este problema de valor inicial (figura 3-52).

$$T(x) = 195e^{-2x} - 15e^{2x} + 20$$

Observe que las condiciones iniciales se aplican a la *solución general* del problema de valor inicial. Las condiciones iniciales o en la frontera nunca deben aplicarse nada más a la solución homogénea ni a la solución particular. Esto porque la solución de toda la ecuación diferencial, y no solo de parte de ésta, debe satisfacer las condiciones iniciales o en la frontera.

Ecuación diferencial:

$$y'' - 4y = -80$$

Solución homogénea:

$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$$

Solución general:

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + 20$$

Ahora podemos aplicar
las condiciones iniciales.

FIGURA 3-52
Las condiciones iniciales o en la frontera deben aplicarse a la solución general de la ecuación diferencial, no solamente a su solución homogénea.

Los puntos a los que llegamos en los ejemplos anteriores pueden resumirse así:

1. El método de los coeficientes indeterminados no es un método general para encontrar las soluciones particulares de ecuaciones no homogéneas. Es simple y claro, pero su uso se limita a ecuaciones lineales con coeficientes constantes cuyos términos no homogéneos sean de la forma $e^{\alpha x}P_n(x)$ sen βx o $e^{\alpha x}P_n(x)$ cos βx, donde α y β son constantes reales y $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.
2. La forma general de la solución particular y_p correspondiente a una función no homogénea $R(x)$ que no sea una solución de la ecuación homogénea relacionada es la combinación lineal de $R(x)$ y las funciones linealmente independientes que incluyen sus derivadas. Si cualquiera de las funciones en la solución particular también es una solución de las ecuaciones homogéneas relacionadas, la forma inicialmente supuesta de la solución particular debe multiplicarse por la potencia más baja de x que elimine cualquier duplicación de las soluciones. En la tabla 3-2 se presenta la forma general de las soluciones particulares correspondientes a diversas funciones.
3. Una ecuación diferencial cuyo término no homogéneo $R(x)$ contenga muchos términos puede dividirse en varias ecuaciones, cada una de las cuales contendrá solo una parte de $R(x)$. En este caso, la solución particular se obtiene por superposición, sumando las soluciones particulares de las ecuaciones más simples.

TABLA 3-2

La forma general de la solución particular correspondiente a algunas funciones en el término no homogéneo.*

Función especificada, $R(x)$	Solución particular correspondiente, y_p
a (una constante)	A (varias constantes)
ax^n o $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0$
$a \operatorname{sen} kx$ o $a \cos kx$ o $a \operatorname{sen} kx + b \cos kx$	$A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$
$e^{cx}P_n(x)$	$e^{cx}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0)$
$ae^{cx} \operatorname{sen} kx$ o $ae^{cx} \cos kx$ o $ae^{cx} \operatorname{sen} kx + be^{cx} \cos kx$	$e^{cx}(A \operatorname{sen} kx + B \cos kx)$
$e^{cx}P_n(x) \operatorname{sen} kx$ o $e^{cx}Q_n(x) \cos kx$ o $e^{cx}P_n(x) \operatorname{sen} kx + e^{cx}Q_n(x) \cos kx$	$e^{cx}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0) \operatorname{sen} kx + e^{cx}(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \cdots + B_0) \operatorname{sen} kx$

* Si y_p o cualquier término en y_p es una solución de la ecuación homogénea relacionada, multiplique y_p por la potencia más baja de x que elimine tal duplicación.

4. Una ecuación no homogénea puede tener varias soluciones particulares, y todas ellas pueden servir. Cualquier combinación de una solución particular y una solución de la ecuación homogénea relacionada también es una solución particular.
5. El método de coeficientes indeterminados se corrige por sí solo. Cuando se suponen muy pocos términos para la solución particular, resulta una contradicción. Cuando se suponen demasiados términos, resultan ceros para los coeficientes de los términos innecesarios. Obtener valores únicos para los coeficientes desconocidos es una señal segura de que la forma supuesta de la solución particular es correcta.
6. Cualquier condición inicial o en la frontera debe aplicarse a la solución general de la ecuación no homogénea, que es la suma de la solución homogénea y la solución particular. Nunca deben aplicarse solo a la solución general de la ecuación homogénea relacionada.

Repaso de la sección

3-33 C ¿En qué condiciones corresponde la forma general de una solución particular y_p a un término no homogéneo $R(x)$ de la forma $AR(x)$, donde A es una constante?

3-34C ¿Son diferentes las formas generales de la solución particular y_p correspondientes a los términos no homogéneos x^3 y $x^3 - 4x + 2$?

3-35C ¿Por qué no es adecuado el método de coeficientes indeterminados cuando el término no homogéneo incluye la función ln x?

3-36C En el método de coeficientes indeterminados, ¿qué sucede si suponemos demasiados términos para la forma general de la solución particular? ¿Qué pasa si suponemos muy pocos términos?

3-37 Usando el método de coeficientes indeterminados, establezca la solución general de las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden:

a) $y'' - 4y = 4e^{3x}$ *b*) $y'' - 4y = -3x^2e^{3x}$

c) $y'' - 4y = 2e^{2x}$ *d*) $y'' - 4y = 5e^{-2x}\cos 3x$

(*Respuestas: a*) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + \frac{4}{5}e^{3x}$

b) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + \left(-\frac{3}{5}x^2 + \frac{36}{25}x - \frac{186}{125}\right)e^{3x}$

c) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x}$

d) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{15}(3\cos 3x + 4\operatorname{sen} 3x)e^{-2x}$).

3-38 Determine la solución específica del siguiente problema de valor inicial (use el método de coeficientes indeterminados para encontrar la solución particular):

$$y'' + 16y = \operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x,\ y(\pi/2) = 1,\ \text{y}\ \ y'(\pi/2) = 0$$

(*Respuesta:* $y = \frac{3}{4}\cos 4x + \frac{1}{24}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{12}\operatorname{sen} 2x$).

3-8 ▪ ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS: EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

El método de coeficientes indeterminados, que se explicó en la sección anterior, determina una solución particular de una ecuación no homogénea en forma simple y clara, pero carece de generalidad porque tiene dos limitaciones severas: la ecuación diferencial debe poseer coeficientes constantes, y los términos no homogéneos deben ser de la forma $e^{\alpha x}P_n(x)$ sen βx o $e^{\alpha x}P_n(x)$ cos βx, donde α y β son constantes reales, y $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

En esta sección describiremos un método general alterno para encontrar una solución particular de una ecuación no homogénea dada. Se llama método de **variación de parámetros** y es aplicable a ecuaciones con coeficientes constantes o variables y a términos no homogéneos que pueden tener cualquier forma. Sin embargo, se necesita que esté disponible la solución general de la ecuación homogénea relacionada. El primero en desarrollar este método fue J.L. Lagrange (1736-1813) y también se le llama **método de Lagrange**.

Considere la ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden en la forma estándar (el coeficiente principal es 1),

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \tag{3-60}$$

donde las funciones P, Q y R son continuas en el intervalo de interés. Sabemos que la ecuación homogénea relacionada $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ tiene dos soluciones linealmente independientes y_1 y y_2 en este intervalo, y la solución general de la ecuación homogénea relacionada puede expresarse como

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{3-61}$$

La idea básica detrás del método de variación de parámetros es buscar una solución particular de la forma

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 \tag{3-62}$$

la cual se obtiene reemplazando los parámetros constantes C_1 y C_2 en la solución homogénea por las funciones variables u_1 y u_2 , y luego determinando ambas funciones de manera que la ecuación 3-62 satisfaga la ecuación no homogénea (figura 3-53).

Solución homogénea:

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2$$

Forma de la solución particular:

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

FIGURA 3-53
El método de variación de parámetros se basa en reemplazar los parámetros constantes C_1 y C_2 en la solución homogénea por los parámetros variables u_1 y u_2.

Solución homogénea:

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2$$

Solución particular:

$$y_p = (u_1 + k_1)y_1 + (u_2 + k_2)y_2$$

Solución general :

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1y_1 + C_2y_2 \\ &\qquad + (u_1 + k_1)y_1 + (u_2 + k_2)y_2 \\ &= (C_1 + k_1)y_1 + (C_2 + k_2)y_2 + u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= D_1y_1 + D_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2 \end{aligned}$$

FIGURA 3-54
Las constantes de integración k_1 y k_2 de las funciones u_1 y u_2 en la ecuación 3-68 pueden omitirse, ya que estas simplemente introducen múltiplos constantes de la solución homogénea, y siempre pueden absorberse por las constantes arbitrarias de dicha solución.

Para determinar las dos funciones incógnitas necesitamos un par de ecuaciones. Una ecuación se obtiene haciendo que y_p satisfaga la ecuación diferencial 3-60. La otra ecuación se obtiene haciendo que ambas funciones satisfagan cualquier condición que impongamos. Tomaremos esa decisión en su momento para que simplifique en gran medida la determinación de u_1 y u_2.

Derivando la ecuación 3-62 con respecto a x obtenemos

$$y_p' = (u_1' y_1 + u_2' y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2') \tag{3-63}$$

ahora imponemos una segunda condición al requerir que los términos del primer paréntesis desaparezcan,

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \tag{3-64}$$

Con esta condición en vigor, derivando la ecuación 3-63 con respecto a x obtenemos

$$y_p'' = u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'' \tag{3-65}$$

Observe que la expresión y_p'' incluye solo las primeras derivadas de u_1 y u_2 como resultado de la segunda condición que impusimos. Ahora sustituimos las expresiones y_p'', y_p' y y_p en la ecuación (3-60) y reacomodamos los términos para obtener

$$u_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + u_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2) + u_1' y_1' + u_2' y_2' = R(x)$$

Pero los términos en los dos paréntesis son cero, ya que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea relacionada. Entonces, esta ecuación se simplifica a

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = R(x) \tag{3-66}$$

Las ecuaciones 3-64 y 3-66 forman un sistema de dos ecuaciones para las dos incógnitas u_1' y u_2'. Al resolver simultáneamente ambas ecuaciones obtenemos

$$u_1' = -\frac{y_2R(x)}{y_1y_2' - y_1' y_2} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{y_1R(x)}{y_1y_2' - y_1' y_2} \tag{3-67}$$

donde el denominador $y_1y_2' - y_1' y_2$ es el wronskiano $W(y_1, y_2)$, el cual nunca es cero en el intervalo especificado, ya que y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea relacionada. Por tanto, las funciones u_1 y u_2 pueden determinarse en forma única de las ecuaciones 3-67 por integración, como

$$u_1 = -\int \frac{y_2R(x)}{y_1y_2' - y_1' y_2}dx \quad \text{y} \quad u_2 = \int \frac{y_1R(x)}{y_1y_2' - y_1' y_2}dx \tag{3-68}$$

Las constantes de integración k_1 y k_2 que se muestran en la figura 3-54 no tienen importancia y pueden tomarse como cero sin ninguna pérdida de generalidad.

Resumimos el método de variación de parámetros en el siguiente teorema (figura 3-55).

Ecuación diferencial:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

Solución homogénea:

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2$$

Solución particular:

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

donde

$$u_1 = -\int \frac{y_2R(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}dx$$

$$u_2 = \int \frac{y_1R(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}dx$$

FIGURA 3-55
Pasos básicos para encontrar una solución particular usando el método de variación de parámetros.

TEOREMA 3-8 Variación de parámetros

Si las funciones y_1 y y_2 son soluciones homogéneas linealmente independientes de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \tag{3-61}$$

donde las funciones P, Q y R son continuas en el intervalo de interés, entonces una solución particular de esta ecuación diferencial no homogénea está dada por

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 \qquad \textbf{(3-63)}$$

donde

$$u_1 = -\int \frac{y_2R(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}\,dx \quad \text{y} \quad u_2 = \int \frac{y_1R(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}\,dx \qquad \textbf{(3-68)}$$

Una vez que está disponible una solución particular, la solución general de la ecuación no homogénea puede determinarse por

$$\begin{aligned} y &= C_1y_1 + C_2y_2 + y_p \\ &= C_1y_1 + C_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(3-69)}$$

A veces la solución particular obtenida de esta manera incluye términos que son múltiplos constantes de las soluciones homogéneas y_1 y y_2. Tales términos pueden omitirse en la solución, ya que la solución homogénea incluye los mismos términos con constantes arbitrarias. Por ejemplo, si las soluciones homogéneas y particulares son $y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$ y $y_p = 2x^2 + 1 + 5e^{-3x}$, entonces la solución general puede expresarse como

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + 2x^2 + 1 + 5e^{-3x} \\ &= C_1e^{2x} + (C_2 + 5)e^{-3x} + 2x^2 + 1 \\ &= C_1e^{2x} + D_2e^{-3x} + 2x^2 + 1 \end{aligned}$$

ya que una constante arbitraria a la que se suma un número sigue siendo una constante arbitraria.

Resumiendo,

1. El método de coeficientes indeterminados es operativamente más sencillo, ya que implica derivación en vez de integración, y debe preferirse cuando los coeficientes de la ecuación diferencial son constantes y el término no homogéneo $R(x)$ está en la forma indicada.
2. Si los coeficientes de la ecuación diferencial son constantes pero $R(x)$ no está en la forma indicada, entonces la solución particular puede determinarse por el método de variación de parámetros después de resolver la ecuación homogénea relacionada.
3. Si los coeficientes de la ecuación son variables, en general será difícil encontrar la solución, y usualmente implicará series infinitas.
4. Si solo está disponible una de las soluciones de la ecuación homogénea relacionada, la segunda solución homogénea puede obtenerse junto con una solución particular aplicando el método de reducción de orden a la ecuación no homogénea dada.

EJEMPLO 3-32 Variación de parámetros

Determine la solución general de la ecuación $y'' - 2y' + y = e^x/x$ para $x > 0$.

Solución El coeficiente principal de la ecuación diferencial es 1 y su término no homogéneo es $R(x) = e^x/x$. Esta función no está en forma indicada por el método de coeficientes indeterminados, de modo que usamos el método de variación de parámetros para determinar su solución particular. Pero primero necesitamos hallar la solución general de su ecuación homogénea relacionada. La ecuación característica de la ecuación homogénea relacionada es $m^2 - 2m + 1 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $m_1 = m_2 = 1$, que son reales e iguales. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea relacionada es $y_h = C_1e^x + C_2xe^x$. Considerando $y_1 = e^x$ y $y_2 = xe^x$, el wronskiano de ambas funciones (que también es el denominador de las expresiones u_1 y u_2) es

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2 = e^x(e^x + xe^x) - xe^{2x} = e^{2x}$$

Sustituyendo en la ecuación 3-68, las funciones u_1 y u_2 se determinan como

$$u_1 = -\int \frac{y_2R(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}\,dx = -\int \frac{xe^x e^x}{e^{2x}\, x}\,dx = -\int dx = -x$$

y
$$u_2 = \int \frac{y_1R(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}\,dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}}\frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

Por tanto, la solución particular (por la ecuación 3-62) es

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= -xe^x + xe^x \ln x \end{aligned}$$

Podríamos verificar este resultado sustituyéndola en la ecuación diferencial dada.

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial obtenida al combinar la solución homogénea con esta solución particular (por la ecuación 3-69) es

$$\begin{aligned} y &= C_1y_1 + C_2y_2 + y_p = C_1e^x + C_2xe^x - xe^x + xe^x \ln x \\ &= C_1e^x + (C_2 - 1)xe^x + xe^x \ln x \end{aligned}$$

o
$$y = C_1e^x + C_2xe^x + xe^x \ln x$$

donde reemplazamos $C_2 - 1$ por C_3.Las integrales para determinar las funciones u_1 y u_2 resultaron ser sencillas en este caso. Sin embargo, ésta es más la excepción que la regla.

Repaso de la sección

3-39C ¿Cuáles son las limitaciones del método de coeficientes indeterminados?

3-40C ¿En qué se basa el método de variación de parámetros?

3-41 Usando el método de variación de parámetros, determine la solución particular de las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden. Verifique los resultados del inciso *a*) usando el método de coeficientes indeterminados.

a) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$ *b*) $y'' - y' - 2y = 2^x$

(*Respuestas: a*) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + \dfrac{1}{4}e^{3x}$

b) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + \dfrac{2^x}{(\ln 2 - 2)(\ln 2 + 1)}$).

3-9 ▪ ECUACIÓN DE EULER

Hasta ahora, el énfasis de este capítulo ha estado en las ecuaciones lineales con coeficientes *constantes* porque existe un procedimiento sistemático para resolver tales ecuaciones. Sin embargo, no hay ningún procedimiento análogo para resolver ecuaciones lineales con coeficientes *variables*, salvo para algunos tipos. Un tipo de ecuación diferencial lineal que es adecuado tratar en este capítulo (porque siempre puede convertirse en una ecuación con coeficientes constantes) es la **ecuación de Euler** (también llamada *ecuación de Cauchy-Euler* o *ecuación equidimensional*), que se expresa como

$$x^2y'' + bxy' + cy = r(x) \tag{3-70}$$

donde b y c son constantes.* La característica distintiva de esta ecuación es que el coeficiente de y es una constante, el coeficiente de y' es una constante multiplicada por x y, en general, el coeficiente de la n-ésima derivada de y es un múltiplo constante de la potencia n de x. Es decir, cada término en el lado izquierdo es de la forma $kx^ny^{(n)}$ donde k es una constante (figura 3-56). La ecuación de Euler puede escribirse en la forma estándar dividiendo cada término entre el coeficiente de la derivada de orden superior,

$$y'' + \frac{b}{x}y' + \frac{c}{x^2}y = R(x), \qquad x \neq 0 \tag{3-71}$$

donde $R(x) = r(x)/x^2$. Es claro que los coeficientes de esta ecuación no son continuos en $x = 0$ y, por tanto, debemos excluir este punto de cualquier intervalo para que los teoremas fundamentales tratados antes en este capítulo sean aplicables. Asimismo, para evitar la molestia de un signo de valor absoluto, solo consideraremos el intervalo $x > 0$, a menos que especifiquemos lo contrario.

La ecuación de Euler siempre puede convertirse en una ecuación con coeficientes constantes mediante la transformación $x = e^t$, como se afirma en el siguiente teorema.

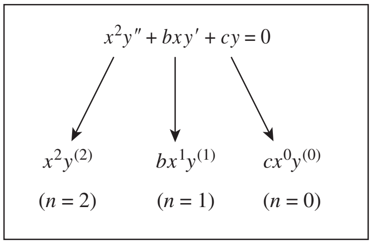


FIGURA 3-56
Cada término de una ecuación homogénea de Euler es de la forma $kx^ny^{(n)}$ donde k es una constante y n es un entero no negativo.

TEOREMA 3-9 La ecuación de Euler

La transformación $x = e^t$ siempre convertirá la ecuación de Euler

$$x^2y'' + bxy' + cy = r(x)$$

en la siguiente ecuación con coeficientes constantes:

$$\ddot{y} + (b - 1)\dot{y} + cy = r(e^t)$$

donde los puntos superiores indican derivación con respecto a t.

Comprobación Dado que para $x > 0$ tenemos $t = \ln x$, y aplicando la regla de cadena, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

* La ecuación de Euler que aquí se presenta es una *sola* ecuación y es diferente a las ecuaciones de Euler que describen el flujo de fluidos y las que describen la rotación de un cuerpo rígido.

Sustituyendo ambas expresiones en la ecuación de Euler obtenemos

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + b\frac{dy}{dt} + cy = r(e^t)$$

o

$$\ddot{y} + (b - 1)\dot{y} + cy = r(e^t) \tag{3-72}$$

Así concluye la prueba.

Si hubiéramos supuesto $x < 0$ y usado la transformación $-x = e^t$, podríamos obtener el mismo resultado. Observe que el lado derecho de la ecuación 3-72 también se vuelve una función de t reemplazando todas las apariciones de x por e^t. Este teorema puede extenderse a las ecuaciones de Euler de cualquier orden.

Una vez que una ecuación de Euler se convierte en una ecuación con coeficientes constantes, es posible resolverla de la manera establecida formando la ecuación característica de su parte homogénea,

$$m^2 + (b - 1)m + c = 0 \tag{3-73}$$

y encontrando sus raíces. Finalmente, se obtiene la solución deseada volviendo a transformar $t = \ln x$. El procedimiento se ilustra en seguida con un ejemplo.

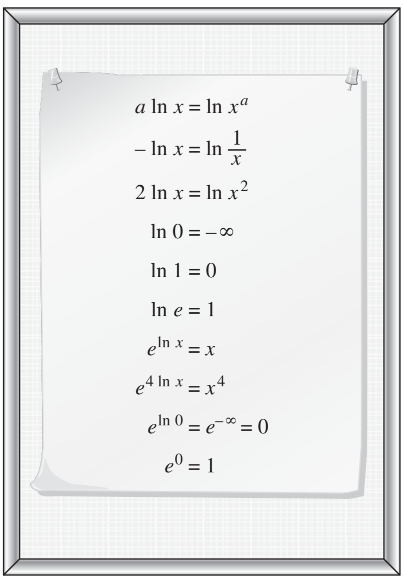


FIGURA 3-57
Recordatorio de relaciones acerca de las funciones logarítmicas y exponenciales.

EJEMPLO 3-33 **Una ecuación de Euler**

Determine la solución general de la ecuación diferencial $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$ para $x > 0$ usando la transformación $x = e^t$.

Solución Reconocemos inmediatamente que se trata de una ecuación de Euler porque cada término del lado izquierdo es de la forma $kx^ny^{(n)}$ para $n = 0$, 1 y 2. La transformación $x = e^t$ reducirá esta ecuación de Euler a (ver ecuación 3-72)

$$\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = 0$$

que es una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Su ecuación característica es $m^2 - 3m - 4 = 0$, cuyas raíces son $m_1 = -1$ y $m_2 = 4$, que son reales y distintas. De modo que la solución general de la ecuación transformada es $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{4t}$.

Dado que $e^{\ln z} = z$, la transformación inversa $t = \ln x$ da (figura 3-57)

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1e^{-\ln x} + C_2e^{4\ln x} \\ &= C_1e^{\ln \frac{1}{x}} + C_2e^{\ln x^4} \\ &= \frac{C_1}{x} + C_2x^4 \end{aligned}$$

que es la solución general de la ecuación diferencial dada.

Método alterno de solución

Ahora consideramos una alternativa del procedimiento anterior suponiendo que la solución es de la forma x^r, donde r es una constante. Sospechamos que la función x^r podría ser una solución para ciertos valores de r, ya que cuando las derivadas $y' = rx^{r-1}$ y $y'' = r(r - 1)x^{r-2}$ se sustituyen en la ecuación diferencial, todos los términos x^2y'', xy' y y incluirán la misma potencia de x, que se puede factorizar. Si obtenemos dos diferentes valores de r y, de este modo, dos soluciones linealmente independientes, este procedimiento nos dará la solución general.

Por tanto, conjeturamos que la solución será de la forma $y = x^r$ y la sustituimos con sus derivadas en la parte homogénea de la ecuación de Euler (ecuación 3-70) para obtener

$$r(r-1)x^r + brx^r + cx^r = 0$$
$$\left[r^2 + (b-1)r + c\right]x^r = 0$$

o

$$r^2 + (b-1)r + c = 0 \qquad \textbf{(3-74)}$$

como $x \neq 0$ y x^r no pueden ser cero. Observe que la ecuación 3-74 es equivalente a la ecuación característica de la ecuación transformada con coeficientes constantes, y las dos raíces de esta ecuación cuadrática son (figura 3-58)

$$r_{1,2} = \frac{-(b-1) \pm \sqrt{(b-1)^2 - 4c}}{2} \qquad \textbf{(3-75)}$$

Nuevamente, las dos raíces pueden ser reales y desiguales, reales e iguales o complejas, dependiendo de si $(b-1)^2 - 4c$ es positiva, cero o negativa. Ahora consideremos cada caso por separado.

Caso 1: Raíces reales y desiguales ($r_1 \neq r_2$)

En este caso, las dos soluciones linealmente independientes son x^{r_1} y x^{r_2}, y la solución general de la parte homogénea de la ecuación de Euler (de segundo orden) es

$$y = C_1x^{r_1} + C_2x^{r_2}, \quad x > 0 \qquad \textbf{(3-76)}$$

Caso 2: Raíces reales e iguales ($r_1 = r_2 = r$)

En este caso, el procedimiento antes descrito da solo una solución, x^r. La otra solución linealmente independiente puede obtenerse por el método de reducción de orden como $x^r \ln x$. Entonces, la solución general de la parte homogénea de la ecuación de Euler es

$$y = C_1x^r + C_2x^r \ln x, x > 0 \qquad \textbf{(3-77)}$$

Caso 3: Raíces complejas ($r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$)

En este caso, las dos raíces son necesariamente complejas conjugadas entre sí y pueden expresarse como $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Dado que $x^r = e^{\ln x^r} = e^{r \ln x}$, la solución general de la parte homogénea en este caso puede expresarse como

$$\begin{aligned} y &= Ax^{r_1} + Bx^{r_2} \\ &= Ae^{r_1 \ln x} + Be^{r_2 \ln x} \\ &= Ae^{(\alpha + i\beta)\ln x} + Be^{(\alpha - i\beta)\ln x} \\ &= e^{\alpha \ln x}\left[Ae^{i\beta \ln x} + Be^{-i\beta \ln x}\right] \end{aligned}$$

Pero $e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$ y, por la ecuación 3-47, tenemos

$$Ae^{i\beta \ln x} + Be^{-i\beta \ln x} = C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x)$$

Por tanto, la solución general de la parte homogénea de la ecuación de Euler puede expresarse como

$$y = x^\alpha\left[C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right] \qquad \textbf{(3-78)}$$

donde C_1 y C_2 son constantes (figura 3-59).

Ecuación de Euler:

$$x^2y'' + bxy' + cy = 0$$

Sustituyendo: $y = x^r$

Obtenemos:

$$r^2 + (b-1)r + c = 0$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = \frac{-(b-1) \pm \sqrt{(b-1)^2 - 4c}}{2}$$

FIGURA 3-58
Forma alternativa de resolver la ecuación de Euler.

Ecuación de Euler:

$$x^2y'' + bxy' + cy = 0$$

Sustituyendo: $y = x^r$,

$$r^2 + (b-1)r + c = 0$$

Solución general:

1. $r_1 \neq r_2$, real
   $y = C_1x_{r_1} + C_2x_{r_2}$
2. $r_1 = r_2 = r$, real
   $y = (C_1 + C_2 \ln x)\, x^r$
3. $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, compleja
   $y = x^\alpha\,[C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x)]$

FIGURA 3-59
Solución general de la ecuación de Euler homogénea en el intervalo $x > 0$ para casos diferentes.

Las soluciones dadas en estos casos son válidas solo en la región $x > 0$, ya que x^r (cuando r no es un entero) y $\ln x$ no están definidas para $x \leq 0$. Sin embargo, podemos comprobar de manera sencilla que el cambio de variable $t = -x$ (donde $t > 0$) convierte la ecuación homogénea de Euler en

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + bt\frac{dy}{dt} + cy = 0, \;\; t > 0 \qquad \textbf{(3-79)}$$

que es idéntica a la ecuación de Euler homogénea original. De modo que las soluciones anteriores son válidas para $x < 0$ siempre y cuando usemos $-x$ en vez de x. En otras palabras, usamos el valor absoluto de x ya que $|x| = x$ para $x > 0$ y $|x| = -x$ para $x < 0$. Resumimos estos resultados en el teorema 3-10.

TEOREMA 3-10 Solución general de la ecuación de Euler

La sustitución $y = x^r$ en la ecuación de Euler homogénea de segundo orden

$$x^2y'' + bxy' + cy = 0$$

produce

$$r^2 + (b - 1)r + c = 0$$

cuyas raíces son r_1 y r_2. La solución general de esta ecuación homogénea de Euler en cualquier intervalo que no contenga el origen es

$$y = C_1|x|^{r_1} + C_2|x|^{r_2} \qquad (r_1 \neq r_2,\ real) \qquad \textbf{(3-80)}$$

$$y = (C_1 + C_2\ln|x|)|x|^r \qquad (r_1 = r_2 = r,\ real) \qquad \textbf{(3-81)}$$

$$y = |x|^\alpha[C_1\operatorname{sen}(\beta\ln|x|) + C_2\cos(\beta\ln|x|)] \qquad (r_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ complejas) \qquad \textbf{(3-82)}$$

donde C_1 y C_2 son constantes. Para $x > 0$, el signo de valor absoluto puede omitirse.

Para ecuaciones de Euler no homogéneas, determinamos la solución homogénea como se describió antes, y encontramos una solución particular usando el método de variación de parámetros. Primero observe que la ecuación debe escribirse en la forma estándar, dividiendo cada término entre el coeficiente de y'' de modo que identifiquemos correctamente el término no homogéneo $R(x)$. Normalmente, el método de coeficientes indeterminados no es aplicable en este caso, ya que la ecuación de Euler tiene coeficientes variables, a menos que transformemos toda la ecuación en otra con coeficientes constantes, mediante la transformación $x = e^t$.

Por último, una ecuación de Euler de la forma

$$(x - x_0)^2y'' + b(x - x_0)y' + cy = r(x) \qquad \textbf{(3-83)}$$

puede resolverse exactamente del mismo modo tomando $y = (x - x_0)^r$ en vez de $y = x^r$. Entonces, podemos usar el teorema 3-10 para obtener la solución homogénea reemplazando todas las x por $x - x_0$. Un procedimiento alternativo es hacer un cambio de variable $t = x - x_0$, lo cual convertirá la ecuación 3-83 a la forma estándar de la ecuación de Euler. Como otra alternativa, la transformación $x - x_0 = e^t$ reducirá la ecuación 3-83 a una ecuación lineal con coeficientes constantes, la cual puede resolverse de la manera establecida (figura 3-60).

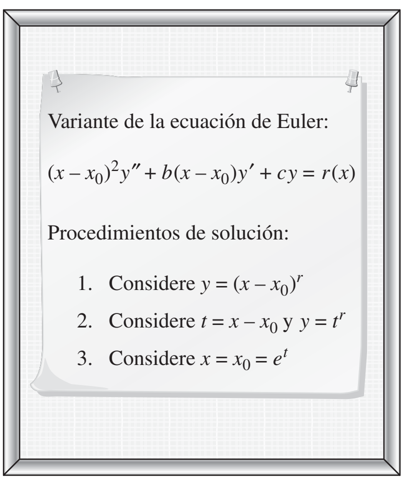


FIGURA 3-60
Tres maneras diferentes de resolver la ecuación de Euler en $x - x_0$ en vez de x.

EJEMPLO 3-34 Ecuación de Euler: comparación de métodos de solución

Determine la solución general de la ecuación de Euler $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$ para $x > 0$. Si $y = x^r$.

Solución Ésta es la ecuación de Euler que resolvimos en el ejemplo 3-33 convirtiéndola primero en una ecuación con coeficientes constantes. Ahora la resolveremos usando el método alternativo de modo que podamos comparar ambos métodos.

Dado que $y = x^r$ y sustituyendo y y sus derivadas $y' = rx^{r-1}$ y $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ en la ecuación dada obtenemos

$$r(r-1)x^2x^{r-2} - 2rxx^{r-1} - 4x^r = 0$$

$$[r(r-1) - 2r - 4]x^r = 0$$

o

$$r^2 - 3r - 4 = 0$$

ya que $x \neq 0$, x^r no puede ser cero. Observe que la ecuación anterior es idéntica a la ecuación característica obtenida en el ejemplo 3-33 y puede expresarse como $(r+1)(r-4) = 0$, cuyas raíces son $r_1 = -1$ y $r_2 = 4$, que son reales y distintas. Entonces, la solución general de esta ecuación de Euler (por la ecuación 3-80) es $y = C_1/x + C_2/x^4$, que es idéntica a la solución obtenida en el ejemplo 3-33.

Comparando los dos métodos de resolución, se concluiría que el procedimiento usado en este ejemplo es mucho más fácil y claro, ya que no implica ninguna transformación y no es necesario memorizar la forma general de la ecuación transformada con coeficientes constantes o manipulaciones prolongadas (figura 3-61).

La sustitución

$$y = x^r$$

da la solución de la ecuación de Euler

$$x^2y'' + bxy' + cy = 0$$

en forma directa y sencilla.

FIGURA 3-61
Recordatorio.

EJEMPLO 3-35 Ecuación de Euler: raíces repetidas

Determine la solución general de la ecuación diferencial $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ para $x > 0$ si $y = x^r$.

Solución Reconocemos inmediatamente que se trata de una ecuación de Euler, ya que cada término del lado izquierdo de la ecuación es $kx^ny^{(n)}$ para $n =$ 0, 1 y 2. Dado que $y = x^r$ y sustituyendo y y sus derivadas $y' = rx^{r-1}$ y $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ en la ecuación diferencial dada obtenemos

$$r(r-1)x^2x^{r-2} + 3rxx^{r-1} + x^r = 0$$

$$[r(r-1) + 3r + 1]x^r = 0$$

o

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

ya que $x \neq 0$ y, por tanto, x^r no puede ser cero. Puede expresarse como $(r+1)^2 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = r_2 = -1$, que son reales e iguales. Por tanto, la solución general de esta ecuación de Euler (por la ecuación 3-81) es $y = (C_1 + C_2 \ln x)/x$.

EJEMPLO 3-36 Ecuación de Euler: solución particular

Determine la solución general de la siguiente ecuación de Euler para $x > 0$

$$x^2y'' - 2xy' - 4y = 10x$$

Solución La solución de la parte homogénea de esta ecuación se determinó en el ejemplo 3-33 como $y_h = C_1/x + C_2x^4$. Ahora necesitamos encontrar una solución particular. Lo primero que viene a la mente es que $y_p = Ax + B$ y aplicar el método de coeficientes indeterminados, ya que el lado derecho de la ecuación incluye un polinomio que no es una solución de la ecuación homogénea relacionada. Sin embargo, no hay garantía de que funcione, porque la ecuación diferencial tiene coeficientes variables y no está en la forma estándar. Por tanto, usaremos el método de variación de parámetros para determinar la solución particular.

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre x^2 obtenemos

$$y'' - \frac{2}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = \frac{10}{x}$$

Entonces, $R(x) = 10/x$. También, por la solución homogénea, tenemos $y_1 = 1/x$ y $y_2 = x^4$. Por tanto,

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2 = \frac{1}{x}(4x^3) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)x^4 = 5x^2$$

Sustituyendo en la ecuación 3-68, las funciones u_1 y u_2 se determinan como

$$u_1 = -\int \frac{y_2R(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}dx = -\int \frac{x^4}{5x^2}\frac{10}{x}dx = -\int 2xdx = -x^2$$

y $$u_2 = \int \frac{y_1R(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}dx = \int \frac{1}{x}\frac{1}{5x^2}\frac{10}{x}dx = \int \frac{2}{x^4}dx = -\frac{2}{3x^3}$$

Entonces, la solución particular (por la ecuación 3-62) es

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = -x^2\frac{1}{x} - \frac{2}{3x^3}x^4 = -\frac{5}{3}x$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial se obtiene combinando la solución homogénea con esta solución particular: $y = C_1/x + C_2x^4 - 5x/3$. Podemos verificar este resultado sustituyéndolo en la ecuación diferencial dada.

Repaso de la sección

3-42C ¿Cuándo una ecuación diferencial es una ecuación de Euler? ¿Cómo se puede reconocer?

3-43C ¿Podemos reducir siempre las ecuaciones de Euler a ecuaciones lineales con coeficientes constantes?

3-44 Determine la solución general de las siguientes ecuaciones de Euler de segundo orden para $x > 0$, y especifique el intervalo en el que la solución es válida.

a) $x^2y'' + y = 0$ *b*) $x^2y'' + y = x + 1$

(*Respuestas: a*) $y = x^{1/2}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + C_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$

b) $y = x^{1/2}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + C_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right] + x + 1$).

3-10 ▪ APLICACIONES DE ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

En este capítulo se enfatiza la solución de ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes, de la forma

$$ay'' + by' + cy = r(x) \tag{3-84}$$

donde *a, b* y *c* son constantes, y $r(x)$ es una función continua en el intervalo de interés. Muchos problemas importantes en la ciencia y la ingeniería que no parecen relacionados, pueden describirse mediante esta ecuación, difiriendo solamente en la naturaleza de las cantidades representadas por *y, x,* los coeficientes y la función $r(x)$. Pero el procedimiento de solución y la forma de la solución general son los mismos, sin importar lo que estos símbolos representen. Por tanto, no es coincidencia que personas en diferentes ramas de la ciencia tomen el mismo curso de ecuaciones diferenciales y usen la información para resolver problemas aparentemente no relacionados en sus propias disciplinas. Esto demuestra que las matemáticas son una herramienta poderosa e indispensable para los científicos y los ingenieros de todas las ramas.

En esta sección, estudiaremos con detalle dos aplicaciones importantes en ingeniería mecánica y eléctrica que dan por resultado la ecuación 3-84: *vibraciones mecánicas* y *circuitos eléctricos.*

Vibraciones mecánicas

Antes de considerar algunos casos específicos, nos gustaría obtener la ecuación diferencial que rige los movimientos vibratorios. Cualquier ecuación que se refiera al movimiento se obtiene usando la segunda ley del movimiento de Newton. Normalmente se expresa en forma vectorial e incluye cantidades que tienen magnitud y dirección. Sin embargo, también puede expresarse en forma escalar cuando la dirección del movimiento es fija (es decir, en línea recta).

El momento de un cuerpo en cualquier dirección y en cualquier tiempo *t* es el producto de su masa *m* y la velocidad *v* en ese tiempo, en esa dirección. Podemos expresar la segunda ley de Newton así:

> *La rapidez de cambio del momento con respecto al tiempo en cualquier dirección es igual a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo en esa dirección.*

Tomando el eje *x* como la dirección del movimiento, esto puede expresarse matemáticamente como

$$\frac{d(mv)}{dt} = F_{\text{neta}},\ v = \frac{dx}{dt}$$

donde *m* es la masa del cuerpo y F_{neta} es la fuerza neta en la dirección *x*.

Si la masa *m* es constante, entonces $d(mv)/dt = m\,dv/dt$ y

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{neta}} \tag{3-85}$$

ya que $dv/dt = d^2x/dt^2$, la aceleración en la dirección *x*. La fuerza neta es una cantidad positiva si actúa en la dirección *x* positiva, y es una cantidad negativa si actúa en la dirección *x* negativa (figura 3-62).

En seguida analizaremos el movimiento vertical de una masa suspendida de un resorte lineal bajo diversas condiciones. Pero primero derivaremos la ecuación di-

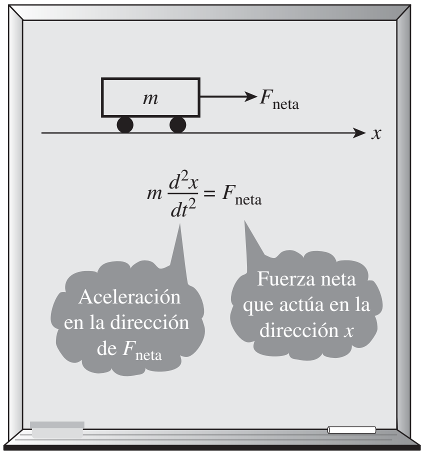


FIGURA 3-62
Segunda ley de Newton del movimiento en la dirección *x*.

ferencial que rige el movimiento vertical de una masa *m* que está suspendida de un resorte después de alejarse de su posición de equilibrio.

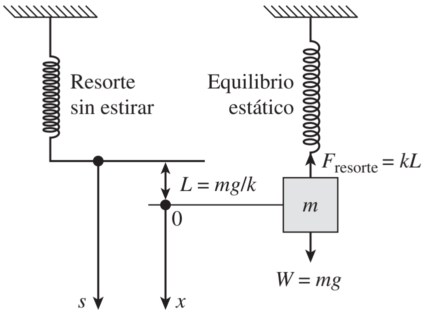


FIGURA 3-63
Una masa suspendida de un resorte lineal caerá como resultado de la gravedad (peso) y llegará a una posición estática a una distancia $L = mg/k$ de su longitud sin estirar.

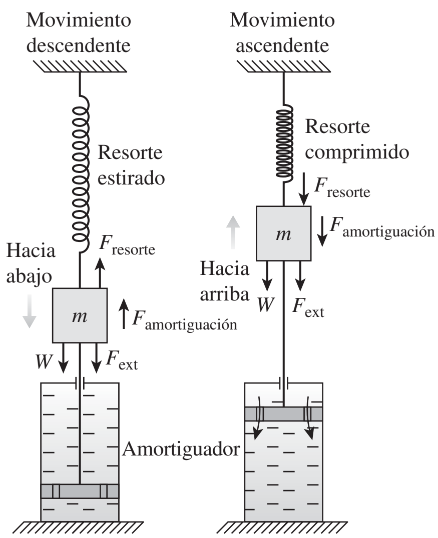


FIGURA 3-64
Fuerzas que actúan sobre una masa suspendida por un resorte en movimiento vertical.

Ecuación diferencial de vibraciones mecánicas

Considere un resorte sujetado con firmeza a un punto fijo (como un techo). Cuando el resorte no carga ningún peso, no está ni comprimido ni estirado, y se dice que está en su *longitud libre*, y su extremo libre está en posición *natural* o *sin estirar*. Suponemos que se trata de un *resorte lineal*, lo cual significa que su fuerza resistente F es proporcional a la distancia s a la que éste se estira o comprime desde su longitud libre, de modo que $F = ks$. La constante de proporcionalidad k se llama **constante del resorte**.

Cuando un cuerpo de masa m se fija al extremo inferior del resorte y éste se suelta, se estirará, y su punto extremo se moverá hacia abajo por influencia de la fuerza de gravedad actuando sobre la masa. Sin embargo, el resorte resistirá el estiramiento y, si dejamos que el punto extremo se mueva suavemente hacia abajo hasta que esta fuerza resistente sea igual a la fuerza de gravedad, la masa dejará de moverse hacia abajo y tomará una posición de equilibrio estático a una distancia L de su longitud sin estirar. En este punto, el peso mg es igual a la fuerza del resorte kL. Por tanto, la longitud del resorte aumentará en $L = mg/k$ como resultado (figura 3-63).

Ahora escogemos esta posición estática de la masa como el origen del eje x que se extiende en dirección vertical, y consideramos la dirección positiva hacia abajo. Si algún efecto perturba de alguna manera a la masa, esperaríamos que ésta oscilara (vibrara) alrededor de la posición de equilibrio en $x = 0$.

Ahora identificaremos las fuerzas que pueden actuar sobre la masa durante este movimiento (figura 3-64).

1. **Peso**. La fuerza de gravedad que actúa sobre una masa es igual a su peso W y se expresa como
$$W = mg \tag{3-86}$$
donde g es la aceleración local de la gravedad. A nivel del mar, su valor aproximado es $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Observe que el peso siempre actúa hacia abajo (la dirección x positiva) y, por tanto, es una cantidad positiva.

2. **Fuerza del resorte**. Sabemos por experiencia que estirar un resorte se dificulta conforme este se alarga cada vez más. Es decir, cuanto más estirado está el resorte, mayor es la fuerza necesaria para seguir estirándolo. Para desplazamientos relativamente pequeños, el resorte actúa como un resorte lineal. Este principio se conoce como **ley de Hooke** y fue establecido por Robert Hooke (1635-1703). La constante del resorte es una medida de la dureza del resorte, y su unidad es fuerza por unidad de longitud, como N/m, donde $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ es la unidad de fuerza llamada *newton*. Por ejemplo, la constante de resorte para un resorte que se estira 0.01 m por una fuerza de 50 N es $k = 5\,000$ N/m. La fuerza del resorte trata de restaurarlo a su longitud libre y, por tanto, ejerce una *fuerza de restauración*. Actúa hacia arriba cuando el resorte está estirado (tirando la masa hacia arriba) y hacia abajo cuando está comprimido (empujando la masa hacia abajo). En otras palabras, la fuerza de resorte es positiva cuando s es negativa, y negativa cuando s es positiva. Entonces puede expresarse como
$$F_{resorte} = -k(L + x) \tag{3-87}$$
ya que $s = L + x$ en nuestro caso (figura 3-63). Observe que esta relación es aplicable a un resorte que esté estirado o comprimido. Un resultado negativo indica que la fuerza de resorte actuará hacia arriba (en la dirección x negativa), y un resultado positivo indicará que la fuerza actuará hacia abajo (en la

dirección x positiva). Esta relación también puede usarse para resortes que se estiran o comprimen horizontalmente considerando $L = 0$. Cuando la masa suspendida del resorte está en equilibrio, las magnitudes de la fuerza de resorte y el peso de la masa deben ser iguales, ya que la fuerza neta que actúa sobre la masa es cero en el equilibrio. Por tanto,

$$kL = mg \tag{3-88}$$

ya que consideramos $x = 0$ como el punto en que la fuerza de resorte equilibra el peso.

3. **Fuerza de amortiguación**. Cuando un cuerpo se mueve en un medio que contiene un fluido, se desarrolla una *fuerza de fricción* entre el cuerpo y el fluido circundante que siempre se opone al movimiento (actúa hacia arriba cuando la masa se mueve hacia abajo, y viceversa). En algunos sistemas se conecta un componente (amortiguador) para amortiguar intencionalmente cualquier movimiento no deseado (figura 3-64). Se observa que esta fuerza de resistencia, que también se llama **fuerza amortiguadora**, es proporcional a alguna potencia de la velocidad. A bajas velocidades, la fricción puede considerarse aproximadamente, con razonable exactitud como una fuerza cuya magnitud es proporcional a la magnitud de la velocidad, y cuya dirección es opuesta a la dirección del movimiento. En tales casos, puede representarse matemáticamente como

$$F_{\text{amortiguación}} = -cv = -c\frac{dx}{dt} \tag{3-89}$$

donde c es una constante positiva llamada **constante de amortiguación**. Tiene unidades de fuerza por velocidad (N · s/m). Observe que, cuando la masa se mueve hacia abajo (en la dirección x positiva), dx/dt es positiva (por tanto, la fuerza de fricción es negativa), lo cual indica que actuará hacia arriba (en la dirección x negativa). Cuando la masa se mueve hacia arriba, dx/dt es negativa (entonces, la fuerza de fricción es positiva), lo cual indica que actuará hacia abajo. De manera que la ecuación 3-89 dará siempre la magnitud y la dirección correctas de la fuerza. El sistema que consiste en una masa suspendida en un resorte y conectada a un amortiguador frecuentemente se llama sistema *resorte-masa-amortiguador* (figura 3-65).

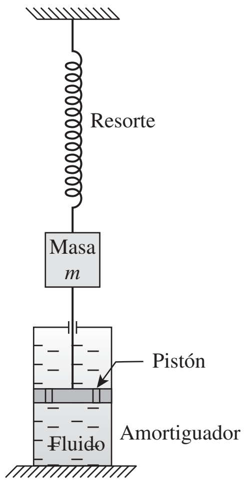


FIGURA 3-65
Ejemplo de un sistema resorte-masa-amortiguador.

4. **Fuerza externa**. Cualquier fuerza impuesta sobre la masa por una fuente externa distinta de las fuerzas de resorte y de amortiguación (como puede ser un campo eléctrico o magnético, golpear una masa con un martillo o tirar de ella con la mano) se llama **fuerza externa**, y se simboliza como F_{ext}. La fuerza externa puede ser una constante, una función periódica o cualquier función arbitraria de x, v o t. La fuerza externa es una cantidad positiva cuando actúa en la dirección x positiva, y una cantidad negativa cuando actúa en la dirección x negativa. La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es la **fuerza neta**, que se obtiene sumando todas estas fuerzas, poniendo especial atención en sus signos (direcciones),

$$\begin{aligned} F_{\text{neta}} &= W + F_{\text{resorte}} + F_{\text{amortiguación}} + F_{\text{ext}} \\ &= mg - k(L + x) - c\frac{dx}{dt} + F_{\text{ext}} \\ &= -kx - c\frac{dx}{dt} + F_{\text{ext}} \end{aligned} \tag{3-90}$$

ya que $kL = mg$ por la ecuación 3-88. Entonces, la fuerza del peso cancela la porción de la fuerza de resorte que mantiene la masa en equilibrio estático. Por tanto, podemos despreciar el peso de un cuerpo al formular problemas dinámicos sobre masas suspendidas si consideramos la posición sin estirar del resorte como la que se da cuando el resorte mantiene a la masa en equilibrio estático. Sustituyendo este resultado en la expresión de la segunda ley de Newton (ecuación 3-85), obtenemos la ecuación lineal con coeficientes constantes:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_{ext}$$

o

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{ext} \tag{3-91}$$

donde los puntos superiores indican derivadas con respecto al tiempo. Esta ecuación se obtiene usando el sistema vertical resorte-masa-amortiguador, pero también es aplicable a tales sistemas con cualquier orientación, incluyendo la horizontal (figura 3-66).

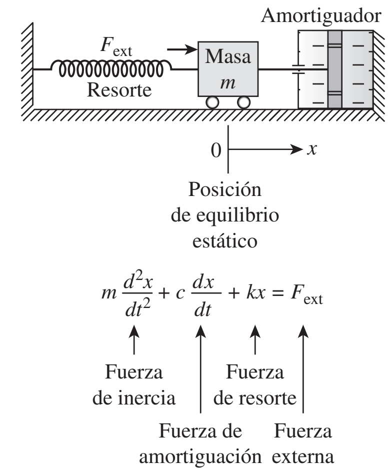


FIGURA 3-66
Ecuación diferencial que rige el movimiento de un sistema resorte-masa-amortiguador en cualquier línea recta ($x = 0$ es la posición de equilibrio estático de la masa, y $x(t)$ es la posición de la masa en el tiempo t).

Observe que si supusiéramos que la fuerza de resorte fuese proporcional a una potencia de x diferente de 1, o que la fuerza de amortiguación fuese proporcional a una potencia de velocidad diferente de 1, tendríamos finalmente una ecuación diferencial no lineal, que incluso puede no resolverse analíticamente. Entonces, cuando hacemos suposiciones de simplificación, parte de nuestro objetivo es reducir el problema a uno que pueda manejarse matemáticamente.

Cuando $c = 0$, no tenemos fricción ni amortiguación, y el movimiento se llama **no amortiguado**. En caso contrario, se llama **amortiguado**. Cuando $F_{neta} = 0$, no hay fuerza externa y el movimiento se llama **libre** o **no forzado**. En caso contrario, se dice que el movimiento es **forzado**. Como usted esperaría, la solución general de la ecuación 3-91 incluirá dos constantes arbitrarias. Por tanto, podemos especificar dos condiciones iniciales: el desplazamiento inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 para obtener una solución única de un problema.

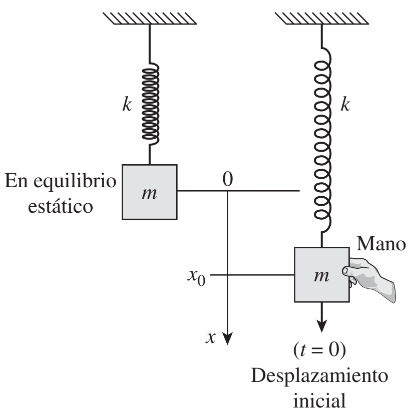


FIGURA 3-67
Esquema de un sistema masa-resorte-amortiguador que experimenta vibraciones libres sin amortiguación.

EJEMPLO 3-37 Vibraciones libres no amortiguadas

Considere un sistema resorte-masa sin fricción que está en equilibrio estático. En el tiempo $t = 0$, se tira de la masa hacia abajo hasta la ubicación x_0 y luego se libera con una velocidad v_0, como se muestra en la figura 3-67.

La masa comienza a vibrar como resultado. Tomando la posición de equilibrio de la masa como $x = 0$ y la dirección descendente como positiva, determine la posición de la masa como función del tiempo, $x(t)$ así como la amplitud y el periodo de las vibraciones.

Solución No hay fuerza externa que se oponga al movimiento y, por tanto, la ecuación 3-91 se reduce en este caso a $m\ddot{x} + kx = 0$, con $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$. Dividiendo la ecuación entre m y considerando $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, su ecuación característica resulta $r^2 + \omega_0^2 = 0$, cuyas raíces son $r = \pm i\omega_0$. Entonces, la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_0 t \tag{3-92}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Se determinan por las condiciones iniciales como $C_1 = x_0$ y $C_2 = v_0/\omega_0$. Sustituyendo, la solución de este problema de valor inicial se determina como

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t \tag{3-93}$$

Éste es, obviamente, un movimiento periódico, por la naturaleza de las funciones seno y coseno. Por comodidad, preferimos expresar esta solución en términos de una sola función trigonométrica como

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi) \tag{3-94}$$

Para determinar A y ϕ, usamos la identidad trigonométrica para $\cos(\omega_0 t - \phi)$,

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi) = A\cos\omega_0 t\cos\phi + A\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t\,\mathrm{sen}\,\phi \tag{3-95}$$

Comparando las ecuaciones 3-93 y 3-95, tenemos

$$A\cos\phi = x_0 \quad \text{y} \quad A\,\mathrm{sen}\,\phi = \frac{v_0}{\omega_0} \tag{3-96}$$

Elevando al cuadrado, sumando cada ecuación y usando la identidad $\mathrm{sen}^2\,\phi + \cos^2\phi = 1$, tenemos

$$\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + x_0^2 = A^2\mathrm{sen}^2\,\phi + A^2\cos^2\phi = A^2$$

Eligiendo la raíz cuadrada positiva para A obtenemos

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + x_0^2} \tag{3-97}$$

El ángulo ϕ se llama **ángulo de fase**, y puede determinarse dividiendo la ecuación 3-96 (la segunda entre la primera) para obtener

$$\frac{\mathrm{sen}\,\phi}{\cos\phi} = \tan\phi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}$$

y entonces

$$\phi = \tan^{-1}\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \tag{3-98}$$

siempre y cuando el ángulo se encuentre en el cuadrante correcto; es decir, satisfaga las ecuaciones 3-96. El ángulo obtenido usando las ecuaciones 3-98 puede tener una diferencia de π con respecto al que se obtiene mediante las ecuaciones 3-96, ya que $\tan(\phi + \pi) = \tan\phi$. Entonces puede ser necesario sumar o restar π del ángulo obtenido usando la ecuación 3-98 para asegurar que esté en el cuadrante especificado por las ecuaciones 3-96. Como elegimos que A sea positiva, el cuadrante correcto de ϕ puede determinarse por los signos de $\mathrm{sen}\,\phi$ y $\cos\phi$ dados por las ecuaciones 3-96. La solución es

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi) = \sqrt{\left(\frac{v_0}{w_0}\right)^2 + x_0^2}\,\cos(\omega_0 t - \phi) \tag{3-99}$$

la cual se grafica en la figura 3-68.

Derivando dos veces la ecuación 3-99 se obtiene la aceleración

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t - \phi) = -\omega_0^2 x(t)$$

Un movimiento oscilatorio como éste, donde la aceleración está en la dirección opuesta al desplazamiento y es proporcional al cuadrado de la frecuencia, se llama **movimiento armónico simple**. Dado que el coseno de un ángulo no puede ser mayor que 1, el factor A corresponde al desplazamiento máximo, llamado **amplitud** de las vibraciones. La masa oscilará continuamente entre las posiciones $x = A$ y $x = -A$. Dado que $\cos\alpha = 1$ solo cuando $\alpha = 2\pi$ (o más generalmente cuando $\alpha = 2n\pi$, donde n es un entero), los valores de t a

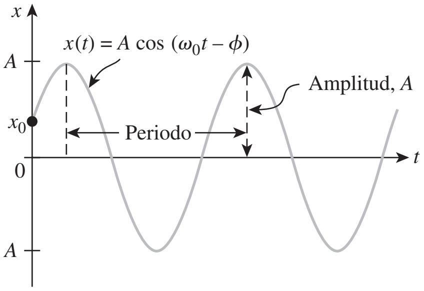


FIGURA 3-68
Vibraciones libres no amortiguadas (un movimiento armónico simple).

los que la masa estará en su posición más alta se determinan a partir de $\omega_0 t - \phi = 2n\pi$, que da

$$t = \frac{2n\pi + \phi}{\omega_0} \qquad n = 0,1,2,3, \ldots \tag{3-100}$$

El tiempo durante el cual se completa un ciclo se llama **periodo** del movimiento, y puede determinarse a partir de la relación anterior tomando la diferencia entre los tiempos en los que ocurren dos máximos consecutivos. Sustituyendo n por 1 y 0 en la ecuación 3-100, y restando, obtenemos el periodo de la oscilación como

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \ \text{s/ciclo} \tag{3-101}$$

La **frecuencia** de las oscilaciones es el número de oscilaciones por unidad de tiempo, y es igual a la inversa del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \ \text{ciclos/s} \tag{3-102}$$

cuya unidad, denominada *Hertz* (Hz) equivale al número de ciclos por segundo. Observe que, en ausencia de cualquier efecto externo, la frecuencia depende solo de las características de la masa y del resorte, y es independiente de las condiciones iniciales y de la gravedad. La frecuencia ω_0 es un ejemplo de una **frecuencia circular**, que tiene unidades de radianes por segundo. El término $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ se conoce como **frecuencia circular natural** o simplemente **frecuencia natural** del sistema. Por ejemplo, para $m = 0.1$ kg, $k = 1\,000$ N/m, $x_0 = 0.02$ m y $v_0 = 0$, las relaciones dan $A = 0.02$ m, $\sqrt{k/m} = 100\ \text{s}^{-1}$, $\phi = 0$, $T = 0.0628$ s y $f = 15.9$ Hz. La ecuación del desplazamiento en función del tiempo es $x(t) = 0.02 \cos(100t)$, donde t está en segundos y x en metros.

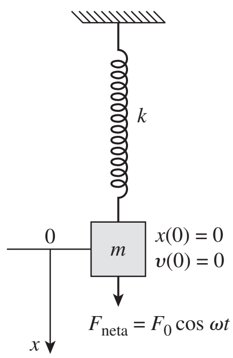


FIGURA 3-69
Esquema de un sistema resorte-masa que experimenta vibraciones forzadas sin amortiguación.

EJEMPLO 3-38 Vibraciones forzadas no amortiguadas: pulsaciones

En ocasiones, en los sistemas resorte-masa-amortiguador existen fuerzas externas impuestas sobre el sistema mecánico. En muchas aplicaciones prácticas, dichas fuerzas son de naturaleza periódica y pueden expresarse como $F_0 \cos \omega t$ o $F_0 \operatorname{sen} \omega t$ (u otras funciones periódicas), donde ω es la frecuencia circular de la fuerza impuesta y F_0, su amplitud. Por ejemplo, esta clase de fuerza externa es la que experimentaría un sistema cuando está conectado a una maquinaria rotativa ligeramente desbalanceada. Las vibraciones que el sistema experimentará, en este caso son forzadas, ya que son producidas por una fuerza externa.

Considere un sistema resorte-masa que inicialmente está en equilibrio estático ($x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$). El sistema ahora está sujeto a una fuerza externa periódica $F_0 \cos \omega t$, como se muestra en la figura 3-69.

Suponiendo que el sistema no incluye fricción ni amortiguación ($c = 0$), obtenga una relación para la posición de la masa relativa a su posición de equilibrio como función del tiempo en que $\omega \neq \omega_0$.

Solución En este caso no hay amortiguación que se oponga al movimiento, pero hay una fuerza externa; entonces la ecuación 3-91 se convierte en $m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$. Dividiéndola entre m para ponerla en la forma estándar, y considerando $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, obtenemos:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \tag{3-103}$$

La solución de la parte homogénea de esta ecuación se determinó en el ejemplo 3-37 como (ecuación 3-92)

$$x_h = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_0 t \qquad \textbf{(3-104)}$$

Tomamos la solución particular como $x_p = A \cos \omega t$, ya que $\omega \neq \omega_0$ y, por tanto, $\cos \omega t$ no es una solución de la parte homogénea de la ecuación. Asimismo, no incluimos el término $\operatorname{sen} \omega t$ en la solución particular, ya que la ecuación diferencial no contiene órdenes impares de derivadas y, por tanto, las derivadas no darán una función seno del lado izquierdo. Sustituyendo esta solución particular en la ecuación diferencial, despejando A y volviendo a sustituir, obtenemos

$$x_p = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \qquad \textbf{(3-105)}$$

Entonces, la solución general se determina sumando las soluciones homogénea y particular:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \qquad \textbf{(3-106)}$$

Aplicando las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$, las constantes arbitrarias se determinan como $C_1 = -F_0/m(\omega_0^2 - \omega^2)$ y $C_2 = 0$. Entonces, la solución general es

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \qquad \textbf{(3-107)}$$

que es la diferencia de dos funciones periódicas de diferentes periodos pero con la misma amplitud.

Ahora investiguemos lo que sucede cuando la frecuencia de la fuerza impuesta es cercana a la frecuencia natural del sistema, $\omega \approx \omega_0$. Considerando $\alpha = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ y $\beta = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)$, y usando la identidad trigonométrica

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \qquad \textbf{(3-108)}$$

la solución general también puede expresarse como

$$x(t) = \left[\frac{2F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \operatorname{sen} \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right] \operatorname{sen} \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \qquad \textbf{(3-109)}$$

Cuando $\omega \approx \omega_0$, tendremos $\omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega|$. Como resultado, la función $\operatorname{sen} \dfrac{\omega_0 + \omega}{2} t$ estará oscilando *rápidamente* con una frecuencia circular $(\omega_0 + \omega)/2$, mientras la función $\operatorname{sen} \dfrac{\omega_0 - \omega}{2} t$ estará oscilando *lentamente* con una frecuencia circular $(\omega_0 - \omega)/2$. Entonces, podemos ver la ecuación 3-109 como

$$x(t) = A(t) \operatorname{sen} \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \qquad \textbf{(3-110)}$$

donde $\operatorname{sen} \dfrac{\omega_0 + \omega}{2} t$ es una función rápidamente oscilante cuya amplitud $A(t)$ es una función periódica que varía lentamente, y que es igual a los términos de la ecuación 3-109 que están entre corchetes. Un movimiento vibratorio como éste con una amplitud que varía con lentitud pero en forma periódica se llama **pulsación** y se ilustra en la figura 3-70.

Este fenómeno se encuentra frecuentemente en la acústica, cuando dos instrumentos de frecuencias casi idénticas se tocan simultáneamente. Esto produce ondas sonoras (vibraciones) cuya amplitud varía periódicamente. Cada ciclo corresponde a una pulsación perceptible para un oído ordinario. El caso $\omega = \omega_0$ se considera en el siguiente ejemplo

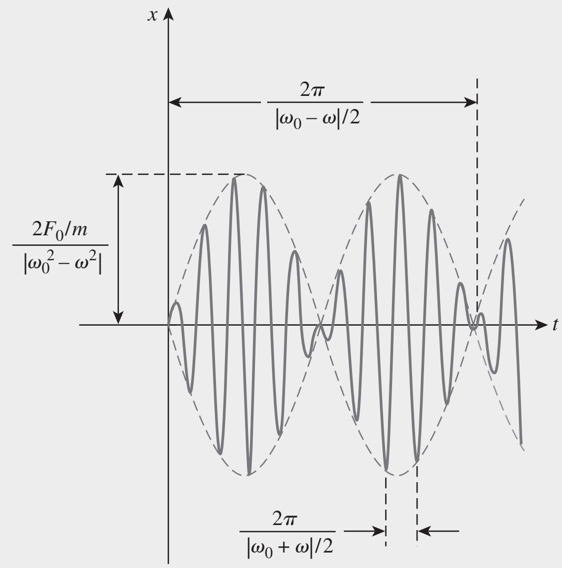


FIGURA 3-70
Vibraciones forzadas con variación periódica de la amplitud (pulsaciones).

EJEMPLO 3-39 Vibraciones forzadas no amortiguadas: resonancia

Resuelva el ejemplo 3-38 para el caso especial en que $\omega = \omega_0$.

Solución En este caso, la ecuación diferencial, las condiciones iniciales y la solución homogénea siguen iguales; pero la solución particular debe tomarse como $x_p = t(A \operatorname{sen} \omega_0 t + B \cos \omega_0 t)$, ya que el término no homogéneo $F_0 \cos \omega_0 t$ es una solución de la ecuación homogénea relacionada. Sustituyendo esta solución particular en la ecuación diferencial y despejando los coeficientes desconocidos, obtenemos $A = F_0/2m\omega_0$ y $B = 0$. Por tanto, la solución particular es

$$x_p = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen} \omega_0 t \tag{3-111}$$

Entonces, la solución general se determina sumando las soluciones homogénea y particular para obtener

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen} \omega_0 t$$

Aplicando las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$, las constantes arbitrarias se determinan como $C_1 = C_2 = 0$. Entonces, la solución general es

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen} \omega_0 t \tag{3-112}$$

La característica más notable de esta solución es el factor t, el cual hace que el desplazamiento se vuelva ilimitado cuando $t \rightarrow \infty$, como se muestra en la figura 3-71. Nuevamente, podemos ver la forma final de la solución general como

$$x(t) = A(t) \operatorname{sen} \omega_0 t \tag{3-113}$$

Ésta es una función sinusoidal de la frecuencia ω_0 y la amplitud $A(t) = (F_0/2m\omega_0)$ t, que aumenta con el tiempo. Este fenómeno de amplitud siempre creciente se conoce como **resonancia**. En este caso, la resonancia se llama *resonancia pura* o *resonancia no amortiguada*, ya que se supone que el movimiento no encuentra fricción ni amortiguación. La ecuación 3-112 implica que la amplitud del movimiento tenderá a infinito cuando $t \rightarrow \infty$. Sin embargo, en la práctica, el sistema se colapsará en algún tiempo $t = t_f$ como resultado de estas vibraciones violentas, y esa ecuación no se aplicará para $t > t_f$. Asimismo, la suposición de fuerza de resorte lineal se invalida para amplitudes grandes.

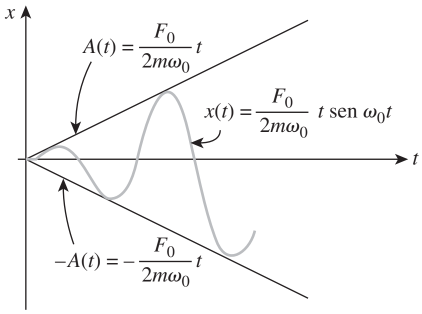


FIGURA 3-71
Vibraciones forzadas con amplitud continuamente creciente (resonancia).

El fenómeno de resonancia solo aparece en la solución particular, y sucederá sin importar cuáles son las condiciones iniciales. Esto se debe a que la solución particular con el factor t dominará el movimiento para grandes t, independientemente de los valores de las constantes C_1 y C_2 en la solución homogénea.

En la práctica, la resonancia también ocurre, hasta cierto punto, en sistemas cuya amortiguación no es suficientemente grande para contrarrestarla, y hay muchos ejemplos espectaculares de estructuras cuya destrucción se debió a la resonancia. Una estructura grande tiene muchos componentes, cada uno con frecuencia natural diferente. Es muy poco probable que toda la estructura resuene como resultado de una fuerza periódica externa. Sin embargo, la resonancia de algunos componentes claves es suficiente para destruir toda la estructura.

Por ejemplo, el puente de Broughton, cerca de Manchester, Inglaterra, colapsó en 1831 como resultado de la resonancia generada por soldados marcando el paso. Desde entonces, es práctica universal que los soldados marchen fuera de paso al cruzar puentes. Otro ejemplo es el colapso del puente de Tacoma Narrows, en el estado de Washington, el 7 de noviembre de 1940, que era el tercer puente colgante más grande del mundo. Las violentas oscilaciones de resonancia en este caso las provocó el viento. Otros accidentes recientes se debieron a la resonancia, por lo que ésta es una condición seria en el diseño de un sistema mecánico, alas de avión, edificios, pistas de baile colgantes y puentes.

El siguiente argumento puede clarificar los fenómenos de resonancia. Un sistema tiene la resistencia mínima a las oscilaciones en su frecuencia natural ω_0, ya que oscilará en ω_0 cuando no está perturbado. Cuando el efecto de una causa externa fuerza al sistema a oscilar a una frecuencia diferente, el sistema resistirá porque no se siente cómodo oscilando a una frecuencia diferente (no natural). Pero cuando la causa externa fuerza al sistema a oscilar a su frecuencia natural, el sistema se sentirá feliz de cooperar, ya que la solicitud cumple perfectamente sus características intrínsecas.

La resonancia sucede porque la fuerza externa siempre actúa en la misma dirección que la velocidad, aumentando así la amplitud. El resultado de la resonancia no siempre es la destrucción. Se usa para crear algunos efectos muy deseables en acústica, sismografía y electrónica.

EJEMPLO 3-40 Vibraciones libres amortiguadas

En cualquier sistema con partes móviles habrá fricción; por tanto, todo sistema vibrante, en la práctica, tendrá alguna amortiguación. El valor numérico de la

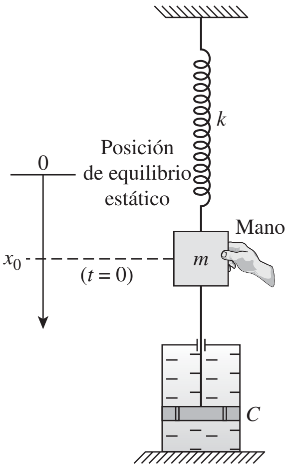


FIGURA 3-72
Esquema de un sistema resorte-masa-amortiguador que experimenta vibraciones libres con amortiguación.

constante de amortiguación C da una idea sobre la magnitud de la amortiguación. Considere un sistema resorte-masa-amortiguador que está en equilibrio estático. En $t = 0$, la masa recibe una tracción hacia abajo hasta la ubicación x_0 y luego se libera con una velocidad v_0, como se muestra en la figura 3-72. Tomando la posición de equilibrio de la masa como $x = 0$, y la dirección hacia abajo como positiva, determine la posición de la masa en función del tiempo, $x(t)$.

Solución No hay ninguna fuerza externa aplicada. Por tanto, la ecuación 3-91 se reduce en este caso a $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ con $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$. La ecuación diferencial es lineal, homogénea y con coeficientes constantes. Su ecuación característica es $mr^2 + cr + k = 0$, cuyas raíces son

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Entonces, la naturaleza de la solución dependerá de si $c^2 - 4mk$ es positiva, cero o negativa. En seguida consideraremos cada caso por separado.

Caso 1: $c^2 - 4mk > 0$ (movimiento sobreamortiguado)

En este caso, las raíces son reales y distintas, por tanto, la solución general es

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \tag{3-114}$$

Considerando que $\sqrt{4mk} < c$ y, por tanto, $\sqrt{c^2 - 4mk} < c$, ambos exponentes son negativos en este caso, sin importar las condiciones iniciales. Al aumentar t, ambos términos disminuirán debido a los exponentes negativos, y $x(t)$ tenderá a cero cuando $t \to \infty$. Es decir, la masa se moverá hacia su posición de equilibrio estático sin oscilar. Se dice que la masa está **sobreamortiguada** en este caso, debido a la gran constante de amortiguación y, por tanto, una gran fuerza de amortiguación. La forma exacta de la función de desplazamiento dependerá de las condiciones iniciales.

En la figura 3-73 se grafican tres posibilidades para una posición inicial fija x_0, pero velocidades iniciales diferentes. La curva (a) ocurrirá si se aplica v_0 en la dirección x positiva. La masa se moverá más hacia abajo por la influencia de la velocidad inicial, pero se moverá de regreso a su posición de equilibrio estático en $x = 0$ como resultado de la fuerza restauradora del resorte. Una fuerza de amortiguación grande evitará toda oscilación. Para la curva (b), la velocidad inicial es cero. Para la curva (c), la velocidad inicial se dirige en la dirección x negativa. En este caso, la masa pasa por la posición de equilibrio y luego regresa a ésta.

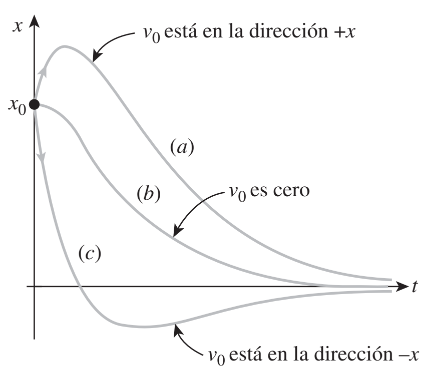


FIGURA 3-73
Posibilidades para el movimiento sobreamortiguado y críticamente amortiguado, dependiendo de la dirección de la velocidad inicial, v_0.

Caso 2: $c^2 - 4mk = 0$ (movimiento críticamente amortiguado)

Aquí, las raíces son reales e iguales y, por tanto, la solución general es

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-ct/2m} \tag{3-115}$$

En este caso se dice que la masa está **críticamente amortiguada** porque la fuerza amortiguadora es apenas suficiente para evitar el inicio de cualquier oscilación. Un valor ligeramente menor de la constante de amortiguación c permitirá oscilaciones, y un valor ligeramente mayor de c hará que el movimiento esté sobreamortiguado. Por tanto, éste es el caso límite entre los movimientos sobreamortiguados y subamortiguados. Nuevamente, al aumentar t, ambos términos disminuirán debido al exponente negativo, y $x(t)$ tenderá a cero cuando $t \to \infty$. Aunque el factor t en el segundo término lo hará crecer al aumentar t, el factor exponencial disminuye más rápidamente que este aumento y, como resultado, la masa se moverá hacia su posición de equilibrio estático en $x = 0$. Esto se debe a que la expansión de serie para e^{at} es

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \cdots + \frac{(at)^n}{n!} + \cdots$$

Por tanto,

$$\lim_{t\to\infty} te^{-at} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{at}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \cdots + \frac{(at)^n}{n!} + \cdots} = 0$$

La forma exacta de la función de desplazamiento dependerá de las condiciones iniciales. Las tres posibilidades consideradas en el caso 1 y graficadas en la figura 3-73 también son aplicables en este caso.

Caso 3: $c^2 - 4mk \leqslant 0$ (movimiento subamortiguado u oscilatorio)

En este caso, las raíces son

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

y la solución es

$$x(t) = e^{-ct/2m}\left(C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}\,t + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}\,t\right) \qquad \textbf{(3-116)}$$

Aquí, la masa oscilará debido a las funciones seno y coseno, pero la amplitud de las oscilaciones se hará cada vez más pequeña al aumentar t, debido al factor exponencial $e^{-ct/2m}$. Aunque el movimiento es oscilatorio, no es periódico; es decir, el tiempo entre los picos no es constante. Debido a las oscilaciones, se dice que la masa está **subamortiguada** en este caso. Esto se debe a una constante de amortiguación relativamente pequeña y, por tanto, a una ligera fuerza de amortiguación. La ecuación 3-116 también puede expresarse como

$$x(t) = Ae^{-ct/2m} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}\,t - \phi\right) \qquad \textbf{(3-117)}$$

donde $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ y ϕ es el ángulo cuyo seno y coseno están dados por sen $\phi = C_1/A$ y cos $\phi = C_2/A$. La ecuación 3-117 se grafica en la figura 3-74.

Dado que, como el coseno de un ángulo no puede ser mayor que 1, el factor $Ae^{-ct/2m}$ corresponde al desplazamiento máximo, entonces una gráfica de este factor junto con su contraparte negativa forma una envolvente que rodea las oscilaciones, como se muestra en la figura 3-74.

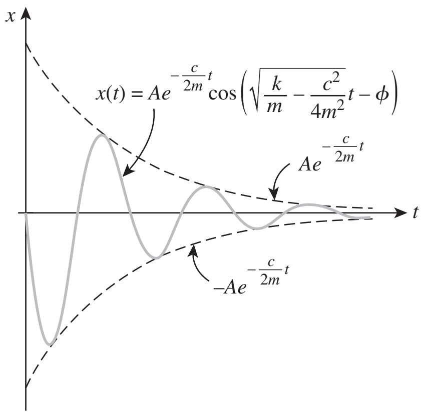


FIGURA 3-74
Vibraciones libres en presencia de amortiguación (movimiento subamortiguado).

EJEMPLO 3-41 Vibraciones forzadas amortiguadas

Considere un sistema resorte-masa-amortiguador que está inicialmente en equilibrio estático ($x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$). El sistema se somete ahora a una fuerza externa periódica $F_0 \cos \omega t$, como se muestra en la figura 3-75.

Obtenga una relación para la posición de la masa relativa a la posición de equilibrio, en función del tiempo, en la presencia de amortiguación $c \neq 0$.

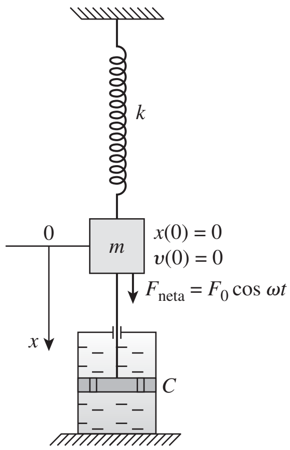


FIGURA 3-75
Esquema de un sistema resorte-masa-amortiguador que experimenta vibraciones forzadas con amortiguación.

Solución En este caso se aplican tanto la amortiguación como la fuerza externa. Por tanto, la ecuación 3-91 se aplica como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Dividiéndola entre m para escribirla en la forma estándar y considera $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, tenemos

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \tag{3-118}$$

La solución de la parte homogénea de esta ecuación se determinó en el ejemplo anterior como

$$x_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \tag{3-119}$$

donde r_1 y r_2 son

$$r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

que pueden ser reales y distintas, reales e iguales o complejas, dependiendo de si $c^2 - 4mk$ es positiva, cero o negativa. Tomamos la solución particular como

$$x_p = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$$

Sustituyendo esta solución particular en la ecuación diferencial, despejando A y B y sustituyéndolas nuevamente en la solución particular, obtenemos

$$x_p = \frac{F_0}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}\left[m(\omega_0^2 - \omega^2)\cos \omega t + c\omega \operatorname{sen} \omega t\right] \tag{3-120}$$

La solución particular puede expresarse en forma más conveniente como

$$x_p = \frac{F_0 \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \tag{3-121}$$

donde $$\phi = \tan^{-1}\frac{c\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \qquad 0 \le \phi \le \pi$$

Observe que la solución particular es una función armónica simple con periodo $2\pi/\omega$ y amplitud $F_0/\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}$, que son constantes. Entonces, el sistema tiene la misma frecuencia que la función de fuerza, pero se retrasa en el ángulo de fase. La solución general se obtiene combinando las soluciones homogénea y particular:

$$x = x_h + x_p = (C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}) + \frac{F_0 \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \tag{3-122}$$

Nuevamente, la parte homogénea de la solución se debe al desplazamiento inicial, y siempre declina rápidamente con el tiempo como resultado de la amortiguación. Cuando $t \to \infty$, tendremos que $x_h \to 0$; de modo que,

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \quad \text{cuando } t \to \infty \tag{3-123}$$

Por tanto, es correcto llamar **solución transitoria** a la solución homogénea, y **solución de estado estacionario** a la solución particular, ya que x_h se extingue después de un tiempo, pero x_p persiste indefinidamente (figura 3-76).

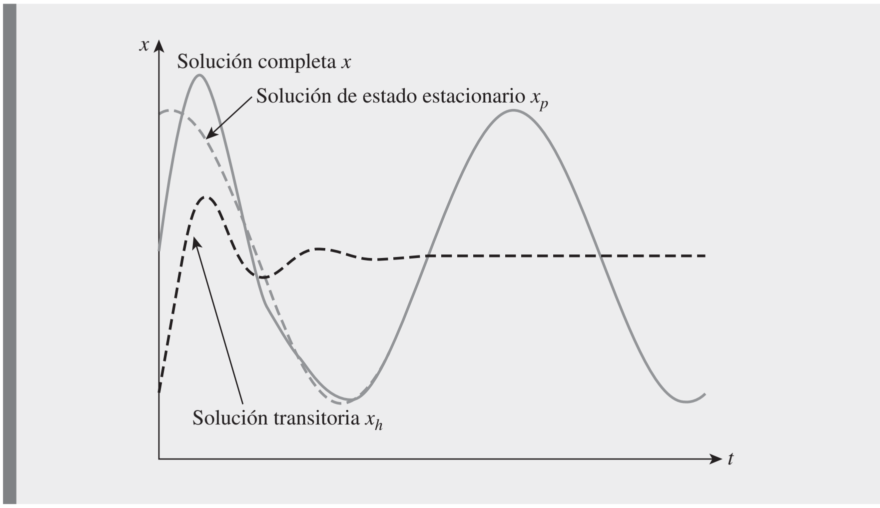


FIGURA 3-76
En vibraciones forzadas con amortiguación, la solución homogénea se debe al desplazamiento inicial (condiciones iniciales), y se amortigua, dejando la solución particular debida a la fuerza externa (el término no homogéneo) como solución única de la ecuación.

Discusión

Probablemente se pregunte si puede haber resonancia en presencia de amortiguación, $c \neq 0$. En primer lugar, nunca hay resonancia pura, ya que el término no homogéneo $F_0 \cos \omega t$ nunca será una solución de la ecuación homogénea relacionada. Por tanto, la solución particular correspondiente nunca incluirá ese factor. Por tanto, los desplazamientos de un sistema resorte-masa-amortiguador siempre son limitados. Pero bajo algunas condiciones, la amplitud podría aumentar tanto que cause el mismo daño que la resonancia pura, como explicaremos. La solución de estado estacionario (ecuación 3-123) puede reacomodarse en la forma

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi) \tag{3-124}$$

donde

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \tag{3-125}$$

es la amplitud de las oscilaciones desde $0 \leq \cos \alpha \leq 1$ para cualquier ángulo α. Lo primero que nos gustaría saber es si la amplitud A puede, en algún momento, volverse infinita; de modo que vemos su denominador. Es claro que el denominador no puede ser cero aunque $\omega = \omega_0$; por tanto, la amplitud no puede volverse infinita. Esto elimina la posibilidad de resonancia pura en tanto que $c \neq 0$. El caso $c = 0$ no es una posibilidad realista, ya que todo sistema incluye inherentemente alguna amortiguación. En seguida nos gustaría saber qué tan grande puede volverse A, ya que una amplitud mayor que un nivel seguro es tan destructiva como la resonancia pura. Para averiguarlo, necesitamos determinar el valor de ω que minimice el denominador $Z = m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2$, ya que la amplitud será máxima cuando su denominador sea mínimo. El valor de ω que minimiza el denominador Z se determina derivando Z con respecto a ω, manteniendo constantes k, c y ω_0 y luego igualando la derivada a cero. Despejando ω de la expresión resultante, obtenemos $\omega = 0$ y

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2} = \frac{k}{m}\left(1 - \frac{c^2}{2k}\right) \tag{3-126}$$

La segunda derivada de Z en este valor de ω es positiva si $2mk - c^2 > 0$, lo cual indica que este valor de ω minimiza el denominador Z y, por tanto, maximiza la amplitud A (figura 3-77).

$$Z = m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \omega} = (4m^2\omega^2 + 2c^2 - 4m^2\omega_0^2)\omega$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \omega} = 0 \rightarrow \omega = 0 \text{ y } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2}}$$

También,

$$\left.\frac{\partial^2 Z}{\partial \omega^2}\right|_{\text{con } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2}}} = 4(2mk - c^2)$$

Por tanto, Z es un mínimo con $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - c^2/2m^2}$ si $2mk - c^2 > 0$, y, por tanto, la amplitud es un máximo.

FIGURA 3-77
Comprobación de que la amplitud es un máximo con $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - c^2/2m^2}$.

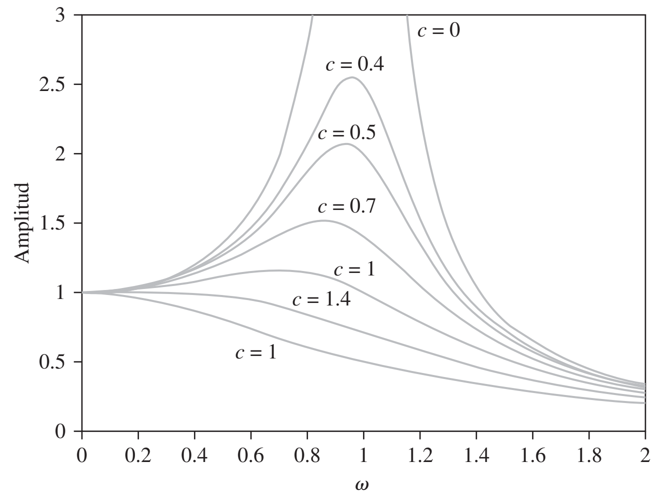


FIGURA 3-78
La variación de la amplitud A con la frecuencia de la fuerza externa, con valores $m = k = F_0 = 1$ para varios coeficientes de amortiguación.

Pero si $c^2/2mk > 1$, entonces $\omega = 0$ dará la amplitud máxima. Sustituyendo la relación de ω en la ecuación 3-126 en la ecuación 3-125, obtenemos la amplitud máxima

$$A_{\text{máx}} = \frac{F_0}{c\omega_0} = \frac{F_0}{c}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{3-127}$$

Observe que cuanto menor es la constante de amortiguación, mayor será la amplitud. La amplitud tenderá al infinito cuando $t \to \infty$. Asimismo, los sistemas que tienen una alta frecuencia natural tienden a permitir menores amplitudes. La variación de amplitud con la frecuencia circular de la fuerza aplicada se grafica en la figura 3-78 para $m = 1$, $k = 1$ y $F_0 = 1$. Observe que, para $c > \sqrt{2km}$, la amplitud siempre disminuye al aumentar ω.

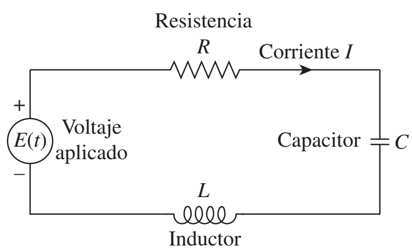


FIGURA 3-79
Un circuito *RLC* (resistencia-inductancia-capacitancia).

Circuitos eléctricos

Otra aplicación importante de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes está en los circuitos eléctricos en serie, llamados también circuitos eléctricos en serie *RLC*, que se encuentran frecuentemente en la ingeniería eléctrica. Un circuito así usualmente incluye un *resistor*, cuya resistencia es R ohmnios (Ω), un *capacitor*, cuya capacitancia es C faradios (F), y un *inductor* (o bobina), cuya inductancia es L henrios (H), como se muestra en la figura 3-79.

El voltaje $E(t)$ llega al circuito mediante una batería, un generador, señales de radio o de TV o, simplemente, la electricidad doméstica. Una batería suministra un voltaje constante de magnitud E_0, mientras que un generador suministra un voltaje periódico que puede expresarse como $E_0 \cos \omega t$, o E_0 sen ωt, donde la constante E_0 es la amplitud del voltaje en voltios (V) y ω es su frecuencia (circular). La cantidad que interesa principalmente en este circuito eléctrico es la corriente, que se define como la cantidad de carga eléctrica Q que fluye por unidad de tiempo.

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{3-128}$$

La corriente I que fluye por un circuito está determinada por la **ley de Kirchhoff**: *la suma de las caídas de voltaje en un circuito de un solo lazo es igual al voltaje aplicado.* Usted recordará de la física que un voltaje a través de un resistor es proporcional a la corriente y se expresa como

$$E_{\text{caída en resistor}} = IR \qquad (\text{voltio} = \text{amperio} \times \text{ohmnio}) \tag{3-129}$$

donde la constante de proporcionalidad R se llama **resistencia**, cuya unidad es el *ohmnio*. Los inductores son bobinas hechas de materiales altamente conductores (como cobre), y se usan comúnmente en los motores eléctricos y en los transformadores. Un inductor prácticamente no ofrece resistencia al flujo de electrones cuando la corriente es constante. Pero se opone a los cambios en la corriente, causando así una caída de voltaje a través del inductor que es proporcional a la rapidez de cambio de la corriente. Entonces tenemos

$$E_{\text{caída en inductor}} = L\frac{dI}{dt} \quad (\text{voltio} = \text{henrio} \times \text{amperio/s}) \tag{3-130}$$

donde la constante de proporcionalidad L se llama **inductancia**, cuya unidad es el *henrio*. Un capacitor puede visualizarse como un dispositivo de almacenamiento que puede regular el flujo de corriente en un circuito almacenando o liberando la carga eléctrica Q. La cantidad de carga almacenada en un capacitor en cualquier instante es proporcional a la caída de voltaje a través del capacitor, y puede expresarse como

$$Q = CE_{\text{caída en capacitor}}$$

o

$$E_{\text{caída en capacitor}} = \frac{Q}{C} \quad (\text{voltio} = \text{colombio/faradio}) \tag{3-131}$$

donde la constante C se llama **capacitancia**, cuya unidad es el *faradio*. Entonces, por la ley de Kirchhoff, la ecuación diferencial que rige la variación de flujo de corriente en un circuito cerrado con respecto al tiempo resulta

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t) \tag{3-132}$$

La ecuación diferencial no está escrita en una forma útil, ya que incluye dos variables dependientes I y Q. Sin embargo, podemos reducir el número de variables dependientes a una eliminando I mediante la relación $I = dQ/dt$:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t) \tag{3-133}$$

La ecuación diferencial en la otra variable dependiente I puede obtenerse diferenciando la ecuación 3-132 con respecto a t y usando nuevamente la relación $I = dQ/dt$ (figura 3-80),

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE(t)}{dt} \tag{3-134}$$

Las propiedades eléctricas R, L y C, en general, pueden depender de la corriente. Entonces las ecuaciones 3-133 y 3-134 pueden volverse no lineales. Sin embargo, la dependencia de estas propiedades con respecto a la corriente es muy moderada y pueden tratarse como constantes en la mayoría de los problemas prácticos. Por tanto, estas dos ecuaciones son diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes. La semejanza entre la ecuación 3-133 y la 3-91 que rige las vibraciones mecánicas es notable. Aunque físicamente son dos mundos distintos, matemáticamente son idénticas y, por tanto, tienen la misma forma de solución. Las soluciones obtenidas antes para los sistemas mecánicos, así como para los conceptos de pulsación, resonancia, frecuencia natural, oscilaciones amortiguadas, amortiguación crítica y solución de estado estacionario también son aplicables a los sistemas eléctricos, con la interpretación adecuada. La correspondencia uno a uno entre las cantidades mecánicas y eléctricas se llama **analogía electromecánica**, y está dada en la tabla 3-3.

En $I(t)$ y $Q(t)$:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

En $Q(t)$:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

En $I(t)$:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE(t)}{dt}$$

FIGURA 3-80
Varias formas de la ecuación diferencial que describe un circuito *RLC*.

La solución general de la ecuación diferencial incluirá dos constantes arbitrarias que pueden determinarse a partir de dos condiciones iniciales. Para la ecuación 3-133, necesitamos especificar la carga inicial en el capacitor y la corriente inicial que fluye por el circuito:

$$Q(0) = Q_0 \quad \text{e} \quad I(0) = I_0$$

TABLA 3-3

Analogía electromecánica.

Sistema mecánico	Sistema eléctrico
$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$	$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E(t)$
Masa, m (kg) Constante de amortiguación, c (N · s/m) Constante de resorte, k (N/m)	Inductancia, L(H) Resistencia, $R(\Omega)$ Recíproca de la capacitancia, 1/C (1/F)
Fuerza aplicada, F(N) Desplazamiento, x(m)	Voltaje aplicado, E(V) Carga, Q(C)
Velocidad, $v = \dot{x}$(m/s)	Corriente, $I = \dot{Q}$(A)

Para la ecuación 3-134, también necesitamos especificar la derivada de la corriente en $t = 0$, que se determina por la ecuación 3-132 como

$$\dot{I}(0) = \frac{1}{L}\left[E(0) - RI_0 - \frac{1}{C}Q_0\right] \tag{3-135}$$

Asimismo, si despejamos Q de la ecuación diferencial, siempre podemos determinar I de $I = dQ/dt$. Del mismo modo, cuando se conoce I, podemos obtener Q por integración.

EJEMPLO 3-42 **Respuesta de un circuito *RLC***

Determine la corriente de estado estacionario de un circuito *RLC* para un voltaje periódico aplicado de la forma $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$.

Solución Dado que $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$, la ecuación diferencial que rige el flujo de corriente en el circuito (por la ecuación 3-134) es

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \omega E_0 \cos \omega t$$

que es análoga a la ecuación diferencial resuelta en el ejemplo 3-41,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Entonces, la forma general de la solución de esta ecuación es idéntica a la solución del ejemplo 3-41 (ecuación 3-121), salvo que ahora necesitamos reemplazar m por L, c por R, k por $1/C$, ω_0^2 por $1/LC$ y F_0 por ωE_0. El resultado es, después de algunas simplificaciones,

$$I(t) = \frac{E_0 \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{3-136}$$

donde

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega RC}{1 - LC\omega^2}$$

La cantidad $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ en el denominador representa la resistencia efectiva del circuito al flujo de electrones, en ohmnios, y se llama **impedancia** del circuito.

En analogía con los sistemas mecánicos, la impedancia se vuelve mínima cuando $\omega = \omega_r = 1/\sqrt{LC}$. Esto puede verificarse derivando Z con respecto a ω, igualando la derivada a cero y despejando ω. Este valor de la frecuencia del voltaje aplicado se llama **frecuencia de resonancia**, ya que maximiza la corriente (figura 3-81).

La resonancia resulta ser muy destructiva en la mayoría de los sistemas mecánicos, por tanto, es algo que debe evitarse. Sin embargo, en los sistemas eléctricos, la operación de muchos dispositivos se basa en el fenómeno de resonancia, de modo que es algo que hay que buscar. En un simple radio, por ejemplo, el sintonizador varía la capacitancia C del circuito sin alterar R ni L. Por tanto, ajustar el sintonizador es equivalente a especificar la señal periódica cuya frecuencia ω maximizará la corriente. Si deseamos sintonizar una estación que transmite señales de radio en la frecuencia ω_1 y proporciona señales periódicas de voltaje de entrada de la forma E_0 sen $\omega_1 t$, ajustamos el valor de la capacitancia a $C_1 = 1/L\omega_1^2$, de modo que esta señal específica cause la mínima impedancia (y, por tanto, la máxima corriente) en el circuito. (Los efectos parasitarios de la transmisión en frecuencias vecinas pueden suprimirse mediante otro circuito). Entonces esta señal se amplifica y se envía a un altavoz que convierte estas señales en ondas sonoras cuya amplitud es proporcional a la amplitud de las señales eléctricas.

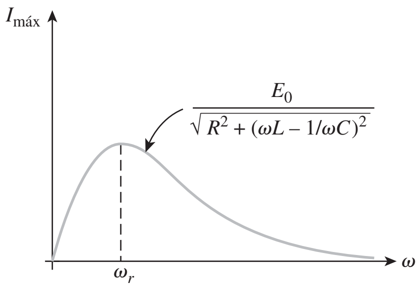


FIGURA 3-81
La variación de la corriente máxima con la frecuencia del voltaje aplicado para valores fijos de E_0, R y L.

Repaso de la sección

3-45C Defina la amplitud, la frecuencia y el periodo de vibración. ¿Cuándo un movimiento vibratorio es armónico simple?

3-46C Explique la frecuencia, la frecuencia circular y la frecuencia natural. Señale las diferencias y las similitudes entre éstas.

3-47C ¿Pueden los sistemas reales tener resonancia pura? Explique.

3-48 Considere una masa $m = 0.2$ kg suspendida de un resorte cuya constante de resorte es $k = 500$ N/m. Ahora la masa se tira hacia abajo 1 cm, y luego se libera con una velocidad inicial cero. Despreciando cualquier fricción, determine la frecuencia natural, el periodo y la amplitud del movimiento resultante.

(*Respuestas:* $\omega_0 = 31.62\ \text{s}^{-1},\ T = \dfrac{2\pi}{31.62\ \text{s}^{-1}} \approx 0.20\ \text{s},\ A = 1\ \text{cm}$).

3-49 En términos eléctricos, ¿cuál es la función del sintonizador de un radio?

3-50 Si se conoce la variación de la corriente con respecto al tiempo $I(t)$ en un circuito RLC, explique cómo podría usted determinar la variación de la carga en el capacitor con respecto al tiempo, $Q(t)$.

3-11 ▪ MÉTODOS DE COMPUTADORA PARA ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Los métodos sistemáticos desarrollados en este capítulo para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden se han incorporado a programas de procesamiento simbólico. Entonces, no espere que uno de estos programas pueda resolver una ecuación que no pueda resolverse mediante uno o más de los métodos desarrollados en este capítulo. Las ventajas de usar un programa así consisten en que el programa puede obtener las soluciones más rápidamente y nos ahorra la molestia de hacer tediosas integraciones y manipulaciones algebraicas. Sin embargo, no son infalibles, y a veces hallará que no pueden resolver una ecuación que sí tiene solución. Por esta razón, usted necesita familiarizarse con los métodos de este capítulo.

Como primera introducción a la resolución de una ecuación de segundo orden, considere la ecuación específica de Euler

$$x^2y'' - 2xy' - 4y = 10x \tag{3-137}$$

TABLA 3-4

Solución por computadora de la ecuación 3-137.

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
dsolve('x^2*D2y-2*x*Dy-4*y=10*x','x')
```

MuPAD

```
eqn := ode({x^2*y"(x) -2*x*y'(x)-4*y(x)=10*x},y(x)):
solve(eqn)
```

Maple

```
ode := x^2*y"(x)-2*x*y'(x)-4*y(x)=10*x
dsolve(ode)
```

Mathematica

```
DSolve[x^2*y"[x] -2*x*y'[x]-4*y[x]==10*x,y[x],x]
```

que se resolvió en el ejemplo 3-36. La solución general es

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2x^4 - \frac{5}{3}x$$

En la tabla 3-4 se muestra cómo obtener una solución por computadora de esta ecuación para condiciones iniciales arbitrarias.

Vibraciones forzadas amortiguadas con entrada derivada

En la sección 3-10 se abordó la solución de la ecuación del oscilador amortiguado,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{\text{ext}}$$

donde la fuerza externa F_{ext} es armónica, es decir, sinusoidal o cosinusoidal. Sin embargo, hay aplicaciones en las que la fuerza externa es de la forma $F_{\text{ext}} = ay(t) + b\dot{y}(t)$. Como simple ejemplo para ilustrar la solución de esta ecuación, suponga que $m = 1$, $c = 3$, $k = 2$, $a = 1$, $b = 1$ y $y(t) = te^{-5t}$. Entonces, la ecuación es

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = y + \dot{y} = te^{-5t} + e^{-5t} - 5te^{-5t} = (1 - 4t)e^{-5t}$$

Así, con condiciones iniciales cero, por ejemplo, el problema por resolverse es

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = (1 - 4t)e^{-5t}, x(0) = \dot{x}(0) = 0 \tag{3-138}$$

La solución es

$$x = \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{1}{3}te^{-5t} - \frac{1}{9}e^{-5t}$$

Esta solución puede encontrarse por computadora usando el código que aparece en la lista de la tabla 3-5. Estas soluciones se basan en el método de variación de parámetros que se describió en la sección 3-8 y que se resumió en el teorema 3-8.

TABLA 3-5

Solución por computadora de la ecuación 3-138.

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
dsolve('D2x+3*Dx+2*x=(1-4*t)
 *exp(-5*t)','x(0)=0','Dx(0)=0','t')
```

MuPAD

```
eqn:=ode({x"(t)+3*x'(t)+2*x(t)=(1-4*t)*exp(-4*t),x(0)=0,
 x'(0)=0},x(t))
solve(eqn)
```

Maple

```
ode := x"(t)+3*x'(t)+2*x(t)=(1-4*t)*exp(-5*t)
ics := x(0)=0,x'(0)=0
dsolve({ode,ics})
```

Mathematica

```
ode = x"[t]+3*x'[t]+2*x[t]==(1-4*t)*Exp[-5*t]
DSolve[{ode,x[0]==0,x'[0]==0},x[t],t]
```

EJEMPLO 3-43 Modelo de suspensión de vehículo

Una aplicación en la que la fuerza externa es de la forma $ay(t) + b\dot{y}(t)$ se da en el *modelo cuarto de automóvil* (*quarter-car model*) de la suspensión de un vehículo, como se muestra en la figura 3-82. En este modelo simplificado, se desprecian las masas de la rueda, el neumático y el eje, y la masa m representa un cuarto de la masa del vehículo. La constante de resorte k modela la tensión combinada tanto del neumático como del resorte de suspensión. La constante de amortiguación c modela el amortiguador. La posición de equilibrio de m cuando $y = 0$ es $x = 0$. El desplazamiento en la superficie del camino, $y(t)$ puede derivarse del perfil de superficie del camino y de la velocidad del auto. Obtenga la ecuación de movimiento.

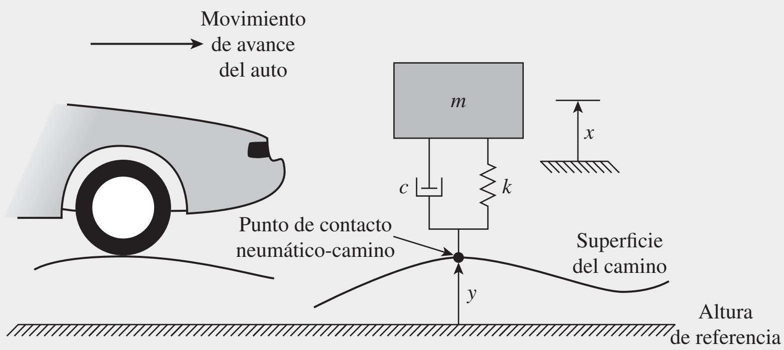


FIGURA 3-82
Modelo *cuarto de automóvil* del sistema de suspensión de un vehículo.

Solución En la figura 3-83 se muestra el diagrama de cuerpo libre, que se ha trazado suponiendo que $\dot{y} > \dot{x}$ y $y > x$. Sólo se muestra la fuerza dinámica de resorte, porque la fuerza estática de resorte se cancela por la fuerza de gravedad mg. A partir de este diagrama de cuerpo libre, obtenemos la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} = c(\dot{y} - \dot{x}) + k(y - x)$$

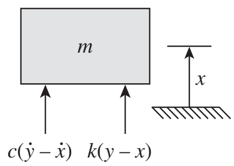


FIGURA 3-83
Diagrama de cuerpo libre del modelo de suspensión *cuarto de automóvil*.

Poniendo esta ecuación en la forma estándar obtenemos

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} \tag{3-139}$$

EJEMPLO 3-44 Respuesta del vehículo a un bache

Suponga que el vehículo que se muestra en la figura 3-82 encuentra un bache de 1 m de longitud mientras se mueve a 18 m/s (alrededor de 40 mph o 65 km/h). El perfil del bache está dado por

$$y(z) = 5.437ze^{-4z}$$

donde z es la distancia horizontal que viaja el vehículo mientras pasa por el bache. El desplazamiento $y(t)$ que siente la suspensión se relaciona con $y(z)$ a través de la velocidad del vehículo, $z = vt$, donde $v = 18$ m/s. Entonces,

$$y(t) = 97.858te^{-72t}$$

Los siguientes valores son representativos de una suspensión real: m = 240 kg, que representa un cuarto de la masa del vehículo, $c = 5\,000$ N · s/m y $k = 16\,000$ N/m. Para estos valores, el lado derecho de la ecuación 3-139 se reduce a

$$ky + c\dot{y} = (489\,290 - 33\,663\,152t)e^{-72t}$$

La ecuación de movimiento se vuelve

$$240\ddot{x} + 5\,000\dot{x} + 16\,000x = (489\,290 - 33\,663\,152t)e^{-72t}$$

Ésta es de la misma forma que la ecuación 3-138, y puede resolverse por computadora usando los mismos métodos enumerados en la tabla 3-5. Como los valores numéricos son engorrosos, no mostraremos el código necesario para encontrar esta solución. La solución se grafica junto con el perfil del bache en la figura 3-84. En la gráfica, usted puede ver que, aunque la altura del bache es 0.5 m, el desplazamiento máximo del chasís es aproximado a 0.22 m. De modo que la suspensión desempeña un buen trabajo al reducir el efecto del bache sobre el compartimiento de pasajeros.

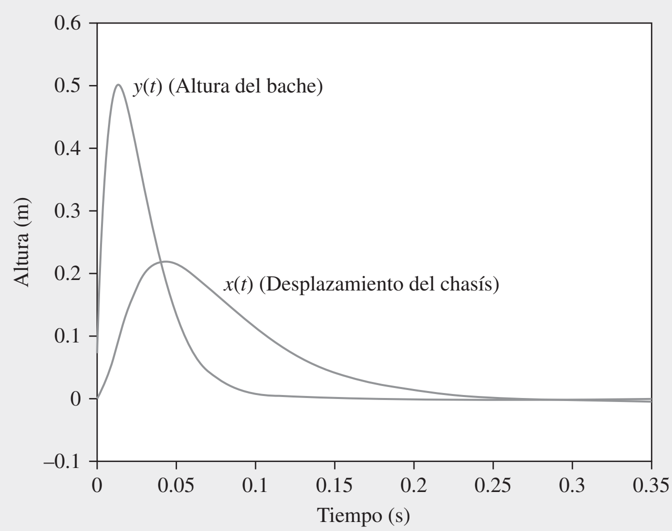


FIGURA 3-84
Respuesta de una suspensión de vehículo a un bache del camino.

3-12 ▪ RESUMEN

Terminología para ecuaciones de segundo orden. Se dice que una ecuación diferencial es *lineal* si no incluye ninguna potencia, ni productos, ni otras funciones no lineales de la variable dependiente y ni de sus derivadas. Una ecuación diferencial lineal de segundo orden puede expresarse en la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \tag{3-1}$$

La función $R(x)$ representa todos los términos que no incluyen la variable dependiente ni alguna de sus derivadas, y se llama *término no homogéneo.* Se dice que una ecuación diferencial lineal es *no homogénea* cuando $R(x) \neq 0$ y *homogénea* cuando $R(x) = 0$. La ecuación que se obtiene a partir de $R(x) = 0$ se llama *ecuación homogénea relacionada* o *ecuación complementaria*. Si los coeficientes de la variable dependiente y sus derivadas son constantes, se dice que la ecuación tiene *coeficientes constantes*. Si uno o más coeficientes dependen de la variable independiente x, entonces se dice que la ecuación tiene *coeficientes variables*.

Existencia y unicidad. El *teorema de existencia y unicidad* sostiene que si las funciones $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son continuas en un intervalo, y el punto x_0 está en este intervalo, entonces la ecuación diferencial lineal de segundo orden 3-1 tiene una solución única en este intervalo, que satisface las dos condiciones iniciales especificadas en x_0.

Independencia lineal. La expresión $C_1y_1 + C_2y_2$ donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, se llama *combinación lineal* de las dos funciones y_1 y y_2. Se dice que dos funciones son *linealmente dependientes* en un intervalo $x_1 < x < x_2$ si una función es un múltiplo constante del otro para todos los valores de x en ese intervalo. De no ser así, las funciones son *linealmente independientes.* De manera alterna, también se dice que dos funciones son linealmente independientes en un intervalo $x_1 < x < x_2$ si la ecuación

$$C_1y_1 + C_2y_2 = 0 \tag{3-8}$$

se satisface para todas las x en ese intervalo solo cuando $C_1 = C_2 = 0$.

Prueba de independencia con el wronskiano. La independencia lineal de dos funciones también puede expresarse en términos de su *wronskiano*, definido como

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 \tag{3-12}$$

Dos funciones son linealmente dependientes en un intervalo si su wronskiano en ese intervalo es cero para todas las x. De no ser así, son independientes.

La expresión $C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$, donde $C_1, C_2, ..., C_n$ son constantes arbitrarias, se llama *combinación lineal* de n funciones $y_1, y_2, ..., y_n$. Se dice que las n funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ son *linealmente independientes* en un intervalo $x_1 < x < x_2$ si la ecuación

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n = 0$$

se satisface para todas las x en ese intervalo solo cuando $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$. De otra manera, se dice que estas n funciones son *linealmente dependientes* en ese intervalo. La independencia lineal de n funciones también puede expresarse en términos de su *wronskiano*, definido como

$$W(y_1, y_2 \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{3-13}$$

Las n funciones son linealmente dependientes en un intervalo si su wronskiano en ese intervalo es cero para todas las x. De no ser así, son linealmente independientes.

Principio de superposición. Si una función es una solución de una ecuación diferencial lineal homogénea, un múltiplo constante de esa función también es una solución. Si dos funciones son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, una combinación lineal de ellas también es una solución de esa ecuación diferencial. Esto se conoce como *principio de superposición*; el cual es aplicable sólo a ecuaciones lineales homogéneas. No es aplicable a ecuaciones no homogéneas, aun cuando sean lineales.

Conjunto de soluciones fundamentales. El wronskiano de dos funciones solución de una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes continuos es siempre cero o nunca cero. Esto se conoce como *identidad de Abel*. Una ecuación lineal, homogénea de segundo orden con coeficientes continuos en un intervalo siempre tiene dos soluciones: y_1 y y_2; las cuales son linealmente independientes en ese intervalo. Además, cualquier otra solución de esta ecuación diferencial en ese intervalo puede expresarse en forma única como una combinación lineal de estas dos soluciones como

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{3-16}$$

que se llama *solución general*, ya que contiene todas las soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo especificado. Cualquier par de soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea en un intervalo se llama *conjunto fundamental de soluciones*. Una ecuación diferencial puede tener varios conjuntos de soluciones fundamentales, y cualquiera de estos conjuntos puede usarse para construir la solución general.

Método de reducción de orden. Cuando se conoce una solución fundamental de una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes continuos, puede determinarse otra solución por el método de *reducción de orden* de

$$v = \int \left[\frac{e^{\int P(x)dx}}{y_1^2} \right] dx$$

donde y_1 es una solución no cero. Entonces, la segunda solución es $y_2 = vy_1$.

TABLA 3-6

Ecuación diferencial: $ay'' + by' + cy = 0$
Ecuación característica: $am^2 + bm + c = 0$
Raíces características: $m_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Naturaleza de m_1 y m_2	Solución general
Caso 1: Reales y desiguales ($m_1 \neq m_2$) $b^2 - 4ac > 0$	$y = C_1e^{m1x} + C_2e^{2x}$
Caso 2: Reales e iguales ($m_1 = m_2 = m$) $b^2 - 4ac = 0$	$y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$
Caso 3: Complejas conjugadas ($m_{1,2} = \alpha + i\beta$) $b^2 - 4ac < 0$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$

Solución general de una ecuación lineal homogénea de segundo orden. Una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes siempre tiene dos soluciones linealmente independientes, y_1 y y_2, que son válidas en cualquier intervalo, y su solución general se expresa como $y = C_1y_1 + C_2y_2$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. La solución general de una ecuación lineal homogénea de segundo orden para diferentes casos se resume en la tabla 3-6.

Solución general de una ecuación lineal no homogénea de segundo orden. La solución general de una ecuación lineal no homogénea de segundo orden se obtiene combinando la solución general de la ecuación homogénea relacionada, que se llama *solución homogénea* o *solución complementaria* y_h, con una función que satisfaga la ecuación no homogénea dada, que se llama *solución particular* y_p como

$$y = y_h + y_p = C_1y_1 + C_2y_2 + y_p \qquad \textbf{(3-52)}$$

donde y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea relacionada, y C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

El término no homogéneo $R(x)$ a menudo incluye varios términos y, en tales casos, es operativamente más sencillo encontrar una solución particular que corresponda a cada término no homogéneo y luego sumarlas de acuerdo con el *principio de superposición*.

Hay dos formas de determinar la solución particular y_p de ecuaciones no homogéneas: el método de coeficientes indeterminados y el método de variación de parámetros.

Método de coeficientes indeterminados. El método de *coeficientes indeterminados* se basa en hacer una conjetura razonada sobre la forma general de la solución particular y_p, que incluya algunos coeficientes constantes desconocidos, y luego determinar estos coeficientes haciendo que la solución conjeturada satisfaga la ecuación diferencial no homogénea. El requisito básico sobre el término no homogéneo $R(x)$ es que tenga solo un número finito de derivadas linealmente independientes. La forma general de un término no homogéneo adecuado para el método de coeficientes indeterminados es $e^{kx}P_n(x) \operatorname{sen} \alpha x$ o $e^{kx}P_n(x) \cos \alpha x$. Aquí, k *y* α son constantes reales, n es un entero positivo, y $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

Si una supuesta solución particular resulta ser una solución homogénea, debe modificarse multiplicándola por la menor potencia de x que elimine tal duplicación. El método de coeficientes indeterminados es autocorrector. Cuando se consideran pocos términos para la solución particular, da por resultado una contradicción. Cuando se consideran demasiados términos, da por resultado ceros para los coeficientes de los términos innecesarios. Obtener valores únicos para los coeficientes desconocidos es un signo seguro de que la forma supuesta de la solución particular es correcta. Cualquier condición inicial o en la frontera debe aplicarse a la solución general de la ecuación no homogénea dada que es la suma de la solución homogénea y de la solución particular.

Método de variación de parámetros. El método de *variación de parámetros* es aplicable a ecuaciones con coeficientes constantes o variables y a términos no homogéneos que pueden ser de cualquier forma. Pero requiere del conocimiento de la solución general de la ecuación homogénea relacionada. Para ecuaciones lineales de segundo orden, la solución particular se determina por

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 \qquad \textbf{(3-62)}$$

donde $u_1 = -\displaystyle\int \frac{y_2R(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}dx$ y $u_2 = \displaystyle\int \frac{y_1R(x)}{y_1y_2' - y_1'y_2}dx$ **(3-68)**

Solución de la ecuación de Euler. No hay un procedimiento general para resolver ecuaciones lineales con coeficientes variables, salvo para ciertos tipos. Una de éstas es la *ecuación de Euler*, que siempre puede convertirse en una ecuación con coeficientes constantes. El término general de la ecuación de Euler es de la forma $kx^my^{(m)}$, donde k es una constante y m es un entero. La ecuación de segundo grado de Euler se expresa como

$$x^2y'' + bxy' + cy = r(x) \qquad \textbf{(3-70)}$$

donde b y c son constantes. La ecuación de Euler siempre puede transformarse en una ecuación con coeficientes constantes mediante la transformación $x = e^t$.

A menudo es mucho más simple resolver las ecuaciones de Euler considerando que la solución es de la forma $y = x^r$. La sustitución $y = x^r$ da la siguiente ecuación característica, $r^2 + (b - 1)r + c = 0$, cuyas raíces son r_1 y r_2. Entonces, la solución general de una ecuación de Euler homogénea de segundo orden en cualquier intervalo que no contenga el origen es

$$y = C_1|x|^{r_1} + C_2|x|^{r_2}, \ (r_1 \neq r_2, \text{ reales}) \qquad \textbf{(3-80)}$$

$$y = (C_1 + C_2 \ln|x|)|x|^r, \ (r_1 = r_2 = r, \text{ reales}) \qquad \textbf{(3-81)}$$

$$y = |x|^\alpha[C_1 \cos(\beta \ln|x|) + C_2 \operatorname{sen}(\beta \ln|x|)],$$

$$(r_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \text{ complejas}) \qquad \textbf{(3-82)}$$

donde C_1 y C_2 son constantes. Para $x > 0$, el signo de valor absoluto puede omitirse. La solución general de una ecuación de Euler homogénea de segundo grado para $x > 0$ también puede determinarse a partir de la solución general de una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes que tenga la misma ecuación característica, reemplazando todas las apariciones de x en la solución por $\ln x$.

Las vibraciones mecánicas y los circuitos eléctricos son dos aplicaciones importantes de ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

Perspectiva histórica

El siguiente es un resumen de los matemáticos y científicos famosos citados en este capítulo.

Niels Henrik Abel (1802-1829). Matemático noruego. Además de la identidad de Abel (teorema 3-3), desarrolló una prueba del teorema del binomio para todos los números y, a los 19 años, inventó una teoría de grupos para comprobar que no hay solución algebraica general de ninguna ecuación polinómica de quinto grado o superior.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Prolífico matemático francés que, entre otras contribuciones, inició la formulación rigurosa y las pruebas de los teoremas del cálculo infinitesimal. La distribución de probabilidad de Cauchy, la secuencia de Cauchy y otros conceptos matemáticos llevan su nombre.

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783). Matemático y físico francés. Desarrolló un método para resolver la ecuación de onda, la cual es una ecuación diferencial parcial que describe las vibraciones (ondas) en una cuerda y otros objetos. También desarrolló el principio de d'Alembert, el cual es una formulación alternativa de las leyes clásicas del movimiento.

Robert Hooke (1635-1703). Científico y arquitecto inglés. Aunque quizá sea mejor conocido por su ley de la elasticidad (ley de Hooke), a los 30 años, publicó el primer *best seller* científico titulado *Micrographia* en el cual plasma sus observaciones con microscopio y generó interés público en la ciencia, nueva en ese entonces, de la microscopía. Propuso el término biológico *célula.*

Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887). Físico alemán. Contribuyó al entendimiento fundamental de los circuitos eléctricos con sus leyes del voltaje y la corriente. También contribuyó a la espectroscopía y sugirió el término *radiación de cuerpo negro*.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Nació en Turín, Piemonte, pero trabajó en Prusia y Francia. Desarrolló el método de variación de parámetros para resolver ecuaciones diferenciales. Su tratado sobre mecánica analítica (1788) fue una importante contribución al desarrollo de la física matemática en el siglo XIX. Entre otras contribuciones, desarrolló el método de los multiplicadores de Lagrange que se usa en el cálculo de variaciones, y las ecuaciones de Lagrange, que son una alternativa de la ley de Newton para formular las ecuaciones del movimiento.

Józef Maria Hoene Wronski (1776-1853). Matemático y filósofo polaco. La importancia de su determinante, el wronskiano, se descubrió después de su muerte.

PROBLEMAS

3-1 Introducción a las ecuaciones lineales de segundo orden

3-51C ¿Cómo se decide si una ecuación diferencial dada es lineal o no lineal?

3-52C Al trabajar con ecuaciones de segundo orden o de orden superior, ¿por qué distinguimos entre coeficientes constantes y variables?

3-53C ¿Qué busca usted para decidir si una ecuación dada está en la forma estándar?

3-54C En qué condiciones se garantiza que un problema lineal de valor inicial tendrá una solución única en un intervalo específico?

3-55C ¿Para qué clase de problemas de valor inicial la solución $y = 0$ es la única opción?

Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden son 1) *lineales o no lineales,* 2) *homogéneas o no homogéneas y* 3) *con coeficientes constantes o variables.*

3-56 *a)* $y'' + 2y^2y' + 2y = xe^{-3x}$
b) $y'' + 5y' - ky = 0$
c) $y'' - 3y' + xy = 0$
d) $y'' + y' = x^2 \cos x$

3-57 *a)* $y'' - 5y' + \cos y = x + 1$ *b)* $y'' = 0$
c) $y'' + 2x^2y' + 5y = 0$ *d)* $y'' + e^xy = \dfrac{1}{x}$

3-58 *a)* $y'' + e^yy' - 2y = 6$
b) $y'' - 2y' + y = x^3 \cos 2x$
c) $y'' - 5x^2y' = 0$
d) $y'' - y = 0$

3-59 *a)* $y'' + \dfrac{1}{y} = 1$
b) $y'' + 8y' - e^{\ln y} = 0$
c) $y'' - \operatorname{sen} 2xy' + y = 0$
d) $y'' + y = 7$

Determine el intervalo que garantiza que los siguientes problemas de valor inicial tendrán una solución única:

3-60 *a)* $y'' = 0 \;\; y(0) = 0$, y $y'(0) = -4$

b) $(x-1)^2y'' + 2xy' - y = e^{-x}$, $y(-2) = 3$, y $y'(-2) = -7$

3-61 *a)* $y'' + xy' - 3y = x^2e^{3x}$, $y(-1) = 1$, y $y'(-1) = 4$

b) $(x-2)y'' + 6xy = 2$, $y(0) = -2$ y $y'(0) = 0$

3-62 *a)* $x(x-3)y'' + xy' - 2(x-3)y = -3x^2$, $y(1) = 2$, y $y'(1) = -5$

b) $y'' - 5y = \ln x \;\; y(5), = 3$, y $y'(5) = 1$

3-63 *a)* $y'' + 4y = e^{2x}\cos x$, $y(0) = 0$, y $y'(0) = -1$

b) $(x^2-4)y'' - 3xy' - 2y = 0$, $y(1) = 0$, y $y'(1) = 7$

La solución general de una ecuación lineal homogénea de segundo orden incluye una familia de funciones con dos constantes arbitrarias C_1 y C_2. Resolver una ecuación diferencial equivale a encontrar esta familia de funciones, lo cual puede ser difícil. El problema inverso de encontrar la ecuación diferencial cuya solución se conoce es más sencillo, ya que implica derivación en vez de integración.

Derivando dos veces las siguientes funciones y eliminando las constantes C_1 y C_2, determine la ecuación diferencial de segundo orden que la familia de funciones dada satisface.

3-64 *a)* $y = C_1\operatorname{senh} 2x + C_2\cosh 2x$

b) $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$

3-65 *a)* $y = C_1e^{-x}\operatorname{sen} 3x + C_2e^{-x}\cos 3x$

b) $y = C_1\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} + C_2\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$

3-66 *a)* $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2\dfrac{\ln x}{x}$

b) $y = C_1x^2 + C_2x$

3-67 *a)* $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2x^4$

b) $y = C_1\operatorname{sen} 2x + C_2\cos 2x$

3-2 Independencia lineal y el wronskiano de funciones

3-68C Si dos funciones y_1 y y_2 son linealmente dependientes en un intervalo, ¿y_1 tiene que ser un múltiplo constante de y_2 para todas las x en ese intervalo?

3-69C ¿Es $y = 3x$ una combinación lineal de $y_1 = x$ y $y_1 = x^2$?

3-70C Si tres funciones son linealmente dependientes en un intervalo, ¿una de ellas tiene que ser un múltiplo constante de una de las otras dos en ese intervalo?

3-71C Considere cinco funciones cuyo wronskiano es cero para algunos valores de x y no cero para otros valores de x. ¿Estas cinco funciones son linealmente dependientes o independientes?

Determine si los siguientes pares de funciones y_1 *y* y_2 *son linealmente dependientes o independientes* 1) *por inspección y* 2) *determinando su wronskiano.*

3-72 *a)* $y_1 = x + 1$ y $y_2 = x^2 - 1$

b) $y_1 = \operatorname{sen}\alpha + \cos\beta$ y $y_2 = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$

3-73 *a)* $y_1 = e^x + e^{-x}$ y $y_2 = \cosh x$

b) $y_1 = x^3$ y $y_2 = -x^3$

3-74 *a)* $y_1 = x^2$ y $y_2 = 2$

b) $y_1 = xe^x$ y $y_2 = e^x$

3-75 *a)* $y_1 = e^x - e^{-x}$ y $y_2 = \cosh x$

b) $y_1 = x$ y $y_2 = 1/x$

3-76 *a)* $y_1 = |x|$ y $y_2 = x$

b) $y_1 = e^{-2x}$ y $y_2 = e^{2x}$

3-77 *a)* $y_1 = e^x\operatorname{sen} 2x$ y $y_2 = e^x\cos 2x$

b) $y_1 = x^3$ y $y_2 = x^3 - 1$

3-78 *a)* $y_1 = |x| + 2$ y $y_2 = x + 2$

b) $y_1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ y $y_2 = -5$

3-79 *a)* $y_1 = e^{-2\ln x}$ y $y_2 = 5/x^2$

b) $y_1 = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $y_2 = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$

3-80 Considere tres funciones y_1, y_2 y y_3. Compruebe que, si los pares y_1, y_2 y y_2, y_3 son linealmente independientes, también lo es el par y_1, y_3.

Determine si las siguientes funciones son linealmente dependientes o independientes calculando sus wronskianos.

3-81 $y_1 = e^x + e^{-x}$, $y_2 = 5$, y $y_3 = \cosh x$

3-82 $y_1 = x^2$, $y_2 = 5$, y $y_3 = x^2 - 1$

3-83 $y_1 = e^x - e^{-x}$, $y_2 = e^{2x}$, y $y_3 = \cosh x$

3-84 $y_1 = |x|$, $y_2 = x$, y $y_3 = 1$

3-85 $y_1 = e^x\operatorname{sen} 2x$, $y_2 = e^x\cos 2x$ y $y_3 = e^x$

3-86 $y_1 = x^3$, $y_2 = x^3 - 2$, y $y_3 = 1$

3-87 $y_1 = e^{-2\ln x}$, $y_2 = x^2$, y $y_3 = 5/x^2$

3-88 $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, y $y_3 = x^2e^x$

3-89 $y_1 = 2x$, $y_2 = e^{2x}$, y $y_3 = e^{-2x}$

3-3 Teoría de las ecuaciones homogéneas

3-90C Si las funciones y_1 y y_2 son dos soluciones de una ecuación de lineal homogénea de segundo orden con coeficientes continuos, ¿puede ser cero el wronskiano de y_1 y y_2 para algunos valores de x y no serlo para otros?

3-91C ¿Cuántas soluciones diferentes puede tener una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes continuos? ¿Cuántas de estas soluciones pueden ser linealmente independientes?

3-92C ¿Cuál es el conjunto fundamental de soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden? ¿Cómo se usa para construir la solución general?

Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden, sea y_1 una solución de la ecuación. Determine por inspección si ky_1, donde k es una constante, también es una solución de esa ecuación.

3-93C *a)* $y'' - 2y' - 3y = 0$
b) $y'' = e^{2x}$
c) $y'' - y^2 = 0$
d) $x^2y'' + (x - 1)y = 1$

3-94 *a)* $y'' + x^2y = x + 1$
b) $y'' + 3(x^2 + 1)y' - 7y = 0$
c) $y'' - 2yy' - 3y = 0$
d) $x^2y'' - 5y = 0$

3-95 *a)* $y'' + 3xy' - 2y^2 = 0$
b) $y'' - (2x + 1)y = x + 1$
c) $x^2y'' + xy' + 3y = 0$
d) $y'' - 2y' + 5y = 0$

3-96 *a)* $y'' + x^2y = x - 2$
b) $y'' + y' + y = 0$
c) $y'' + \dfrac{1}{x - 1}y' - 8y = 0$
d) $y'' - y^3 = 0$

Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden, sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación. Determine por inspección si $y_1 + y_2$ también es una solución de esa ecuación.

3-97 *a)* $y'' + 3y' - y = 0$
b) $y'' - y' = e^{2x}$
c) $y'' + 5y^2 = 0$
d) $x^2y'' + xy = -3$

3-98 *a)* $y'' - x(x + 1)y = e^x$
b) $y'' - 2y' + 3e^xy = 0$
c) $y'' - 3y^2y' = 0$
d) $x^2y'' + 2y' = 0$

3-99 *a)* $y'' - 2y' + 3x^xy^2 = 0$
b) $y'' - x(x^2 - 1)y' - 2y = 0$
c) $x^2y'' - 4y = 0$
d) $y'' + y' - e^y = 0$

3-100 *a)* $y'' + y = x$
b) $y'' - (\operatorname{sen} x)y' = x^2e^{-2x}$
c) $x^2y'' + xy' - 2y = 0$
d) $y'' + \operatorname{sen} y = 0$

Considere las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden y dos de sus soluciones y_1 y y_2 para $x > 0$. Identifique el par de soluciones cuyo wronskiano $W(y_1, y_2)$ *nunca es cero para $x > 0$, por inspección. Verifique sus hallazgos calculando $W(y_1, y_2)$ para cada caso.*

3-101 *a)* $x^2y'' + 5xy' - 3y = 0$, $y_1 = x^{1/3}$ y $y_2 = 2/x$
b) $x^2y'' + 5xy' - 3y = 0$, $y_1 = 1/x$ y $y_2 = -1/x$
c) $x^2y'' + 5xy' - 3y = 0$, $y_1 = 3x^{1/3}$, y $y_2 = 1/x^{-1/3}$

3-102 *a)* $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$, $y_1 = -1/x$ y $y_2 = x^4$
b) $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$, $y_1 = e^{-\ln x}$ y $y_2 = 3/x$
c) $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$, $y_1 = 2x^4$, y $y_2 = -4e^{4\ln x}$

3-103 *a)* $y'' + y = 0$, $y_1 = \operatorname{sen} x$, y $y_2 = \cos x$
b) $y'' + y = 0$, $y_1 = -3\operatorname{sen} x$, y $y_2 = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x}$
c) $y'' + y = 0$, $y_1 = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\tan x}$, y $y_2 = 2\cos x$

3-104 *a)* $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$, $y_1 = \dfrac{1}{x^2}$, y $y_2 = \dfrac{\ln x}{x^2}$
b) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$, $y_1 = \dfrac{1}{x^2}$, y $y_2 = -2x^{-2}$
c) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$, $y_1 = \dfrac{5\ln x}{x^2}$, y $y_2 = \dfrac{\ln x^3}{x^2}$

Considere las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden y dos de sus soluciones, y_1 y y_2 en $x > 0$. Determine si y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones. En caso afirmativo, desarrolle una relación para $y(x)$ que contenga todas las soluciones de la ecuación diferencial.

3-105 *a)* $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $y_2 = \dfrac{1}{x}$, y $y_2 = \dfrac{\ln x}{x}$
b) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $y_1 = \dfrac{2}{x}$, y $y_2 = \ln xe^{-\ln x}$
c) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $y_1 = -\dfrac{1}{x}$, y $y_2 = \dfrac{3}{x}$

3-106 *a)* $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y_1 = e^{2x}0$, y $y_2 = xe^{2x}$
b) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y_1 = 3e^{2x}$, y $y_2 = xe^{-\ln x}e^{2x}$
c) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y_1 = 2xe^{2x}$, y $y_2 = 3xe^{2x}$

3-107 *a)* $y'' - 2y' + 3y = 0$, $y_1 = e^x \operatorname{sen}\sqrt{2}x$ y $y_2 = e^x\cos\sqrt{2}x$
b) $y'' - 2y' + 3y = 0$, $y_1 = e^x\operatorname{sen}\sqrt{2}x$ y $y_2 = e^{x-1}\cos\sqrt{2}x$
c) $y'' - 2y' + 3y = 0$, $y_1 = e^x\cos\sqrt{2}x$ y $y_2 = 3e^x\left(\operatorname{sen}\sqrt{2}x + \cos\sqrt{2}x\right)$

3-108 *a)* $y'' - 9y = 0$, $y_1 = e^{3x}$, y $y_2 = e^{-3x}$
b) $y'' - 9y = 0$, $y_1 = e^{-3x}$, y $y_2 = e^{5-3x}$
c) $y'' - 9y = 0$, $y_1 = \operatorname{senh} 3x$, y $y_2 = \operatorname{senh} 3x + e^{-3x}$

3-4 Reducción de orden

3-109C ¿El método de reducción de orden es aplicable a ecuaciones lineales pero no homogéneas?

Usando la solución dada, determine la segunda solución linealmente independiente de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden por el método de reducción de orden:

3-110 $y'' + 4y = 0$, $y_1 = \cos 2x$

3-111 $y'' + 2y' + y = 0$, $y_1 = e^{-x}$

3-112 $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y_1 = e^{2x}$

3-113 $y'' - 4y = 0$, $y_1 = e^{2x}$

3-114 $y'' + y = 0$, $y_1 = \cos x$

3-115 $y'' + 9y = 0$, $y_1 = \operatorname{sen} 3x$

3-116 $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0,\ y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

3-117 $x^2y'' + 3xy' + y = 0,\ y_1 = \frac{1}{x}$

3-118 $x^2y'' + xy' = 0,\ y_1 = 1$

3-119 $y'' - \frac{2x}{x-1}y' - 4y = 0,\ y_1 = x$

3-120 $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0,\ y_1 = \frac{1}{x^2}$

3-121 $x^2y'' + 5xy' - 3y = 0,\ y_1 = x^{1/3}$

3-5 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

3-122C ¿Cree usted que exista una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes a la que satisfagan las funciones e^{2x}, e^{-3x} y $5e^{2x} - 8e^{-3x}$?

3-123C ¿Cree usted que exista una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes a la que satisfagan las funciones x, $x + 1$ y x^2?

3-124C ¿Cree usted que exista una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes a la que satisfagan las funciones sen x, cos x y tan x?

3-125C ¿Cuál es la razón para suponer que las soluciones de ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes tengan la forma e^{mx} donde m es una constante?

3-126C Explique la importancia física de la ecuación característica y sus raíces para una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

3-127C Cuando las raíces de la ecuación característica que corresponde a una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes son iguales, tomamos la segunda solución linealmente independiente como xe^{mx}, y funcionó. ¿Cree usted que funciones de una forma diferente como x^2e^{mx} o e^{mx}/x también podrían tomarse como la segunda solución linealmente independiente?

3-128 Considere la familia de curvas $f(x) = C_1y_1 + C_2y_2$ donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias y y_1 y y_2 son las soluciones fundamentales de una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. ¿Puede cualquier par de estas curvas tener la misma pendiente en su punto de intersección?

Determine la solución general de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes:

3-129 *a*) $y'' + \lambda^2y = 0$
b) $y'' - 4y' + 4y = 0$
c) $y'' - \lambda^2y = 0$

3-130 *a*) $y'' + 5y' + 4y = 0$
b) $y'' + 6y' + 9y = 0$
c) $y'' + y' + 3y = 0$

3-131 *a*) $y'' - 6y' + 9y = 0$
b) $y'' + 3y' + 4y = 0$
c) $y'' - 6y' - 4y = 0$

3-132 *a*) $y'' + 10y' + 25y = 0$
b) $y'' + 5y' + 25y = 0$
c) $y'' + 10y' - 25y = 0$

Determine la solución específica de los siguientes problemas de valor inicial:

3-133 $y'' - 4y = 0$, $y(0) = 0$, y $y'(0) = 1$

3-134 $y'' + 3y' - 4y = 0$, $y(1) = 2$, y $y'(1) = -3$

3-135 $2y'' + y' - y = 0$, $y(0) = -5$, y $y'(0) = 6$

3-136 $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(-2) = 1$, y $y'(-2) = 0$

3-137 $y'' + 4y' + 20y = 0$, $y(\pi/2) = 0$, y $y'(\pi/2) = 2$

Determine la solución específica de los siguientes problemas de valor en la frontera:

3-138 $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 0$, y $y(2) = 6$

3-139 $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(1) = 1$, y $y'(4) = 0$

3-140 $y'' - 9y = 0$, $y(0) = 6$, y $y(10) = 0$

3-141 Considere una aleta de espiga de diámetro $D = 3$ cm, longitud $L = 15$ cm y conductividad térmica $k = 237$ W/m · °C. La base de la aleta se mantiene a 100°C, y toda la aleta disipa calor al aire circundante a razón de 340 W. El coeficiente de transferencia de calor entre la aleta y el aire a 0°C es $h = 25$ W/m^2 · °C. Dado que la ley de Fourier de conducción de calor en la base de la aleta puede expresarse como

$$Q_{\text{base}} = -k\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)T'(O)$$

determine la distribución de temperatura a lo largo de la aleta.

3-142 Determine la temperatura en la parte media de la aleta descrita en el problema 3-141, y la pendiente del perfil de temperatura en la punta de la aleta.

3-143 Considere una aleta de espiga de diámetro $D = 0.4$ cm, longitud $L = 40$ cm y conductividad térmica $k = 220$ W/m · °C. La base de la aleta se mantiene a 200°C, y se asume que la pérdida de calor de la punta de la aleta es despreciable. El coeficiente de transferencia de calor entre la aleta y el aire es $h = 35$ W/m^2 · °C.

Dado que la ley de Fourier de conducción de calor en la base de la aleta puede expresarse como

$$Q_{\text{aleta}} = -k\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)T'(L)$$

determine la distribución de temperatura a lo largo de la aleta.

3-6 Teoría de las ecuaciones lineales no homogéneas

3-144C ¿Puede una función que aparece en la solución homogénea ser una solución particular? Explique.

3-145C ¿Puede una ecuación no homogénea tener más de una solución particular? En caso afirmativo, ¿significa esto que la solución general de una ecuación no homogénea no es única?

3-146C ¿Cómo puede usted saber si una solución particular está en la forma más simple?

Determine las soluciones generales de las ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes usando la solución particular dada y exprésela en la forma más simple:

3-147 *a*) $y'' + y = 2e^x$, $y_p = e^x$
b) $y'' + y = 2e^x$, $y_p = e^x - 5$ sen x

3-148 *a)* $y'' - y' = x - 3, y_p = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

b) $y'' - y' = x - 3, y_p = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 34$

3-149 *a)* $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}, y_p = x^2e^{-2x}$

b) $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}, y_p = x(1 + x)e^{-2x}$

3-150 *a)* $y'' + 2y' + 3y = 6, y_p = 2$

b) $y'' + 2y' + 3y = 6, y_p = 2 + e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x$

3-151 *a)* $y'' = x^2 - 1, y_p = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

b) $y'' = x^2 - 1, y_p = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$

3-152 Si $y_{p1} = -1/3$ es una solución particular de $y'' - 9y = 3$ y $y_{p2} = -x/9$ es una solución particular de $y'' - 9y = x$, determine la solución general de $y'' - 9y = 3 + x$.

3-153 Si $y_{p1} = 2x^2 + x$ es una solución particular de $y'' + 4y = 8x^2 + 4x$ y $y_{p2} = 2e^x$ es una solución particular de $y'' + 4y = 10e^x$, determine la solución general de $y'' + 4y = 8x^2 + 4x + 10e^x$.

3-154 Si $y_{p1} = -\frac{1}{3}x + 1$ es una solución particular de $y'' + 6y' + 9y = 7 - 3x$ y $y_{p2} = -2e^{-2x}$ es una solución particular de $y'' + 6y' + 9y = -2e^{-2x}$, determine la solución general de $y'' + 6y' + 9y = 3x + 11 - 2e^{-2x}$.

3-155 Si $y_{p1} = -2\operatorname{sen} 2x$ es una solución particular de $y'' + y = 6\operatorname{sen} 2x$ y $y_{p2} = 2$ es una solución particular de $y'' + y = 2$, determine la solución general de $y'' + y = 6\operatorname{sen} 2x + 2$.

3-7 Ecuaciones no homogéneas: el método de coeficientes indeterminados

3-156C ¿En qué condiciones la forma general de una solución particular y_p corresponde a un término no homogéneo $R(x)$, de la forma $AxR(x)$, donde A es una constante?

3-157C ¿En qué condiciones la forma general de una solución particular y_p corresponde a una término no homogéneo $R(x)$, de la forma $Ax^2R(x)$, donde A es una constante?

3-158C ¿En qué condiciones la forma general de una solución particular y_p corresponde a un término no homogéneo $R(x) = \operatorname{sen} x$ de la forma $A\operatorname{sen} x$, donde A es una constante?

3-159C ¿Por qué la forma general de una solución particular y_p correspondiente a un término no homogéneo x^5 se toma como un polinomio de quinto grado en vez de solo como Ax^5, donde A es una constante?

Usando el método de coeficientes indeterminados, determine la solución general de las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden:

3-160 *a)* $y'' + 9y = 2\operatorname{sen} x$
b) $y'' + 9y = 2x\cos x$
c) $y'' + 9y = -3x\cos 3x$
d) $y'' + 9y = xe^x\operatorname{sen} 2x - 5\operatorname{sen} 2x + 3\cos 2x$

3-161 *a)* $y'' - 4y' + 4y = -2e^{3x}$
b) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x+3}$
c) $y'' - 4y' + 4y = 5xe^{2x}$
d) $y'' - 4y' + 4y = e^x\cos 2x$

3-162 *a)* $y'' - 2y' + 2y = x^2 + 1$
b) $y'' - 2y' + 2y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$
c) $y'' - 2y' + 2y = e^x\operatorname{sen} x$
d) $y'' - 2y' + 2y = x^3e^x$

3-163 *a)* $y'' - 3y' = x - 2$
b) $y'' - 3y' = (x - 1)e^x$
c) $y'' - 3y' = x^2 - 1$
d) $y'' - 3y' = xe^x\operatorname{sen} 2x$

3-164 *a)* $y'' - 6y' + 10y = 20$
b) $y'' - 6y' + 10y = x^2e^x$
c) $y'' - 6y' + 10y = e^{3x}\cos x$
d) $y'' - 6y' + 10y = x^2\operatorname{sen} 2x + \cos 2x$

3-165 *a)* $y'' + y = 2\operatorname{sen} x - 3\cos x$
b) $y'' + y = x^2 + 5 - e^x$
c) $y'' + y = (x^2 - 1)e^x$
d) $y'' + y = e^{2x}\operatorname{sen} 3x$

3-166 *a)* $y'' = 5$ *b)* $y'' = -3x^2e^x$
c) $y'' = 2x^2 - 3$ *d)* $y'' = 8\cos 2x$

Determine la solución específica de los siguientes problemas de valor inicial. Use el método de coeficientes indeterminados para encontrar la solución particular:

3-167 $y'' - 2y' + 2y = x^3 - 5, y(0) = 6$, y $y'(0) = 0$

3-168 $y'' - 3y' = x + 3 - 2e^{2x}, y(0) = 0$, y $y'(0) = 0$

3-169 $y'' - y = 4e^x + x\cos x, y(0) = 1$, y $y'(0) = -2$

3-170 $y'' + 4y = 3\operatorname{sen} 2x, y(\pi) = 0$, y $y'(\pi) = 1$

3-8 Ecuaciones no homogéneas: el método de variación de parámetros

3-170C ¿Podemos aplicar el método de variación de parámetros usando cualquier par de funciones solución homogéneas en la ecuación 3-62 en vez de usar las dos soluciones fundamentales?

Usando el método de variación de parámetros, determine la solución particular de las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden. Verifique el resultado en la parte a) usando el método de coeficientes indeterminados:

3-171 *a)* $y'' - 4y = xe^{2x}$ *b)* $y'' - 4y = x - x^2$

3-172 *a)* $y'' + 9y = \cos 2x$ *b)* $y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$

3-173 *a)* $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos 3x$
b) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\tan x$

3-174 *a)* $y'' + y' = x^3 - 1$ *b)* $y'' + y' = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^a}$

3-175 *a)* $y'' - 4y' = x + 5$
b) $y'' - 4y' = \frac{2x - 3}{(x - 2)^a}$

3-176 *a)* $y'' = x^2e^x$ *b)* $y'' = \frac{1}{x^a}$

3-177 *a*) $y'' - 2y' + y = e^{2x} + 8$

b) $y'' - 2y' + y = \dfrac{6e^x}{x^a}$

3-9 Ecuación de Euler

3-178C ¿Por qué la solución de la ecuación de Euler no es válida en $x = 0$?

3-179C Describa dos maneras sistemáticas de resolver la ecuación de Euler. ¿Cuál procedimiento es más práctico?

Determine la solución general de las siguientes ecuaciones de Euler de segundo orden y especifique el intervalo en el que la solución es válida:

3-180 *a*) $x^2y'' + xy' = 0$ *b*) $x^2y'' + xy' = \ln x$

3-181 *a*) $x^2y'' + 3xy' - 2y = 0$

b) $(x - 1)^2y'' + 3(x - 1)y' - 2y = 6$

3-182 *a*) $x^2y'' + xy' - 2y = 0$

b) $(x + 2)^2y'' + (x + 2)y' - 2y = x - 2$

3-183 *a*) $2x^2y'' + 6xy' + 2y = 0$

b) $2x^2y'' + 6xy' + 2y = 4x^2$

3-184 *a*) $x^2y'' - y = 0$ *b*) $x^2y'' - y = (x^2 + 1)\,\text{sen}\,x$

3-185 *a*) $-2x^2y'' + 6xy' - 12y = 0$

b) $-2x^2y'' + 6xy' - 12y = x - 1$

3-186 *a*) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

b) $x^2y'' + 5xy' + 4y = x \ln x$

3-10 Aplicaciones de ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

3-10-1 Vibraciones mecánicas

3-187C Escriba la ecuación diferencial que rige el movimiento de un sistema resorte-masa-amortiguador *horizontal* y explique el significado físico de cada término. También exprese cuándo desaparecerá cada término de la ecuación. ¿Cómo elegiría usted la ubicación de $x = 0$ en este caso?

3-188C ¿Cuál es la diferencia entre movimiento no amortiguado y movimiento amortiguado? ¿En qué se distinguen las vibraciones libres de las vibraciones forzadas?

3-189C ¿Cuándo producen pulsaciones las vibraciones forzadas sin amortiguación? ¿Cuándo producen resonancia?

3-190C Describa el movimiento sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado.

3-191C ¿En qué se diferencia un movimiento subamortiguado de un movimiento armónico simple?

3-192C Para una amortiguación fija, ¿cuál sistema es más susceptible a las vibraciones de gran amplitud: uno con una frecuencia natural baja o uno con alta?

3-193 Una masa $m = 0.5$ kg está suspendida de un resorte que se estiró 0.2 cm bajo la influencia del peso de esta masa. Ahora se tira de la masa hacia abajo y se suelta. En el tiempo $t = 0$, se observa que la masa pasa por su posición de equilibrio estático con una velocidad de 10 m/s. Despreciando toda fricción, determine la frecuencia natural, el periodo y la amplitud del movimiento resultante.

3-194 Para que la identidad $A \cos(\omega t - \phi_1) = B\,\text{sen}\,(\omega t - \phi_2)$ sea válida, determine cuáles deben ser los valores de B y ϕ_2 en términos de A y ϕ_1.

3-195 Una masa $m = 1$ kg está suspendida de un resorte que está estirado 1 cm bajo la influencia del peso de esta masa. Ahora se aplica una fuerza periódica externa de $F(t) = 200 \cos \omega t$ sobre la masa, que inicialmente estaba en equilibrio estático. Despreciando toda fricción, obtenga una relación para el desplazamiento de la masa en función del tiempo, $x(t)$. También determine el valor de ω que hará que se produzca resonancia.

3-196 Considere una masa m suspendida de un resorte que tiene una constante de resorte k. Ahora se aplica una fuerza periódica externa de $F(t) = F_0 \cos \omega t + F_1$ sobre la masa que estaba inicialmente en equilibrio estático. Despreciando toda fricción, obtenga una relación para el desplazamiento de la masa en función del tiempo, $x(t)$. También determine el valor de ω que hará que se produzca resonancia.

3-197 Considere una masa m suspendida de un resorte con constante de resorte k. Ahora se aplica una fuerza periódica externa $F(t) = F_0\,\text{sen}\,\omega t$ a la masa, que inicialmente estaba en equilibrio estático. Use los valores $\omega = 20$, $\omega_0 = 30$, $m = 1$ y $F_0 = 100$. Despreciando toda fricción, obtenga una relación para la velocidad de la masa en función del tiempo, $v(t)$. También determine el valor máximo de la velocidad, $v_{\text{máx}}$ y la diferencia de tiempo de aparición de dos velocidades máximas.

3-198 Una masa $m = 5$ kg está suspendida de un resorte que se estiró 2 cm bajo la influencia del peso de esta masa. La masa está conectada a un amortiguador con una constante de amortiguación c $= 200$ N · s/m. Ahora se tira de la masa hacia abajo 1 cm y luego se suelta con una velocidad inicial cero. Determine a qué distancia de su posición de equilibrio estático estará la masa en el tiempo $t = 0.05$ s.

3-199 Una masa $m = 0.5$ kg cuelga de un resorte que se estiró 0.2 cm bajo la influencia del peso de esta masa. La masa está conectada a un amortiguador con una constante de amortiguación $c = 2\,000$ N · s/m. Ahora se tira de la masa 2 cm hacia abajo y luego se suelta con una velocidad descendente de 20 m/s. Determine si la masa pasará en algún momento por su posición de equilibrio estático. Si pasa, determine el tiempo y la velocidad de la masa en ese instante.

3-200 Una masa $m = 4$ kg cuelga de un resorte que se estiró 3 cm bajo la influencia del peso de la masa. La masa está conectada a un amortiguador con constante de amortiguación $c = 5\,000$ N · s/m. Ahora se tira de la masa 5 cm hacia abajo y luego se suelta con una velocidad ascendente inicial de 30 m/s. Determine el desplazamiento máximo de la masa con respecto a su posición de equilibrio estático durante todo el movimiento.

3-201 Una masa $m = 5$ kg cuelga de un resorte que se ha estirado 2 cm bajo la influencia del peso de la masa. La masa está conectada a un amortiguador con una constante de amortiguación $c = 200$ N · s/m. Ahora se aplica una fuerza periódica externa $F(t) = 200 \cos \omega t$ sobre la masa, que inicialmente estaba en equilibrio estático. Obtenga la relación para el desplazamiento de la masa en función del tiempo, $x(t)$. También determine el valor de ω que hará que la amplitud del movimiento tenga un valor máximo.

3-202 En la figura P3-202, la masa m está en equilibrio en el punto E (donde $x = 0$). Despreciando toda fricción sobre la superficie inclinada, derive la ecuación diferencial del movimiento.

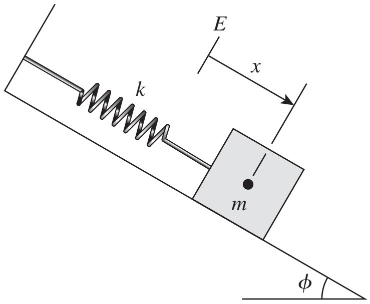


FIGURA P3-202

3-203 En la figura P3-203, el extremo izquierdo del resorte k_1, cuyo desplazamiento es y, es impulsado por la leva giratoria. El desplazamiento $y(t)$ es una función del tiempo dada. Cuando $x = y = 0$, ambos resortes están en su longitud libre. Desprecie toda fricción en la superficie y obtenga la ecuación diferencial del movimiento en términos de x.

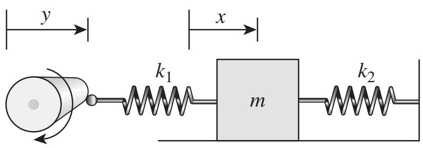


FIGURA P3-203

3-204 Un objeto de masa m y peso W cae desde una altura h sobre una plataforma apoyada en un resorte, como se muestra en la figura P3-204.

a) Determine la expresión para la velocidad v de la masa al tocar la plataforma.

b) Suponiendo que la masa no rebota contra la plataforma y que el resorte está en su longitud libre cuando $x = 0$, determine la compresión máxima en el resorte en términos de los parámetros *m, g, k* y *h.*

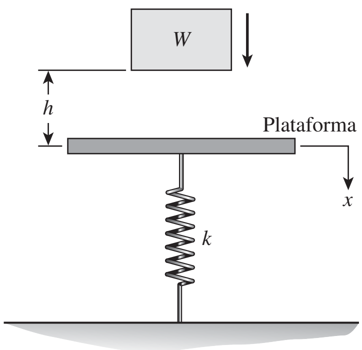


FIGURA P3-204

3-205 Un vagón de carga de masa 18 000 kg golpea a un amortiguador de colisión al final de la vía mientras se mueve a 1.3 m/s, como se muestra en la figura P3-205. La tensión del amortiguador es $k = 73\,000$ N/m, y la constante de amortiguación es $c = 88\,000$ N $\cdot$ s/m. Sea x el desplazamiento del vagón después del contacto con el amortiguador (dirección positiva a la derecha). Observe que $x = 0$ corresponde al resorte en su longitud libre. Suponga que el vagón no rebota contra el amortiguador. Determine la máxima compresión del resorte.

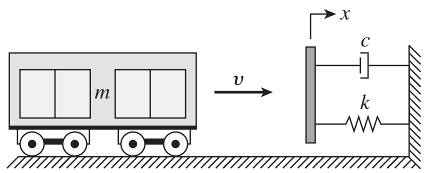


FIGURA P3-205

3-206 La varilla en la figura P3-206 tiene un momento másico de inercia I_0 alrededor del punto O. La fuerza aplicada f empuja la punta de la varilla hacia la derecha. Suponga que el desplazamiento x es suficientemente pequeño para que su movimiento sea esencialmente horizontal. Cuando $x = 0$, los resortes están en su longitud libre. Derive la ecuación diferencial de movimiento en términos de x

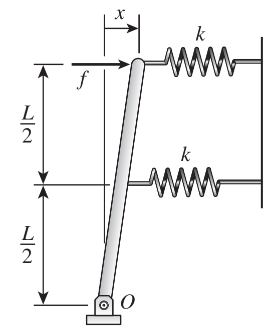


FIGURA P3-206

3-207 En la figura P3-207, observe que, para valores pequeños de ϕ, el movimiento del punto de conexión del resorte y el amortiguador es aproximadamente horizontal, su desplazamiento es $L_1\phi$, y su velocidad es $L_1\dot{\phi}$. Sumando los momentos alrededor del punto O, derive la ecuación diferencial del movimiento en términos de ϕ.

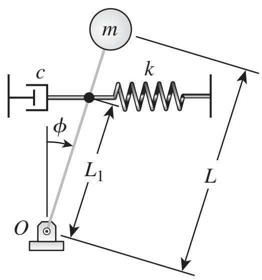


FIGURA P3-207

3-208 Un motor está apoyado en una viga voladiza de longitud L, como se muestra en la parte *a*) de la figura P3-208. Es posible comprobar, por mecánica de materiales, que el extremo de la viga se cambiará a una distancia vertical x al aplicar una fuerza F en dicho extremo, de modo que

$$x = \frac{4L^3}{Ewh^3}f$$

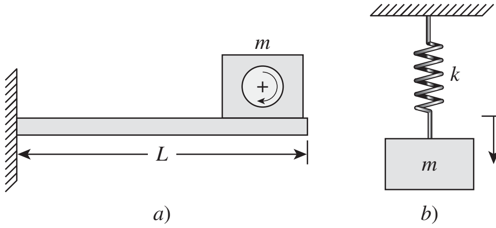


FIGURA P3-208

donde E es el módulo de Young de elasticidad para el material de la viga, w es la anchura de la viga y h es su espesor. Entonces, la viga actúa como un resorte con una constante de resorte k dada por

$$k = \frac{f}{x} = \frac{Ewh^3}{4L^3}$$

y el sistema viga-motor puede representarse como el sistema equivalente que se muestra en la parte *b*) de la figura, suponiendo que la masa de la viga es pequeña en comparación con la masa del motor. Suponga que el motor puede considerarse como un punto de masa en el extremo de la viga. ¿Cuánto disminuirá la frecuencia natural del sistema ω_0 si la longitud de la viga L se duplica?

3-209 Un motor de masa m está apoyado en una viga voladiza de longitud L, como se muestra en la parte *a*) de la figura P3-209. La viga actúa como resorte de tensión k, que se opone al desplazamiento vertical del motor. El sistema viga-motor puede representarse como el sistema equivalente que se muestra en la parte *b*) de la figura, suponiendo que la masa de la viga sea pequeña en comparación con la masa del motor. Suponga que el motor puede considerarse como un punto de masa en el extremo de la viga. Si el motor está desbalanceado, ejercerá una fuerza vertical f sobre el extremo de la viga de la forma $f(t) = b\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$, donde ω es la velocidad del motor en unidades circulares y b es una constante que depende de la cantidad de desbalance. Por tanto, la ecuación del movimiento es $m\ddot{x} + kx = b\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$. Suponiendo que las condiciones iniciales son cero, obtenga la expresión para la solución $x(t)$.

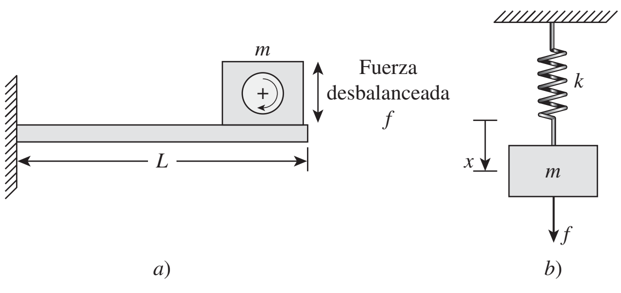


FIGURA P3-209

3-210 Una razón adimensional, llamada **razón de amortiguación**, se usa frecuentemente en el análisis de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. La razón de amortiguación de la ecuación $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{\text{ext}}$ se define como

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

donde ζ es la letra griega zeta.

a) Exprese la ecuación y las raíces características de la ecuación diferencial anterior en solo términos de dos parámetros adimensionales, ζ y la frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, suponiendo que las raíces características son complejas.

b) Compruebe que las raíces son complejas si $\zeta < 1$, reales e iguales si $\zeta = 1$, y reales y desiguales si $\zeta > 1$.

3-211 Exprese la solución homogénea de la ecuación diferencial $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{\text{ext}}$ en términos de los parámetros adimensionales, la razón de amortiguación $\zeta = c/2\sqrt{mk}$ y la frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, y las dos condiciones iniciales x_0 y v_0.

3-212 En la siguiente ecuación, el lado derecho es una constante b: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b$. Para el caso en que las condiciones iniciales son cero, exprese la solución de esta ecuación diferencial en términos de b y ambos parámetros adimensionales, la razón de amortiguación ζ y la frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

3-213 En la siguiente ecuación, el lado derecho es sinusoidal, con una amplitud A y frecuencia circular ω: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A \operatorname{sen} \omega t$.

Para el caso en que las condiciones iniciales son cero, exprese la solución de estado estacionario de esta ecuación diferencial en términos de A, la razón $\Delta = A/k$ y los dos parámetros adimensionales, la razón de amortiguación $\zeta = c/2\sqrt{mk}$ y la **razón de frecuencia** r, definida como $r = \omega/\omega_0$, donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

3-10-2 Circuitos eléctricos

3-214C ¿Cómo se calcula la frecuencia de resonancia de un circuito en serie *RLC*?

3-215 Considere un circuito en serie *RLC* con resistencia despreciable ($R = 0$), y ningún voltaje impuesto. La carga inicial en el capacitor es Q_0, y la corriente inicial es cero. Resolviendo la ecuación diferencial rectora, y partiendo de $\omega_0^2 = 1/LC$, obtenga relaciones para la carga en el capacitor $Q(t)$ y la corriente en el circuito $I(t)$, como funciones del tiempo.

3-216 Considere un circuito en serie *RLC* con resistencia despreciable ($R = 0$) y un voltaje aplicado que cambia periódicamente, de la forma $E(t) = E_0 \cos \omega t$. Resolviendo la ecuación diferencial rectora y partiendo de $\omega_0^2 = 1/LC$, obtenga una relación para la carga en el capacitor $Q(t)$ en función del tiempo. Investigue qué pasa con la carga en el capacitor cuando $t \to \infty$ para el caso especial de $\omega = \omega_0$.

3-217 Considere un circuito en serie *RLC* sin voltaje impuesto. Resolviendo la ecuación diferencial rectora, obtenga relaciones para la carga en el capacitor, $Q(t)$ en función del tiempo, correspondientes a los tres casos en que $R^2 - 4L/C$ sea positiva, negativa y cero.

3-218 Amplíe el problema 3-216 y despeje la corriente en el circuito, $I(t)$.

3-11 Problemas de computadora

Use una computadora para determinar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes:

3-219 $y'' + 5y' + 4y = 0$

3-220 $y'' + 6y' + 9y = 0$

3-221 $y'' + 6y' + 13y = 0$

3-222 $y'' + 4y = 0$

Use una computadora para determinar la solución específica de los siguientes problemas de valor inicial:

3-223 $y'' + 4y = 0, y(\pi) = 0,$ y $y'(\pi) = 1$

3-224 $2y'' + y' - y = 0, y(0) = -5,$ y $y'(0) = 6$

3-225 $y'' - 6y' + 9y = 0, y(-2) = 1,$ y $y'(-2) = 0$

3-226 $y'' + 4y' + 20y = 0, y(\pi/2) = 0,$ y $y'(\pi/2) = 2$

Use una computadora para determinar la solución específica de los siguientes problemas de valor en la frontera:

3-227 $y'' - y = 0, y(0) = 100,$ y $y(5) = 0$

3-228 $y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 0,$ y $y(2) = 6$

Use una computadora para determinar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden:

3-229 $y'' - 4y = 4e^{3x}$

3-230 $y'' - 4y = -3x^2e^{3x}$

3-231 $y'' + 9y = 2\,\text{sen}\,x$

3-232 $y'' + 9y = 2x\cos x$

3-233 $y'' - 4y' + 4y = 5xe^{2x}$

3-234 $y'' - 3y' = xe^x\,\text{sen}\,2x$

3-235 $y'' - 2y' + 2y = \text{sen}\,x + \cos 2x$

Use una computadora para determinar la solución específica de los siguientes problemas de valor inicial:

3-236 $y'' + 16y = \text{sen}\,2x - 3\cos 2x, y(\pi/2) = 1,$ y $y'(\pi/2) = 0$

3-237 $y'' - 2y' + 2y = x^3 - 5, y(0) = 6,$ y $y'(0) = 0$

Use una computadora para determinar la solución general de las siguientes ecuaciones de Euler de segundo orden:

3-238 $y'' + y = 0$

3-239 $x^2y'' + 3xy' - 2y = 0$

Problemas de repaso

3-240 Compruebe que si n funciones son linealmente dependientes en un intervalo, entonces al menos una de esas funciones puede expresarse como una combinación lineal de las demás funciones en ese intervalo.

3-241 Compruebe que si una función en un conjunto de n funciones puede expresarse como una combinación lineal de las demás funciones en un intervalo, entonces estas n funciones son linealmente dependientes en ese intervalo.

Determine la solución general de las siguientes ecuaciones lineales para $x > 0$. También determine las constantes arbitrarias en la solución general cuando se especifican las condiciones iniciales:

3-242 $y'' - 16y = 0$

3-243 $y'' - y' = xe^{2x}\cos x$

3-244 $y'' + y' = 0$

3-245 $y'' = \dfrac{1}{x} + x\,\text{sen}\,x$

3-246 $2x^2y'' + 5xy' = x^2 - 1$

3-247 $y'' + y' + y = x^3 - 2$

3-248 $y'' + 2y' = 0$

3-249 $x^2y'' + xy' = \dfrac{1}{x} - 2$

3-250 $y'' - 6y' + 9y = 0$

3-251 $y'' - 3y' + 3y = 0$

3-252 $y'' + y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

3-253 $y'' + y = 4e^{3x} - x$

3-254 $y'' - 4y' = x + 1$

3-255 $y'' - 4y' + 3y = -e^{2x} - 1$

3-256 $y'' - y' = x^2 + 1 - e^x\,\text{sen}\,x$

3-257 $y'' + y = x\,\text{sen}\,x$

3-258 $y'' - 9y' + 8y = x^2e^{3x}$

3-259 $y'' + 16y = xe^{2x} - 1$

3-260 $y'' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

3-261 $y'' + 9y' = x^2\cos 2x$

3-262 $x^2y'' - 3xy' + y = 0$

3-263 $y' + y = 1, y(\pi) = y'(\pi) = 0$

3-264 $x^2y'' + 4y = 0$

3-265 $x^2y'' + y = 0$

3-266 $y'' + 4y' + 1 = x^2 - 1, y(0) = 0, y'(0) = 1$

3-267 Una masa m suspendida de un resorte con $k = 2\,000$ N/m está inicialmente en equilibrio estático. Ahora se aplica una fuerza periódica externa de $F(t) = 50\cos 10t$, y se observa que la masa resuena bajo la influencia de esta fuerza. Determine el valor de la masa m.

3-268 Una masa $m = 2$ kg está suspendida de un resorte que está estirado 0.2 cm bajo la influencia del peso de esta masa. La masa está conectada a un amortiguador con una constante de amortiguación $c = 500$ N · s/m. Ahora se aplica una fuerza periódica externa de $F(t) = 50\,\text{sen}\,10t$ a la masa, que inicialmente estaba en equilibrio estático. Obtenga una relación para la velocidad de la masa en función del tiempo, $v(t)$. También determine el valor máximo de la velocidad $v_{\text{máx}}$ y la diferencia de tiempo entre las dos velocidades máximas.

3-269 Considere un péndulo de longitud L y masa m equilibrado *verticalmente* que inicialmente se desplaza de su posición *vertical* de equilibrio estático en un ángulo θ_0. Despreciando toda resistencia y dado que sen $\theta \cong \theta$ para ángulos pequeños, derive la ecuación diferencial que rige el movimiento de oscilación del péndulo, y despeje el desplazamiento angular θ de dicha ecuación suponiendo que el péndulo se libera con velocidad cero.

3-270 Considere un circuito en serie *RLC* con resistencia $R = 2 \times 10^5\ \Omega$ inductancia, $L = 0.1$ H, capacitancia $C = 2 \times 10^{-5}$ F y un voltaje aplicado de $E(t) = 5 \cos 60t$. Determine la corriente de estado estacionario en el circuito, $I(t)$. También determine el valor de la capacitancia C que maximizará esta corriente, manteniendo constantes R y L.

3-271 Considere un circuito en serie *RLC* con resistencia $R = 10^3\ \Omega$, inductancia $L = 0.5$ H, capacitancia $C = 5 \times 10^{-6}$ F, y sin voltaje aplicado. La carga inicial en el capacitor es $Q_0 = 8 \times 10^{-4}$ C. El interruptor se activa y se desactiva en el tiempo $t = 0$, y la corriente comienza a fluir por el circuito. Determine cuánto tardará la corriente máxima en el circuito en disminuir a la mitad.

CAPÍTULO

4

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

La naturaleza de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y de segundo orden es bastante diferente; por tanto, hay poco en común entre sus procedimientos de resolución. Por ejemplo, las ecuaciones lineales de primer orden siempre pueden resolverse de manera sencilla y directa, suponiendo que sea posible realizar las integraciones necesarias. Sin embargo, en ecuaciones lineales de segundo orden, este solo es el caso para ecuaciones con coeficientes constantes. Aun así, la solución puede ser algo complicada si la ecuación es no homogénea.

Es una fortuna que haya un estrecho paralelo entre las ecuaciones lineales de segundo orden y las de orden superior. La teoría de las ecuaciones lineales de orden superior es análoga a la de las ecuaciones lineales de segundo orden. En este capítulo, básicamente extendemos la teoría relativa a las ecuaciones lineales de segundo orden hacia las ecuaciones lineales de orden superior. Las pruebas presentadas en el capítulo 3 para el caso del segundo orden se pueden extender a ecuaciones de orden superior mediante la generalización del procedimiento. Por tanto, no se presentan las pruebas para el caso de orden superior.

Las ecuaciones diferenciales lineales de órdenes segundo y superior son como un edificio con planos de pisos idénticos. Si se domina a conciencia el segundo piso, no debe haber problema para llegar a los pisos superiores.

Los títulos de las secciones de este capítulo son esencialmente idénticos a los del capítulo anterior. Cualquier sección de este capítulo es una extensión natural de la sección correspondiente en el capítulo anterior, y ambos pueden estudiarse en paralelo si así se desea. Al estudiar una sección de este capítulo, es aconsejable repasar primero la sección correspondiente del capítulo anterior.

OBJETIVOS

Al terminar este capítulo usted deberá ser capaz de:

1. Extender los métodos del capítulo 3 de ecuaciones de segundo orden a ecuaciones de orden más alto.
2. Usar el wronskiano para determinar si las soluciones son linealmente independientes.
3. Identificar un conjunto fundamental de soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden superior.
4. Usar el método de reducción de orden para reducir el orden de la ecuación cuando se conoce una solución fundamental.
5. Obtener la solución general de una ecuación lineal homogénea de orden superior con coeficientes constantes.
6. Obtener la solución particular de una ecuación lineal homogénea de orden superior con coeficientes constantes usando el método de coeficientes indeterminados y el método de variación de parámetros.
7. Resolver la ecuación de Euler de orden superior.
8. Usar un software para obtener la solución de forma cerrada de ecuaciones de orden superior.

4-1 ▪ INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

La terminología de ecuaciones de orden superior es la misma que la de las ecuaciones de segundo orden. Por ejemplo, mencionamos varias veces que una ecuación diferencial es **lineal** si no contiene ninguna potencia, producto, ni otra función no lineal de la variable dependiente y ni de sus derivadas. La ecuación diferencial lineal de orden n puede escribirse en la forma más general como

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = R(x) \qquad \textbf{(4-1)}$$

donde $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son funciones dadas que solo pueden depender de la variable independiente x. Observe que una ecuación lineal no incluye ninguna función no lineal de la variable dependiente (como yy', y'^2 o e^y), pero puede incluir funciones no lineales de la variable independiente (tales como x^2, e^x o x^2 sen x).

La función $R(x)$ representa todos los términos que no incluyen la variable dependiente y ni sus derivadas, y se conoce como **término no homogéneo**. Se dice que una ecuación diferencial es **no homogénea** cuando $R(x) \neq 0$, y **homogénea** cuando $R(x) = 0$. Entonces, la ecuación lineal homogénea de orden n puede escribirse en la forma más general como

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0 \qquad \textbf{(4-2)}$$

Al resolver una ecuación lineal no homogénea, a veces conviene considerar por separado la parte homogénea de la ecuación. Esto se hace simplemente igualando $R(x)$ a cero. La ecuación resultante se llama **ecuación homogénea relacionada** o **ecuación complementaria** de la ecuación diferencial dada. Por tanto, la ecuación 4-2 es la ecuación homogénea relacionada de la ecuación 4-1.

Las ecuaciones diferenciales lineales también se clasifican con respecto a los coeficientes de la variable dependiente y y de sus derivadas. Si estos coeficientes son simplemente algunas constantes, se dice que la ecuación tiene **coeficientes constantes**. Si uno o más coeficientes dependen de la variable independiente x, entonces se dice que la ecuación tiene **coeficientes variables**. Por tanto, la ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes puede expresarse en la forma más general como

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = R(x) \qquad \textbf{(4-3)}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes reales (tales como 3, -4.2, $3/5$ o incluso cero). Observe que el término no homogéneo $R(x)$ todavía puede ser función de x.

En el capítulo 3 dijimos que una ecuación diferencial lineal de segundo orden tiene una solución única en un intervalo $x_1 < x < x_2$ en el cual los coeficientes de la ecuación son continuos, siempre y cuando las dos condiciones iniciales se especifiquen en el punto x_0, siendo x_0 cualquier punto dentro de este intervalo. La *existencia y unicidad* de la solución de un problema de valor inicial lineal de orden n se expresa de manera similar mediante el teorema 4-1.

Este teorema garantiza que una ecuación diferencial lineal de orden n tiene una solución única en un intervalo, siempre y cuando los coeficientes sean continuos en ese intervalo y se especifiquen n condiciones iniciales en un punto dentro de ese intervalo (figura 4-1). Observe que la ecuación diferencial debe estar en la *forma estándar* (el coeficiente principal debe ser igual a uno) para que este teorema sea aplicable. El teorema 4-1 nos confirma que, una vez que hallemos una función que satisfaga tanto la ecuación diferencial como las condiciones iniciales,

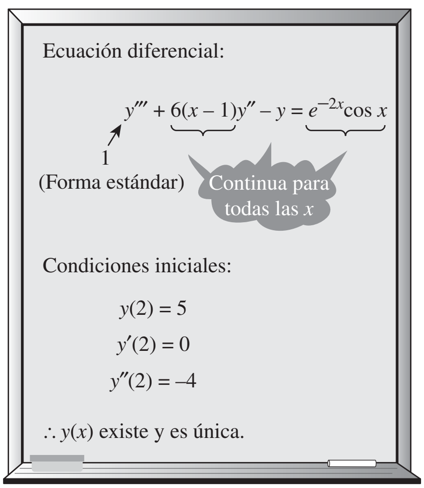


FIGURA 4-1
Problema de valor inicial lineal de tercer orden que satisface las condiciones del teorema 4-1 en el intervalo $-\infty < x < \infty$ y, por tanto, tiene una solución única en ese intervalo.

TEOREMA 4-1 Existencia y unicidad

Si las funciones $P_1(x)$, $P_2(x)$, . . . , $P_n(x)$ y $R(x)$ son continuas en un intervalo $x_1 < x < x_2$ y si x_0 es cualquier punto dentro de este intervalo, entonces la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = R(x)$$

tiene una (y sólo una) solución única en este intervalo que satisface las n condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

donde $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ son constantes reales específicas.

habrá terminado la búsqueda de una solución. No hay otra función que satisfaga la ecuación diferencial y las condiciones iniciales específicas.

EJEMPLO 4-1 Existencia de una solución

Compruebe que el siguiente problema de valor inicial tiene una solución única y determine el intervalo de esa solución:

$$y''' - \frac{2x}{x^2 - 4}y'' + 3y = \frac{x + 1}{x^2} + e^x$$

$$y(1) = 0, y'(1) = -3 \text{ y } y''(1) = 5$$

Solución Éste es un *problema de valor inicial*, ya que todas las condiciones se especifican para el mismo valor de x en $x_0 = 1$. La ecuación diferencial es de *tercer orden*, puesto que la derivada de orden superior es y'''; es *lineal*, ya que no incluye potencias, productos, ni funciones no lineales de y ni de sus derivadas; es *no homogénea*, porque los términos del lado derecho no incluyen la variable dependiente y ni sus derivadas, y está en la *forma estándar*, ya que el coeficiente de y''' es 1. Al compararla con la ecuación 4-1, vemos que

$$P_1(x) = -\frac{2x}{x^2 - 4}, \; P_2(x) = 0, P_3(x) = 3 \text{ y } R(x) = \frac{x + 1}{x^2} + e^x$$

Las funciones $P_2(x)$ y $P_3(x)$ son continuas, pero la función $P_1(x)$ es discontinua en $x = 2$ y $x = -2$, debido a que se vuelve infinita en estos puntos. La función $R(x)$ es discontinua en $x = 0$; por tanto, se aplica el teorema de la existencia y la unicidad a esta ecuación en cualquier intervalo que no contenga los puntos $x = -2$, 0 y 2. En concreto, $R(x)$ es continua en los intervalos $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 0$, $0 < x < 2$ y $2 < x < \infty$.

Considerando que las condiciones iniciales están definidas en $x_0 = 1$, el teorema 4-1 garantiza que este problema de valor inicial tiene una solución única en el intervalo $0 < x < 2$.

Como consecuencia directa de este teorema, podemos decir que la solución trivial $y = 0$ es la única solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes continuos, cuyas condiciones iniciales completas sean igual a cero.

Para ecuaciones lineales homogéneas de cualquier orden con coeficientes constantes, $R(x) = 0$ y los coeficientes son naturalmente continuos en $-\infty < x < \infty$; entonces, las soluciones de tales ecuaciones son válidas para todas las x. No necesitamos especificar un intervalo en este caso. En general, si los coeficientes y los términos no homogéneos son continuos sobre todo el eje x, entonces x_0 puede ser cualquier punto, y la solución es válida en todo el eje x.

Observe que el teorema 4-1 garantiza la existencia y unicidad de la solución de un problema de valor inicial de orden n en condiciones específicas. No existen tales garantías para problemas de valores en la frontera. Un problema de valor en la frontera tendrá una solución única sólo cuando las condiciones en la frontera señaladas produzcan valores únicos para las constantes arbitrarias en la solución general.

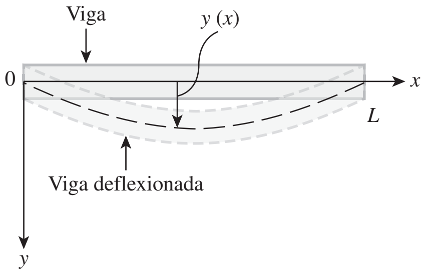


FIGURA 4-2
Deflexión de una viga por influencia de su propio peso (ejemplo 4-2).

EJEMPLO 4-2 Deflexión de una viga bajo su propio peso

La deflexión de una viga horizontal homogénea con una sección transversal uniforme y una longitud L está regida por la ecuación diferencial de cuarto orden

$$y^{(iv)} = \frac{\rho g}{EI} \tag{4-4}$$

donde ρ es la densidad de masa de la viga, g es la aceleración de la gravedad, E es el módulo de Young del material de la viga (que es una medida de su rigidez) e I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga alrededor de una línea horizontal que pasa por su centro ($I = \pi r^4/4$ para secciones circulares de radio r).

La función y denota la deflexión de la viga en cualquier ubicación x, como se muestra en la figura 4-2. Determine *a*) la solución general y *b*) la solución específica para el caso de una viga fija-fija (con ambos lados de ésta firmemente fijados).

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal, no homogénea, sencilla de cuarto orden, con coeficientes constantes. Los coeficientes y el término no homogéneo son funciones continuas en todo el eje x. Por tanto, al menos matemáticamente, la solución no se limita a ningún intervalo finito; sin embargo, la ecuación diferencial describe la deflexión de la viga en $0 \leq x \leq L$. Entonces limitaremos la solución dentro de este intervalo sólo por razones físicas.

a) La ecuación diferencial está en una forma fácilmente integrable; por tanto, obtenemos la solución general mediante cuatro integraciones simples sucesivas:

$$y''' = \frac{\rho g}{EI}x + C_1$$

$$y'' = \frac{\rho g}{2EI}x^2 + C_1 x + C_2$$

$$y' = \frac{\rho g}{6EI}x^3 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$y = \frac{\rho g}{24EI}x^4 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \tag{4-5}$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes arbitrarias. Observe que la solución general de esta ecuación diferencial de segundo orden incluye cuatro constantes arbitrarias, como se esperaba.

b) Una viga bien apoyada no se puede deflexionar en el punto de apoyo. Por tanto, la deflexión en ambos extremos debe ser cero, de modo que $y(0) = y(L) = 0$. Además, los extremos de una viga firmemente conectada no pueden girar libremente y, por tanto, la curva de deflexión debe ser horizontal (pendiente cero) en los extremos, como se muestra en la figura 4-3. Por tanto, las otras dos condiciones en la frontera deben ser $y'(0) = y'(L) = 0$. Aplicando estas cuatro condiciones en la frontera obtenemos cuatro ecuaciones para la determinación de las cuatro constantes arbitrarias C_1, C_2, C_3 y C_4. Despejándolas y sustituyendo sus valores en la solución general, la solución específica de este problema de valor en la frontera se determina como

$$y = \frac{\rho g L^4}{24EI}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \tag{4-6}$$

La solución no incluye constantes arbitrarias. Entonces, es una solución única del problema de valor en la frontera dado.

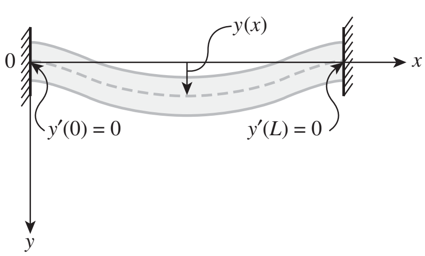


FIGURA 4-3
Cuando los extremos de la viga en el ejemplo 4-2 están firmemente fijados, la curva de deflexión tiene que ser horizontal en ambos extremos.

Repaso de la sección

Los problemas marcados con una "C" son conceptuales para discusión

4-1C ¿Cuántas constantes arbitrarias diferentes incluye como mínimo la solución de una ecuación diferencial lineal de orden n?

4-2C ¿Cuántas condiciones iniciales deben especificarse para garantizar la existencia de una solución única para una ecuación diferencial lineal de orden n en un intervalo específico?

4-3 Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son 1) lineales o no lineales, 2) homogéneas o no homogéneas y 3) si tienen coeficientes constantes o variables:

a) $y''' + 3yy' = 6x^2$ *b*) $y''' - 3y = e^{2x}$

c) $x^3 y''' + xy' + y = 0$ *d*) $y''' + xy' - 3y = \operatorname{sen} 2x$

(*Respuestas: a*) no lineal, no homogénea, coeficientes constantes; *b*) lineal, no homogénea, coeficientes constantes; *c*) lineal, homogénea, coeficientes variables; *d*) lineal, no homogénea, coeficientes variables.)

4-4 Determine el intervalo en el que se garantiza que los siguientes problemas de valor inicial tienen una solución única:

a) $y''' + 3y' = \cos x$, $y(\pi) = 0$ y $y'(\pi) = -2$

c) $x^3y''' + 2xy' - y = e^x$, $y(0) = 2$ y $y'(0) = 5$

(*Respuestas: a*) $-\infty < x < +\infty$; *b*) considerando que las condiciones iniciales se especifican en $x = 0$, el teorema 4-1 no garantiza nada.)

4-2 ▪ TEORÍA DE LAS ECUACIONES HOMOGÉNEAS

El principio de superposición que se explicó en el capítulo 3 respecto a las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden es aplicable a ecuaciones lineales homogéneas de cualquier orden, como se expresa en el teorema 4-2.

TEOREMA 4-2 Principio de superposición

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son n soluciones de una ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

entonces la combinación lineal

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \tag{4-7}$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias, también es una solución de esta ecuación.

Por tanto, si una función es una solución de una ecuación diferencial lineal homogénea, un múltiplo constante de dicha solución también lo es. Si dos funciones son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, su suma también es una solución de dicha ecuación diferencial.

Observe que el principio de superposición es aplicable solo a ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, y que no es aplicable a ecuaciones no lineales ni a ecuaciones no homogéneas (incluso si son lineales).

La identidad de Abel también es aplicable a ecuaciones lineales homogéneas de orden superior, y pueden generalizarse como se explica en el teorema 4-3.

TEOREMA 4-3 Identidad de Abel

Considere la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n

$$y^{(n)} - P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0,$$

cuyos coeficientes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *son continuos en un intervalo* $x_1 < x < x_2$, *y sean* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ las *n soluciones de la ecuación en este intervalo. Entonces, el wronskiano de* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *o bien es siempre cero (lo cual indica que estas n soluciones son linealmente dependientes) o nunca es cero (lo que señala que estas n soluciones son linealmente independientes).*

El wronskiano de cualesquiera n soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden n con coeficientes continuos puede determinarse dentro de un factor constante K de la *fórmula de Abel*, que se expresa como

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = Ke^{-\int P_1(x)dx} \tag{4-8}$$

El teorema 4-3 indica que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ no puede ser cero para algunas x y no cero para otros valores de x en un intervalo en el que los coeficientes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de una ecuación diferencial lineal homogénea son continuos. Por tanto, al determinar la independencia lineal de n soluciones en un intervalo específico, basta con evaluar $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en cualquier punto conveniente x_0 en ese intervalo, ya que si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ en x_0, es cero para todas las x. Del mismo modo, si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ en x_0, entonces es no cero para todas las x, y $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes en ese intervalo.

El teorema fundamental de la ecuación general lineal homogénea puede expresarse como se indica en el teorema 4-4.

TEOREMA 4-4 Solución general de ecuaciones homogéneas

La ecuación diferencial lineal homogénea de orden n

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

cuyos coeficientes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *son continuos en un intervalo* $x_1 < x < x_2$ *siempre tiene n soluciones* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *que son linealmente independientes en ese intervalo. Además, cualquier solución de esta ecuación diferencial en ese intervalo puede expresarse en forma única como una combinación lineal de estas n soluciones como*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \tag{4-9}$$

que es la **solución general** *de esta ecuación diferencial.*

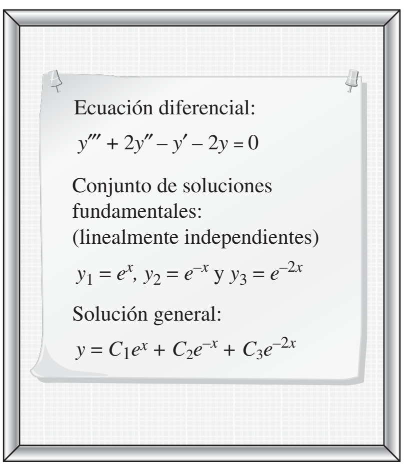


FIGURA 4-4
Una ecuación lineal homogénea de tercer orden con coeficientes continuos tiene tres soluciones linealmente independientes. Su combinación lineal da la solución general.

Por tanto, la solución $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ contiene *todas* las soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo específico. Cualquier solución de la ecuación puede obtenerse a partir de la solución general asignando valores adecuados a las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Por tanto, el conjunto de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se conoce como **conjunto fundamental** de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo (figura 4-4).

El teorema 4-4 asegura la existencia de n soluciones linealmente independientes y que *sólo n* soluciones pueden ser linealmente independientes. Entonces, resolver una ecuación lineal homogénea de orden n es equivalente a encontrar sus n soluciones linealmente independientes; así, la solución general de esta ecuación diferencial se obtiene fácilmente a partir de la ecuación 4-9.

Repaso de la sección

4-5C ¿Para qué clase de ecuación diferencial la suma de las soluciones también es una solución?

4-6C El wronskiano de las tres soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea de tercer orden con coeficientes continuos, ¿puede ser cero para algunas x y no cero para otros valores de x?

4-7 Considere las siguientes ecuaciones lineales homogéneas y su solución en $x > 0$. Identifique las soluciones cuyo wronskiano nunca sea cero para $x > 0$, por inspección. Verifique sus hallazgos calculando su wronskiano en cada caso:

a) $y''' - 3y'' + 3y' = 0$, para e^x, xe^x y x^2e^x

b) $y''' - 3y'' + 3y' = 0$, para e^x, $2e^x$ y $-3x^2e^x$

(*Respuestas: a*) $W = 2e^{3x}$, que nunca es cero para $x > 0$; *b*) las soluciones e^x, $2e^x$ y $-3x^2e^x$ son linealmente dependientes, ya que $2e^x$ es un múltiplo constante de e^x, de modo que $W = 0$.)

4-8 Considere las siguientes ecuaciones lineales homogéneas y su solución para $x > 0$. Identifique las soluciones cuyo wronskiano nunca sea cero para $x > 0$, por inspección. Verifique sus hallazgos calculando su wronskiano en cada caso:

a) $x^3y''' + 2x^2y'' - 2xy' = 0$, para $\frac{1}{x}$, x^2 y 1

b) $x^3y''' + 2x^2y'' - 2xy' = 0$, para $e^{-\ln x}$, x^2 y 5

(*Respuestas: a*) $W = -6/x^2$, que nunca es cero para $x > 0$; *b*) las soluciones son linealmente independientes, ya que $W = -30/x^2 \neq 0$.)

4-9 Considere las siguientes ecuaciones lineales homogéneas y sus soluciones para $x > 0$. Determine si las soluciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones; si lo forman, desarrolle una relación para y que contenga todas las soluciones de la ecuación diferencial:

a) $x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' - 6y = 0$, para $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ y x^3

b) $x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' - 6y = 0$, para $\frac{2}{x}$, $x^4e^{-\ln x}$ y x^3

(*Respuestas: a*) $W = -\frac{20}{x^3}$, que nunca es cero para $x > 0$, y $y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + C_3x^3$; *b*) $W = 0$, de modo que estas soluciones no forman un conjunto fundamental para $x > 0$.)

4-3 ▪ REDUCCIÓN DE ORDEN

El método de reducción de orden es aplicable a ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden. Si y_1 es una solución conocida no trivial ($y_1 \neq 0$) de una ecuación lineal homogénea de orden n, entonces la sustitución de $y = \nu y_1$ (donde ν es una función de la variable independiente x) reduce la ecuación dada a una ecuación lineal homogénea de orden $n - 1$ en ν'. Por tanto, la aplicación del método de reducción de orden reduce una ecuación de orden n en y a una ecuación de orden $(n - 1)$ en $w = \nu'$. Presentamos este resultado en el teorema 4-5.

TEOREMA 4-5 Reducción de orden

Si y_1 es una solución no trivial de la ecuación lineal homogénea de orden n

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

entonces la sustitución de $y = \nu y_1$ reduce esta ecuación a una ecuación lineal homogénea de orden $n - 1$ en ν'.

Si es posible encontrar, por inspección o por otros medios, una solución de la ecuación de orden ($n - 1$) en w, el método de reducción de orden puede aplicarse nuevamente para obtener una ecuación lineal homogénea de orden ($n - 2$). Es factible continuar así mientras podamos encontrar soluciones de la ecuación reducida sucesiva. El método también es aplicable a ecuaciones no homogéneas.

Aunque es viable, por lo menos en principio, reducir una ecuación lineal de orden n a una de primer orden por aplicación repetida del método de reducción de orden, rara vez resulta práctico hacer esto. Para ecuaciones de orden tercero o superior, la ecuación reducida al menos es de segundo orden, y usualmente no es más fácil de resolver que la ecuación original.

Las ecuaciones con coeficientes constantes pueden resolverse de una manera sistemática sin usar el método de reducción de orden. Sin embargo, las ecuaciones con coeficientes variables normalmente deben solucionarse mediante series infinitas o métodos numéricos, a menos que estén en una forma especial. Reducir en uno el orden de tales ecuaciones a menudo no resulta en alguna simplificación apreciable.

Repaso de la sección

4-10 Usando la solución dada, determine las demás soluciones linealmente independientes de la siguiente ecuación lineal homogénea por el método de reducción de orden:

$$y''' - y' = 0, \ y_1 = e^x$$

(*Respuestas:* $1, e^x, e^{-x}$.)

4-4 ▪ ECUACIONES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Considere la ecuación lineal homogénea general de orden n con coeficientes constantes:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad \textbf{(4-10)}$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes reales. (El coeficiente principal que no sea cero siempre puede convertirse en 1 dividiendo cada término entre a_0.)

Considerando que los coeficientes constantes son funciones continuas en el intervalo $-\infty < x < \infty$, las soluciones de tales ecuaciones son válidas en cualquier intervalo. Por tanto, no necesitamos especificar un intervalo para la solución. Podemos resumir los teoremas clave en este caso como:

Una ecuación lineal homogénea de grado n con coeficientes constantes siempre tiene n soluciones linealmente independientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *que son aplicables a cualquier intervalo, y su solución general se expresa como*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \qquad \textbf{(4-11)}$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *son constantes arbitrarias (figura 4-5).*

Ecuación diferencial de tercer orden:

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$$

Soluciones linealmente independientes:

$$y_1 = e^x, \ y_2 = e^{-x}, \ y_3 = e^{-2x}$$

Solución general:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$$

Válida para:

$$-\infty < x < \infty$$

FIGURA 4-5
Una ecuación lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes tiene n soluciones linealmente independientes cuya combinación lineal da la solución general para todas las x.

Nuevamente, las funciones de solución y sus derivadas deben diferir, como máximo, solo por un múltiplo constante. Por tanto, suponemos que la solución es de la forma e^{mx}, donde m es una constante. Sustituyendo esta función en la ecuación 4-10, obtenemos

$$e^{mx}(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n) = 0 \qquad \textbf{(4-12)}$$

Sin embargo, la función exponencial e^{mx} no puede ser cero. Entonces, debemos tener

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0 \qquad \textbf{(4-13)}$$

Esta ecuación polinomial de orden n se llama **polinomio característico** o *ecuación auxiliar*, ya que da los valores aceptables de m que caracterizan la solución de la ecuación diferencial dada. Una comparación del polinomio característico sugiere una forma sencilla de obtenerlo: en la ecuación diferencial, reemplazar $y^{(n)}$ por m^n, $y^{(n-1)}$ por $m^{(n-1)}$, y así sucesivamente (figura 4-6). Este procedimiento convertirá la ecuación diferencial en el polinomio característico.

Usted recordará, del álgebra, que un polinomio de grado n tiene n ceros; por tanto, el polinomio característico de una ecuación lineal homogénea de orden n tendrá n raíces: $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Correspondiendo a estas n raíces, hay n soluciones:

$$y_1 = e^{m_1 x}, y_2 = e^{m_2 x}, \ldots, y_n = e^{m_n x}$$

Si las n raíces son reales y distintas, las n soluciones son linealmente independientes y será sencillo formar la solución general. Sin embargo, algunas de las raíces pueden repetirse y otras pueden incluso ser complejas. El procedimiento de solución para cada caso es estrechamente paralelo al caso de segundo orden que se trató en el capítulo 3. Consideraremos por separado cada caso, pero primero presentaremos alguna explicación sobre la determinación de las raíces de los polinomios característicos de ecuaciones de orden superior.

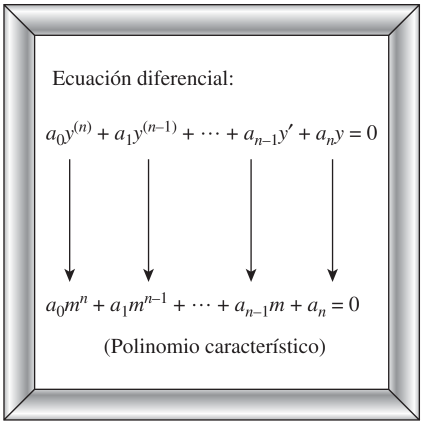


FIGURA 4-6
El polinomio característico de una ecuación de orden n puede obtenerse fácilmente reemplazando $y^{(n)}$ por m^n para $n = n$, $n - 1, \ldots, 2, 1, 0$.

Cómo encontrar las raíces de ecuaciones polinomiales

Para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes, necesitamos encontrar las raíces del polinomio característico. Una vez que las raíces estén disponibles, la solución general podrá construirse de manera sistemática siguiendo el procedimiento para el caso de coeficientes constantes, de segundo orden que se describió en la sección 3-5 del capítulo 3. La ecuación característica de una ecuación diferencial de orden n incluye un polinomio de orden n llamado **polinomio característico**.

Para $n = 2$, ambas raíces de la ecuación polinomial pueden determinarse fácilmente por la fórmula cuadrática. Hay fórmulas similares para $n = 3$ y $n = 4$, pero no son fáciles de usar. Por tanto, para $n \geq 3$, lo más práctico que podemos hacer es encontrar las raíces con calculadora o software. La mayoría de las calculadoras modernas de ingeniería pueden hacer esto; en la sección 4-9 mostraremos cómo usar los programas populares para encontrar las raíces.

Caso especial: Raíces reales enteras

Cuando todas las raíces del polinomio característico son números reales enteros, el polinomio característico será de la forma

$$(r - r_1)(r - r_2)\cdots(r - r_n) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n \tag{4-14}$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros. Además, el término constante a_n es producto de las raíces (figura 4-7). Por tanto, las raíces deben ser los factores de a_n. Esto sugiere que, cuando el polinomio característico incluye coeficientes enteros y un coeficiente principal 1, podemos tratar los factores del término constante como posibles raíces en una primera conjetura, de no tener a la mano una calculadora o una computadora.

Como ejemplo, considere la ecuación polinomial de tercer orden:

$$r^3 - 5r^2 - 8r + 12 = 0 \tag{4-15}$$

que tiene coeficientes enteros y un coeficiente principal de 1. Los factores del término constante 12 son ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 y ± 12. Por tanto, podemos probar estos factores como las primeras conjeturas para las raíces. Encontraremos que las tres raíces de esta ecuación son números enteros y que son 1, -2 y 6.

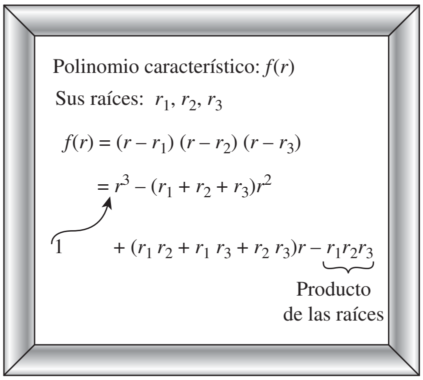


FIGURA 4-7
Cuando el coeficiente principal es 1, el término constante en el polinomio característico es el producto de sus raíces.

A veces, cuando a un polinomio le faltan algunos términos, puede reducirse a un polinomio de orden inferior. Por ejemplo, al polinomio $r^4 + 7r^2 + 10 = 0$ le faltan los términos r^3 y r. De modo que r^2 puede despejarse usando la fórmula cuadrática como sigue:

$$r^2 = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = -2, -5$$

De modo que las raíces son $\pm i\sqrt{2}$ y $\pm i\sqrt{5}$.

Cómo construir la solución general

En seguida veremos cómo construir la solución general de una ecuación lineal homogénea de orden superior con coeficientes constantes, suponiendo que las raíces de su polinomio característico ya se hayan encontrado. Nuevamente, consideramos tres casos: 1) raíces reales y distintas; 2) raíces reales y repetidas, y 3) raíces complejas.

Caso 1: Raíces reales y distintas

Si las n raíces del polinomio característico $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son reales y distintas, entonces las n soluciones de la ecuación diferencial de orden n dada son

$$e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \ldots, e^{m_n x}$$

Podemos discutir intuitivamente que ningún par de estas soluciones es múltiplo constante de la otra (ya que ningún par de raíces es idéntico) y ninguna solución puede expresarse como combinación lineal de la otra. Por tanto, estas n soluciones son linealmente independientes, y la solución general es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}, \ldots, C_n e^{m_n x} \tag{4-16}$$

Podemos verificar que estas n soluciones son, en efecto, linealmente independientes mediante la determinación de su wronskiano.

EJEMPLO 4-3 **Ecuación homogénea: Raíces reales y distintas**

Determine la solución general de la ecuación diferencial $y''' + 6y'' + 8y' - 3y = 0$.

Solución Ésta es una ecuación lineal homogénea de tercer orden con coeficientes constantes, y su polinomio característico es $m^3 + 6m^2 + 8m - 3 = 0$. El coeficiente principal del polinomio característico es 1, y todos los demás coeficientes son enteros reales. Por tanto, si no tenemos calculadora ni computadora a la mano, podemos ensayar los factores del término constante, que son ± 1 y ± 3 como soluciones posibles. Al dividir el polinomio característico entre $m + 3$ obtendremos la ecuación cuadrática $m^2 + 3m - 1 = 0$, cuyas raíces son

$$m_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} = -1.5 \pm \sqrt{3.25}$$

Las tres raíces son reales y distintas; por tanto, la solución general de la ecuación dada es

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-(1.5+\sqrt{3.25})x} + C_3 e^{-(1.5-\sqrt{3.25})x}$$

donde C_1, C_2 y C_3 son constantes arbitrarias. Observe que una ecuación lineal homogénea de tercer orden con coeficientes constantes tiene tres soluciones linealmente independientes, y su solución general es la combinación lineal de éstas.

Caso 2: Raíces repetidas

Cuando una o más raíces del polinomio característico se repite dos o más veces, la ecuación 4-16 no puede ser la solución general, ya que ahora incluirá menos de n soluciones linealmente independientes. En el capítulo 3 vimos que si m_1 es una raíz repetida del polinomio característico de una ecuación diferencial de segundo orden, entonces xe^{m_1x} es una solución de la ecuación diferencial además de e^{m_1x}. Mediante el método de reducción de orden podemos comprobar que si m_1 es una raíz repetida triple, entonces $x^2e^{m_1x}$ también será una solución. Generalizamos esto como:

Si m_1 es una raíz repetida k veces del polinomio característico, entonces

$$e^{m_1x}, xe^{m_1x}, x^2e^{m_1x}, \dots, x^{k-1}e^{m_1x} \tag{4-17}$$

son las k soluciones linealmente independientes correspondientes a esta raíz (figura 4-8).

Por ejemplo, la solución general de una ecuación lineal homogénea de sexto orden con coeficientes constantes cuyo polinomio característico tiene una triple raíz m_1, una doble raíz m_2 y una raíz distinta m_3 es

$$\begin{aligned} y &= (C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_1x} + C_3x^2e^{m_1x}) + (C_4e^{m_2x} + C_5xe^{m_2x}) + C_6e^{m_3x} \\ &= (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{m_1x} + (C_4 + C_5x)e^{m_2x} + C_6e^{m_3x} \end{aligned} \tag{4-18}$$

Observe que la parte de la solución general correspondiente a una raíz m repetida k veces se obtiene multiplicando e^{mx} por un polinomio de grado $(k - 1)$ con coeficientes constantes arbitrarios.

RAÍCES REPETIDAS

Si

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_k$$

Entonces

$$y_1 = e^{m_1x}$$
$$y_2 = xe^{m_1x}$$
$$y_3 = x^2e^{m_1x}$$
$$\vdots$$
$$y_k = x^{k-1}e^{m_1x}$$

y

$$y = (C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1})e^{m_1x}$$

FIGURA 4-8
k soluciones linealmente independientes correspondientes a una raíz real repetida k veces del polinomio característico.

EJEMPLO 4-4 Ecuación homogénea: Raíces reales repetidas

Determine la solución general de la ecuación diferencial $y^{(iv)} + 8y''' + 18y'' + 16y' + 5y = 0$.

Solución Ésta es una ecuación lineal homogénea de cuarto orden con coeficientes constantes, y su polinomio característico es $m^4 + 8m^3 + 18m^2 + 16m + 5 = 0$. Como ésta es una ecuación polinomial de cuarto grado, tiene cuatro raíces, las cuales se determinan como -1, -1, -1 y 5. Observe que -1 es una raíz triple (repetida tres veces), mientras que 5 es una raíz simple. Todas las raíces son reales. Por tanto, la solución general de la ecuación dada es $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{-x} + C_4e^{5x}$, donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes arbitrarias. Observe que una ecuación lineal homogénea de cuarto orden con coeficientes constantes tiene cuatro soluciones linealmente independientes, y su solución general es la combinación lineal de éstas.

Caso 3: Raíces complejas

Usted recordará, del álgebra, que si una ecuación polinomial tiene coeficientes reales, cualquier raíz compleja que pueda tener debe aparecer en conjugados; es decir, si $\alpha + i\beta$ es una raíz, también lo es $\alpha - i\beta$. Con respecto a las ecuaciones de segundo orden, en el capítulo anterior vimos que la solución general correspondiente a un par de raíces conjugadas del polinomio característico es

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x) \tag{4-19}$$

Entonces, las dos soluciones linealmente independientes correspondientes a un par de raíces complejas conjugadas son

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{y} \quad e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

RAÍCES COMPLEJAS REPETIDAS

Si

$m_{1,2} = m_{3,4} = \alpha \pm i\beta$

entonces

$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$

$y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$

$y_3 = xe^{\alpha x} \cos \beta x$

$y_4 = xe^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$

y

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x) + xe^{\alpha x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \operatorname{sen} \beta x)$$

FIGURA 4-9
Cuatro soluciones linealmente independientes correspondientes a un par de raíces complejas conjugadas repetido dos veces del polinomio característico.

Éste es el caso, sin que importe cuál sea el orden de la ecuación diferencial. Las soluciones linealmente independientes correspondientes a otros pares de raíces complejas conjugadas se determinan de la misma manera.

Si una raíz compleja $\alpha + \beta i$ se repite k veces, su conjugado $\alpha - \beta i$ también se repite k veces, suponiendo que los coeficientes del polinomio característico sean reales. El procedimiento para raíces repetidas que se explicó antes también se aplica a las raíces complejas. Entonces, la parte de la solución general correspondiente a un par de complejos conjugados $\alpha \pm \beta i$ repetido k veces es

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x) + xe^{\alpha x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \operatorname{sen} \beta x) + \cdots + x^{k-1}e^{\alpha x}(C_{2k-1} \cos \beta x + C_{2k} \operatorname{sen} \beta x) \quad \textbf{(4-20)}$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_{2k}$ son constantes arbitrarias (figura 4-9).

EJEMPLO 4-5 **Ecuación homogénea: Raíces complejas repetidas**

Determine la solución general de la ecuación diferencial $y^{(iv)} + 18y'' + 81y = 0$.

Solución Ésta es una ecuación lineal homogénea de cuarto orden con coeficientes constantes, y su polinomio característico es $m^4 + 18m^2 + 81 = (m^2 + 9)^2 = 0$, cuyas cuatro raíces son $-3i$, $-3i$, $3i$ y $3i$. Observamos que el par de complejos conjugados $\pm 3i$ es una raíz doble del polinomio característico. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial dada es $y = (C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x) + x(C_3 \cos 3x + C_4 \operatorname{sen} 3x)$, donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes arbitrarias. Observe que la ecuación lineal homogénea de cuarto orden con coeficientes constantes tiene cuatro soluciones linealmente independientes, y su solución general es la combinación lineal de éstas.

A menudo, las leyes de la física dan por resultado un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas múltiples de primero o segundo orden. Para obtener una solución en tales casos, a veces es más fácil reducir todo el conjunto de ecuaciones a una sola, de orden superior. El ejemplo 4-6 ilustra este método.

EJEMPLO 4-6 **Modelo de altavoz**

Un altavoz utiliza un imán, una bobina y un cono para convertir energía eléctrica en energía mecánica (ondas sonoras) haciendo que la bobina mueva el cono. La operación del altavoz se ilustra en la figura 4-10. Un amplificador de estéreo o de radio produce una corriente en una bobina que está fijada a un diafragma en el cono; esto hace que la bobina y el diafragma se muevan con relación al imán permanente. El movimiento del diafragma produce ondas de presión de aire, que constituyen el sonido.

a) Desarrolle un modelo del sistema de altavoz.
b) Obtenga las raíces características y la forma de la solución homogénea para los siguientes valores de parámetros:

$$m = 0.002 \text{ kg} \qquad k = 4 \times 10^5 \text{ N/m}$$
$$K_f = 16 \text{ N/A} \qquad K_b = 13 \text{ V}\cdot\text{s/m}$$
$$R = 12\ \Omega \qquad L = 10^{-3} \text{ H}$$

Solución *a*) La figura 4-11 muestra un modelo simplificado del subsistema mecánico; m representa la masa combinada del diafragma y la bobina. La constante de resorte depende de las propiedades del material del diafragma; f es la fuerza magnética que está relacionada con la corriente i de la bobina por

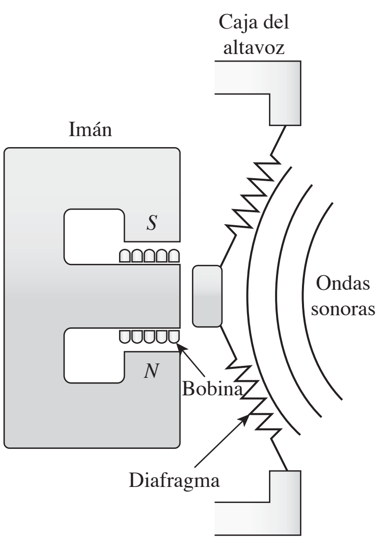


FIGURA 4-10
Diagrama de un altavoz.

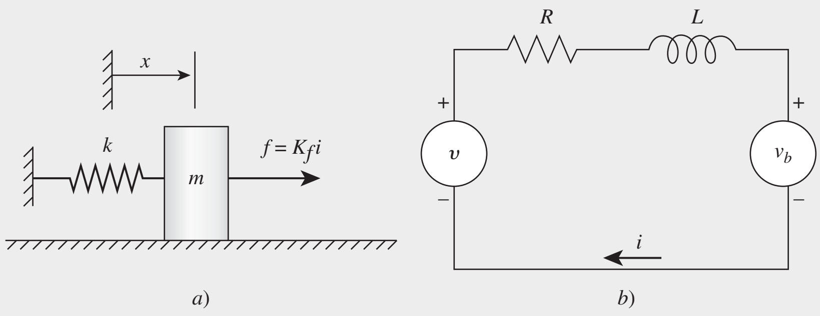


FIGURA 4-11 Modelos de los subsistemas mecánico y eléctrico de un altavoz.

$f = nBLi = K_f i$, donde n es el número de espirales de la bobina y B es la fuerza del campo magnético. Aquí $K_f = nBL = 16$ N/A. Por la ley de Newton,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + K_f i \tag{4-21}$$

En la figura 4-11*b* se muestra el subsistema eléctrico. La inductancia y la resistencia de la bobina son L y R. La bobina experimenta un contravoltaje de FEM ν_b, porque es un conductor de corriente que se mueve en un campo magnético. Este contravoltaje de FEM está dado por $\nu_b = K_b dx/dt$. El voltaje ν es la señal del amplificador. Por la ley de voltaje de Kirchhoff, tenemos

$$\nu = L\frac{di}{dt} + Ri + K_b\frac{dx}{dt} \tag{4-22}$$

El modelo de altavoz consiste en las ecuaciones 4-21 y 4-22.

b) Estas ecuaciones no están en la forma que nos permite calcular sus raíces características. Para hacer esto, debemos reducir las ecuaciones a una sola. Despeje *i* de la ecuación 4-21 para obtener

$$i = \frac{1}{K_f}\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + kx\right) \tag{4-23}$$

Luego diferencie la ecuación 4-23, como

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{K_f}\left(m\frac{d^3x}{dt^3} + k\frac{dx}{dt}\right) \tag{4-24}$$

Sustituya estas expresiones en la ecuación 4-22:

$$\nu = L\left[\frac{1}{K_f}\left(m\frac{d^3x}{dt^3} + k\frac{dx}{dt}\right)\right] + R\left[\frac{1}{K_f}\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + kx\right)\right] + K_b\frac{dx}{dt} \tag{4-25}$$

Agrupe los términos para obtener

$$mL\frac{d^3x}{dt^3} + mR\frac{d^2x}{dt^2} + (kL + K_bK_f)\frac{dx}{dt} + kRx = K_f\nu \tag{4-26}$$

De este modo obtenemos una ecuación de tercer orden. El polinomio característico es

$$mL\beta^3 + mR\beta^2 + (kL + K_bK_f)\beta + kR = 0$$

El modelo tiene tres raíces, y no es posible obtener una expresión simple de forma cerrada para estas raíces. De modo que debemos usar los valores de parámetros dados en el problema. La ecuación se convierte en

$$2\beta^3 + 0.024\beta^2 + 608\beta + 4.8 \times 10^6 = 0$$

Las raíces son $\beta = -8\,715$ y $\beta = -1\,643 \pm 16\,513i$. Estas raíces dan la solución homogénea de la forma

$$x(t) = C_1e^{-8715t} + C_2e^{-1643t}\,\text{sen}\,16\,513t + C_3e^{-1643t}\cos 16\,513t$$

El término C_1e^{-8715t} desaparecerá primero (después de aproximadamente $t = 4(1/8\,715) = 4.6 \times 10^{-4}$ s). La solución oscilará con frecuencia de 16 513 rad/s antes de desaparecer después de aproximadamente $t = 4(1/1\,643) = 0.024$ s.

EJEMPLO 4-7 Efectos del movimiento del suelo en un edificio de dos pisos

La figura 4-12 representa un edificio de dos pisos. Las masas de los pisos son m_1 y m_2. Cada piso se apoya en seis columnas. Cuando el suelo se mueve horizontalmente debido a un temblor, los pisos también se mueven así, y las columnas actúan como resortes y se oponen a este movimiento. Las rigideces horizontales totales de cada conjunto de seis columnas son k_1 y k_2. El movimiento horizontal del suelo es y.

a) Desarrolle un modelo de la respuesta del edificio al movimiento y.
b) Para el caso en que las masas son idénticas ($m_1 = m_2 = m$) y las rigideces son idénticas ($k_1 = k_2 = k$), obtenga un solo modelo de ecuación del edificio y encuentre su solución homogénea.

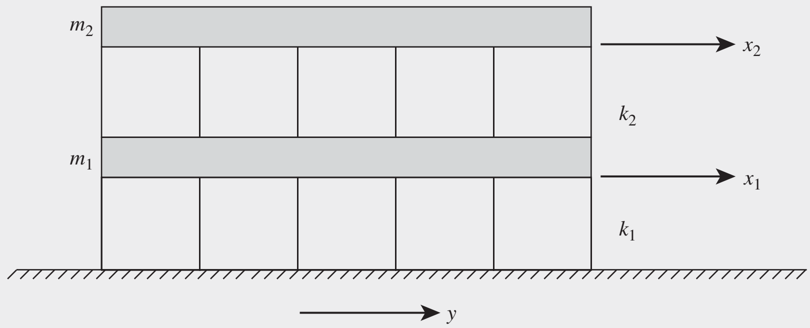


FIGURA 4-12
Edificio de dos pisos. Las masas de los pisos son m_1 y m_2; el movimiento horizontal del suelo es y; las rigideces horizontales totales de cada conjunto de seis columnas son k_1 y k_2.

Solución *a*) El movimiento de los pisos se visualiza con mayor facilidad mediante la representación que se muestra en la figura 4-13, como dos bloques que se deslizan sobre una superficie sin fricción impulsados por el movimiento $y(t)$. En la figura 4-14 se muestran los diagramas de cuerpo libre para el caso en que $y > x_1 > x_2$. A partir de estos diagramas y de las leyes de Newton, obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_2(x_1 - x_2) + k_1(y - x_1)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2)$$

b) Para masas y rigideces idénticas, esto se convierte en

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = ky$$
$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0$$

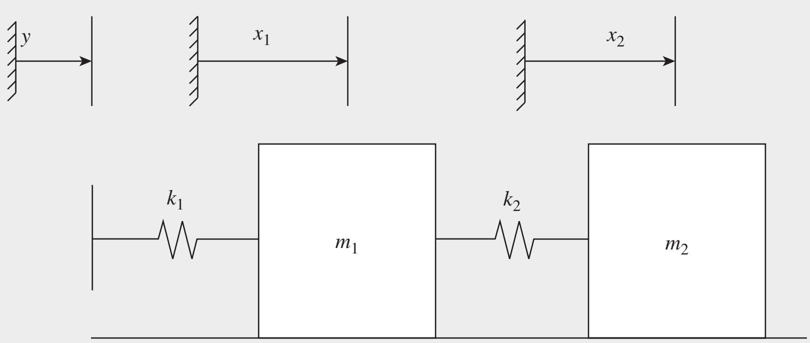


FIGURA 4-13
Modelo de un edificio de dos pisos para analizar los efectos del movimiento del suelo y la rigidez de las columnas.

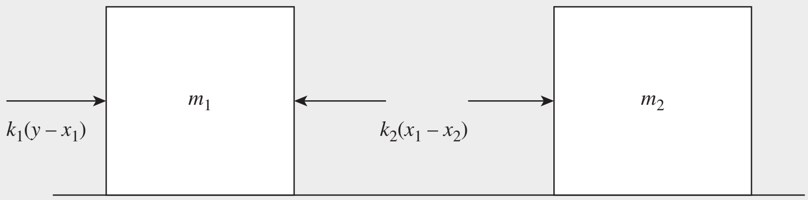


FIGURA 4-14
Diagramas de cuerpo libre de ambos pisos.

Divida cada ecuación entre m y sea $\alpha = k/m$. El resultado es

$$\ddot{x}_1 + 2\alpha x_1 - \alpha x_2 = \alpha y \qquad \textbf{(4-27)}$$

$$\ddot{x}_2 - \alpha x_1 + \alpha x_2 = 0 \qquad \textbf{(4-28)}$$

Para tener una sola ecuación en términos de x_1, diferencie la ecuación 4-27 dos veces para obtener

$$\frac{d^4x_1}{dt^4} + 2\alpha\frac{d^2x_1}{dt^2} - \alpha\frac{d^2x_2}{dt^2} = \alpha\frac{d^2y}{dt^2}$$

Sustituya $\ddot{x}_2$ de la ecuación 4-28 y x_2 de la ecuación 4-27 para obtener

$$\frac{d^4x_1}{dt^4} + 3\alpha\frac{d^2x_1}{dt^2} + \alpha^2x_1 = \alpha^2y + \alpha\frac{d^2y}{dt^2} \qquad \textbf{(4-29)}$$

Ésta es la ecuación deseada; su polinomio característico es $\beta^4 + 3\alpha\beta^2 + \alpha^2 = 0$. Como no hay ningún término β^3 ni β, esta ecuación es cuadrática en β^2, y podemos usar la fórmula cuadrática para obtener

$$\beta^2 = \frac{-3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2 - 4\alpha^2}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\alpha = -0.3820\alpha, -2.618\alpha$$

Entonces, las raíces características son

$$\beta = \pm i0.618\sqrt{\frac{k}{m}},\ \pm i1.618\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como estas raíces son imaginarias, la solución homogénea tiene la forma

$$x_1(t) = C_1 \operatorname{sen} 0.618\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \cos 0.618\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_3 \operatorname{sen} 1.618\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4 \cos 1.618\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

La solución contiene oscilaciones con frecuencias en radianes de $0.618\sqrt{k/m}$ y $1.618\sqrt{k/m}$. Observe que debemos especificar cuatro condiciones iniciales para evaluar la solución.

Repaso de la sección

4-11C Considere una ecuación lineal homogénea de tercer orden con coeficientes constantes. Si las funciones y_1, y_2 y y_3 satisfacen todas esta ecuación, ¿podemos decir que cualquiera de estas funciones debe ser una combinación lineal de las otras dos?

4-12C ¿Piensa usted que exista una ecuación lineal homogénea de tercer orden con coeficientes constantes a la que satisfagan las funciones e^{2x}, e^{-2x}, e^{-3x} y e^{3x}?

4-13 Determine la solución general de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes:

a) $y^{(iv)} - y = 0$ *b)* $y''' + 3y'' + 4y' + 12y = 0$

(*Respuestas: a)* $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + C_3e^{-x} + C_4e^{x}$; *b)* $y = C_1e^{-3x} + C_2 \operatorname{sen} 2x + C_3 \cos 2x$.)

4-14 Determine la solución específica del siguiente problema de valor inicial:

$$y^{(iv)} - 81y = 0,\ y(\pi) = y'(\pi) = y''(\pi) = 0 \ \text{ y } \ y'''(\pi) = 1$$

(*Respuesta:* $y(x) = \frac{1}{54}\{\operatorname{senh}[3(x - \pi)] + \operatorname{sen} 3x\}$.)

4-5 ▪ TEORÍA DE LAS ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS

La ecuación general lineal no homogénea de orden n puede expresarse como

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = R(x)$$

donde se supone que las funciones $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ y $R(x)$ son continuas en el intervalo que interesa. Su ecuación homogénea relacionada se obtiene haciendo $R(x) = 0$,

$$y^n + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

La solución de una ecuación no homogénea está estrechamente vinculada con la solución de su ecuación homogénea asociada. El primer paso para resolver una ecuación no homogénea es obtener la solución de su ecuación homogénea asociada y expresarla como

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ constituyen un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación fundamental. La función y_h representa la solución general de la ecuación homogénea asociada y se conoce como **solución homogénea** o **solución complementaria**. En contraste, una función que no tenga ninguna constante arbitraria y satisfaga toda la ecuación no homogénea se conoce como **solución particular**. El siguiente paso es modificar la solución homogénea de tal manera que satisfaga la ecuación no homogénea dada; esto se hace de acuerdo con el teorema 4-6.

Ecuación no homogénea:

$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = R(x)$

Solución particular: y_p

Ecuación homogénea asociada:

$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0$

Solución homogénea:

$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_n y_n$

Solución general:

$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_n y_n + y_p$

FIGURA 4-15
La solución general de ecuaciones lineales no homogéneas se obtiene sumando la solución homogénea y_h y una solución particular y_p, que es una función que satisface la ecuación no homogénea.

TEOREMA 4-6 Solución general de ecuaciones lineales no homogéneas

Si y_p es una solución particular de la ecuación lineal no homogénea

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_ny = R(x)$$

donde las funciones $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ y $R(x)$ son continuas en un intervalo $x_1 < x < x_2$ y y_h es la solución general de su ecuación homogénea asociada, entonces la solución general de esta ecuación no homogénea en ese intervalo es

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y_p \end{aligned} \qquad \textbf{(4-30)}$$

donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ constituyen un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada y $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.

Por tanto, una vez que está disponible la solución general de la ecuación homogénea asociada, todo lo que necesitamos hacer es determinar una solución particular y_p que satisfaga la ecuación no homogénea dada para construir su solución general (figura 4-15).

El término no homogéneo $R(x)$ a menudo incluye varios términos y, en tales casos, es mucho más fácil encontrar una solución particular correspondiente a cada término no homogéneo y luego sumarlas. En otras palabras, aplicar el principio de superposición. Expresamos esto en el siguiente teorema (figura 4-16).

Si

$y''' - 4y = 8 \rightarrow y_{p1} = -2$

y

$y''' - 4y = -2x \rightarrow y_{p2} = x/2$

Entonces

$y''' - 4y = 8 - 2x \rightarrow y_p = -2 + x/2$

FIGURA 4-16
Ejemplo del principio de superposición para soluciones particulares.

TEOREMA 4-7 Principio de superposición para soluciones particulares

Si y_{p1} es una solución particular de

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = R_1(x) \tag{4-31}$$

y y_{p2} es una solución particular de

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = R_2(x) \tag{4-32}$$

entonces $y_{p1} + y_{p2}$ es una solución particular de

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = R_1(x) + R_2(x) \tag{4-33}$$

En seguida explicamos los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros para determinar la solución particular de manera sistemática.

4-6 ▪ ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS: EL MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

El método de coeficientes indeterminados descrito en el capítulo 3 para ecuaciones lineales de segundo orden también es aplicable a ecuaciones de orden superior sin ninguna modificación. Al decidir la forma general de una solución particular correspondiente a un término no homogéneo, no importa si la ecuación es de segundo o de cualquier orden. De modo que podemos usar la tabla 3-2 para encontrar la forma adecuada de solución particular, sin que importe el orden de la ecuación diferencial (figura 4-17).

Por supuesto, todas las limitaciones de este método todavía aplican; por ejemplo, el método es fácil y claro, pero se limita a ecuaciones lineales con coeficientes constantes cuyos términos no homogéneos incluyan alguna de las siguientes opciones:

1. Una constante, k.
2. Una función exponencial, e^{kx}.
3. Un polinomio, $P_n(x)$.
4. Las funciones sen βx o cos βx.
5. Un número finito de sus productos.

Asimismo, si cualquier término en la forma supuesta de la solución particular y_p es una solución de la ecuación homogénea asociada, entonces la forma indicada de y_p debe multiplicarse por la potencia entera más baja de la variable independiente x hasta que cada término en y_p difiera de cada término en la solución homogénea. Si la ecuación diferencial incluye coeficientes variables o términos no homogéneos que no son adecuados para el método de coeficientes indeterminados, entonces debe usarse el método de variación de parámetros que se explica en la siguiente sección.

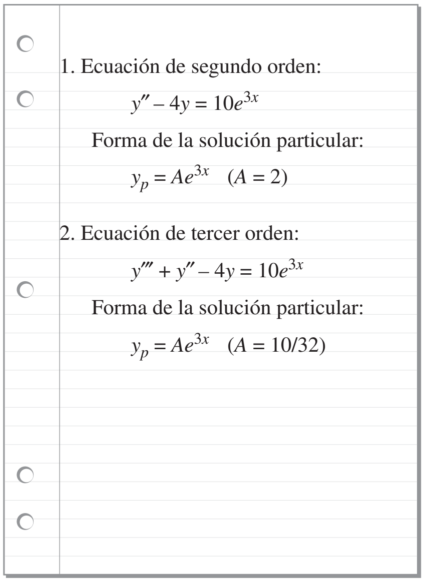


FIGURA 4-17
La forma general de la solución particular no depende del orden de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 4-8 Soluciones particulares: e^{kx}

Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial: $y''' + y'' - 4y = 10e^{3x}$.

Solución Este ejemplo es similar al ejemplo 3-24, salvo que en este caso la ecuación diferencial es de tercer orden en vez de ser de segundo orden. Nuevamente, suponemos que la solución particular correspondiente al término exponencial no homogéneo $10e^{3x}$ es de la forma $y_p = Ae^{3x}$, donde A es un coeficiente constante que está por determinarse. Tomando las derivadas segunda y tercera de y_p y sustituyéndolas en la ecuación diferencial da

$$27Ae^{3x} + 9Ae^{3x} - 4Ae^{3x} = 10e^{3x}$$

o $32Ae^{3x} = 10e^{3x}$. El único valor de A que satisfará la última expresión es $A = 10/32$. Por tanto, una solución particular de la ecuación diferencial dada es $y_p = (10/32)e^{3x}$. Observe que el orden de la ecuación diferencial no fue una consideración al seleccionar la forma general de la solución particular.

EJEMPLO 4-9 Solución general de una ecuación no homogénea

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial:

$$y^{(iv)} = x + 2$$

Solución Éste es similar al ejemplo 3-27. Nuevamente, primero encontramos la solución general de la parte homogénea de la ecuación $y^{(iv)} = 0$. Su polinomio característico es $m^4 = 0$, cuyas raíces son $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0$. Por tanto, $m = 0$ es una raíz repetida cuatro veces; así, la solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_h = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$, ya que $e^0 = 1$. También podríamos obtener este resultado por integración directa. Para la solución particular normalmente ensayaríamos $y_p = Ax + B$; sin embargo, cualquier constante o una función lineal de x es una solución de la ecuación homogénea; por tanto, necesitamos modificar la solución particular multiplicándola por la potencia entera más baja de la variable independiente x hasta que cada término en y_p difiera de cada término en la solución homogénea. La solución particular cumplirá este requisito si no incluye ninguna potencia de x menor de x^4. Así, debemos multiplicar la forma supuesta de la solución particular por x^4 para evitar cualquier traslape con la solución homogénea. Entonces, la forma adecuada de la solución particular en este caso es $y_p = x^4(Ax + B)$, cuya cuarta derivada es $y_p^{(iv)} = 120Ax + 24B$. Sustituyendo esto en la ecuación diferencial obtenemos $120Ax + 24B = x + 2$.

Igualando entre sí los coeficientes de cada potencia de x en ambos lados obtenemos $A = 1/120$ y $B = 1/12$. Por tanto, la solución particular es

$$y_p = \frac{x^4}{120}(x + 10)$$

Entonces, la solución general resulta

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \frac{x^4}{120}(x + 10) \end{aligned}$$

Observe que no hay términos comunes en las soluciones homogénea y particular.

Repaso de sección

4-15C ¿Necesitamos modificar el método de coeficientes indeterminados cuando se trata de ecuaciones lineales de orden tercero o superior?

4-16 Usando el método de coeficientes indeterminados, determine la solución general de las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas:

a) $y''' - y = 4e^{3x}$ *b*) $y''' - y = -3x^2e^{3x}$

(*Respuestas: a*) $y(x) = C_1e^x + e^{-x/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{2}{13}e^{3x}$;

b) $y(x) = C_1e^x + e^{-x/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \left(-\frac{3}{26}x^2 + \frac{81}{338}x - \frac{1\,485}{8\,788}\right)e^{3x}$.)

4-7 ▪ ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS: EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

El método de coeficientes indeterminados es bastante sencillo y claro, pero le falta generalidad porque tiene dos limitaciones severas: la ecuación diferencial debe tener coeficientes constantes y los términos no homogéneos necesitan ser de la forma

$$e^{\alpha x}P_n(x)\operatorname{sen}\beta x \quad \text{o} \quad e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x$$

donde α y β son constantes reales y $P_n(x)$ es un polinomio de grado n. El método de variación de parámetros, que se explicó en el capítulo 3 en relación con las ecuaciones lineales de segundo orden, también es aplicable a ecuaciones de orden superior con coeficientes constantes o variables y a términos no homogéneos que pueden ser de cualquier forma. Sin embargo, necesita que la solución general de la ecuación homogénea asociada esté disponible. Asimismo, su complejidad aumenta considerablemente al incrementarse el orden de la ecuación diferencial, lo cual hace que sea impráctico para ecuaciones de órdenes más altos. Ahora mostramos el planteamiento general correspondiente al método de variación de parámetros, que es una extensión del desarrollo para el caso de segundo orden descrito en el capítulo anterior.

Considere la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n en la forma estándar (el coeficiente principal es 1),

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = R(x) \qquad \textbf{(4-34)}$$

donde las funciones $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ y $R(x)$ son continuas en el intervalo que interesa. Sabemos que la ecuación homogénea asociada de la ecuación 4-34 tiene n soluciones linealmente independientes, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en este intervalo, y que la solución general de la ecuación homogénea asociada puede expresarse como

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n \qquad \textbf{(4-35)}$$

Conociendo la solución homogénea, suponemos que la solución particular es de la forma (figura 4-18)

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_ny_n \qquad \textbf{(4-36)}$$

que se obtiene reemplazando los parámetros constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ en la solución homogénea por las funciones variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, que dependen de x. Estas n funciones deben ser tales que la ecuación 4-36 satisfaga la ecuación no homogénea dada.

Para determinar las n funciones incógnitas, necesitamos n ecuaciones. Una ecuación se obtiene haciendo que y_p satisfaga la ecuación diferencial 4-34. Las otras ecuaciones se obtienen haciendo que dichas n funciones cumplan condiciones que impongamos con libertad. En su momento las decidiremos, de modo que obtengamos una gran simplificación de la determinación de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. La idea básica detrás de esas decisiones es, a final de cuentas, suprimir los términos que generan las derivadas de orden segundo o superior de $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Diferenciando la ecuación 4-36 obtenemos

$$y_p' = (u_1y_1' + u_2y_2' + \cdots + u_ny_n') + (u_1'y_1 + u_2'y_2 + \cdots + u_n'y_n) \qquad \textbf{(4-37)}$$

Para evitar segundas derivadas en los pasos posteriores, necesitamos que los términos en los primeros paréntesis (los que incluyen las primeras derivadas de $u_1, u_2, \ldots, u_n$) desaparezcan, dando

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 + \cdots + u_n'y_n = 0 \qquad \textbf{(4-38)}$$

Continuamos la derivación de esta manera y obtenemos $y_p'', y_p''', \ldots, y_p^{(n-1)}$, requiriendo de manera continua que desaparezcan los términos que incluyen $u_1', u_2', \ldots, u_n'$.

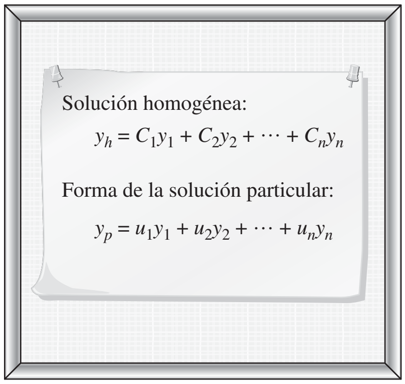


FIGURA 4-18
El método de variación de parámetros se basa en reemplazar los parámetros constantes en la solución homogénea por los parámetros variables.

Estas condiciones que imponemos a las derivadas de y_p nos dan $n - 1$ ecuaciones:

$$u'_1 y_1^{(m)} + u'_2 y_2^{(m)} + \cdots + u'_n y_n^{(m)} = 0, m = 0, 1, 2, \ldots, n-2 \tag{4-39}$$

La n-ésima condición (y, por tanto, la n-ésima ecuación) se produce por requerir que y_p satisfaga la ecuación diferencial dada. Dado que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada, y usando las condiciones que acabamos de desarrollar, este requisito da

$$u'_1 y_1^{(n-1)} + u'_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + u'_n y_n^{(n-1)} = R(x) \tag{4-40}$$

Las ecuaciones 4-39 y 4-40 nos dan n ecuaciones algebraicas lineales simultáneas para la determinación de las n incógnitas $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$. Expresando u'_i como w_i para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ por simplicidad, este sistema de n ecuaciones con n incógnitas puede expresarse como

$$\begin{aligned} y_1 w_1 + y_2 w_2 + \cdots + y_n w_n &= 0 \\ y'_1 w_1 + y'_2 w_2 + \cdots + y'_n w_n &= 0 \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)} w_1 + y_2^{(n-1)} w_2 + \cdots + y_n^{(n-1)} w_n &= R(x) \end{aligned} \tag{4-41}$$

Usted recordará, del álgebra, que se garantiza que un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tiene solución si el determinante de los coeficientes (el de la matriz de coeficientes) no es cero en ningún punto del intervalo que interesa. Esta condición se satisface automáticamente en nuestro caso, ya que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada, y el determinante de los coeficientes es simplemente el wronskiano $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, que nunca es cero, y se expresa como

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & . & . & . & y_n \\ y'_1 & y'_2 & . & . & . & y'_n \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & . & . & . & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{4-42}$$

Entonces, las n funciones incógnitas $w_1, w_2, \ldots, w_n$ pueden determinarse sistemáticamente usando la regla de Cramer como

$$w_k = \frac{R(x)\,W_k(x)}{W(y_1, y_2, \ldots, y_n)}, \; k = 1, 2, \ldots, n \tag{4-43}$$

donde $W_k(x)$ es el determinante que se obtiene al suprimir la columna k y la última fila de $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y multiplicándolo por $(-1)^{n-k}$. Por tanto, si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es un determinante de 4×4, entonces $W_1(x)$, $W_2(x)$ y $W_3(x)$ son determinantes de 3×3. También, por simplicidad, el wronskiano $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ puede determinarse por la fórmula de Abel como

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = Ke^{-\int P_1(x)dx} \tag{4-44}$$

donde $P_1(x)$ es la función de coeficiente de $y^{(n-1)}$ de la ecuación diferencial en la forma estándar. La constante K puede obtenerse de la ecuación 4-44 evaluando este determinante en un punto conveniente (por ejemplo $x = 0$) en el intervalo de interés.

Una vez que estén disponibles $w_1, w_2, \ldots, w_n$, las funciones $u_1, u_2, \ldots, u_n$ se determinan mediante integración como

$$u_k(x) = \int w_k(x)\,dx = \int \frac{R(x)\,W_k(x)}{W(y_1, y_2, \ldots, y_n)}dx, \; k = 1, 2, \ldots, n \tag{4-45}$$

Las constantes de integración no son significativas y pueden considerarse como cero sin pérdida de generalidad. Finalmente, la solución particular se obtiene sustituyendo estas funciones en la ecuación 4-36. Observe que alguna de las integrales de k en la ecuación 4-45, o todas ellas, pueden ser imposibles de realizar analíticamente. En tales casos, quizá debamos recurrir a la integración numérica.

En el teorema 4-8 resumimos el método de variación de parámetros.

TEOREMA 4-8 Variación de parámetros

Si las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada de

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = R(x) \quad \textbf{(4-46)}$$

donde las funciones $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y R son continuas en el intervalo que interesa, entonces una solución particular de esta ecuación diferencial no homogénea está dada por

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_ny_n \quad \textbf{(4-47)}$$

donde

$$u_k = \int \frac{R(x)W_k(x)}{W(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\,dx,\ \ k = 1, 2, \ldots, n \quad \textbf{(4-48)}$$

Aquí, $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es el wronskiano del conjunto fundamental de soluciones, y $W_k(x)$ es el determinante el cual se obtuvo al eliminar la columna k y la última fila de $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y multiplicándolo por $(-1)^{n-k}$.

Una vez que está disponible una solución particular, la solución general de la ecuación no homogénea puede determinarse por

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n + y_p \quad \textbf{(4-49)}$$

Observe que la función $R(x)$ en las relaciones previas representa el término no homogéneo de la ecuación diferencial en la forma estándar. También observe que el método de coeficientes indeterminados es mucho más fácil de usar y, por tanto, debe preferirse siempre que sea aplicable.

EJEMPLO 4-10 **Variación de parámetros**

Determine la solución general de la ecuación $y''' + 2y'' = e^x$ usando *a*) el método de coeficientes indeterminados y *b*) el método de variación de parámetros para la solución particular.

Solución El coeficiente principal de la ecuación diferencial es 1; entonces, su término no homogéneo es $R(x) = e^x$. Primero encontraremos su solución homogénea. El polinomio característico de la ecuación homogénea asociada es $m^3 + 2m^2 = 0$ o $m^2(m + 2) = 0$. Las raíces de esta ecuación son 0, 0 y -2. Dado que $m = 0$ es una raíz doble, tenemos $y_1 = e^0 = 1$, $y_2 = xe^0 = x$ y $y_3 = e^{-2x}$. Entonces, la solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_h = C_1 + C_2x + C_3e^{-2x}$.

a) La forma adecuada de la solución particular correspondiente al término no homogéneo $R(x) = e^x$ es $y_p = Ae^x$. Observe que la forma supuesta de esta solución particular no duplica ninguna función en la solución homogénea. Sustituyendo en la ecuación diferencial dada y despejando los coeficientes indeterminados obtenemos $A = 1/3$. Por tanto, la solución particular es $y_p = e^x/3$. La solución general de la ecuación diferencial dada es la suma de las soluciones homogénea y particular: $y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-2x} + e^x/3$.

b) Antes de aplicar el método de variación de parámetros, determinamos el wronskiano $W(y_1, y_2, y_3)$ y las funciones W_1, W_2 y W_3 como

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & x & e^{-2x} \\ 0 & 1 & -2e^{-2x} \\ 0 & 0 & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = 4e^{-2x}$$

$$W_1(x) = (-1)^{3-1}\begin{vmatrix} x & e^{-2x} \\ 1 & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2xe^{-2x} - e^{-2x}$$

$$W_2(x) = (-1)^{3-2}\begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} \\ 0 & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = 2e^{-2x}$$

$$W_3(x) = (-1)^{3-3}\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Las funciones u_1, u_2 y u_3 se determinan sustituyendo estas cantidades en la ecuación 4-45:

$$u_1 = \int \frac{R(x)W_1(x)}{W(y_1, y_2, y_3)}dx = \int \frac{e^x(-2xe^{-2x} - e^{-2x})}{4e^{-2x}}dx = -\frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{4}e^x$$

$$u_2 = \int \frac{R(x)W_2(x)}{W(y_1, y_2, y_3)}dx = \int \frac{e^x(2e^{-2x})}{4e^{-2x}}dx = \frac{1}{2}e^x$$

$$u_3 = \int \frac{R(x)W_3(x)}{W(y_1, y_2, y_3)}dx = \int \frac{e^x(1)}{4e^{-2x}}dx = \frac{1}{12}e^{3x}$$

Entonces, la solución particular (por la ecuación 4-38) es

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 \\ &= \left(-\frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{4}e^x\right) + \frac{1}{2}e^x x + \frac{1}{12}e^{3x}e^{-2x} \\ &= \frac{1}{3}e^x \end{aligned}$$

que es el mismo resultado obtenido con el método de coeficientes indeterminados (pero con mucho mayor esfuerzo). La solución general también es la misma que la obtenida en la parte *a*).

Repaso de la sección

4-17 ¿Necesitamos modificar el método de variación de parámetros para manejar ecuaciones de grado tercero y superior? Si es así, ¿cómo lo hacemos?

4-18 Usando el método de variación de parámetros, determine la solución particular de las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas. Verifique sus resultados en la parte *a*) usando el método de coeficientes indeterminados. Usted tal vez tenga que dejar sin evaluar las integrales en la parte *b*).

a) $y''' - y = e^{3x}$ *b*) $y''' - y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

(*Respuestas: a*) $y_p = \dfrac{1}{26}e^{3x}$;

b) $y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$

$$= \left(\frac{1}{3}\int \frac{e^{-x}}{\operatorname{sen} x}dx\right)(e^x) + \left[-\frac{\sqrt{3}}{9}\int \frac{e^{x/2}}{\operatorname{sen} x}\left(3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx\right]\left(e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$
$$+ \left[-\frac{\sqrt{3}}{9}\int \frac{e^{x/2}}{\operatorname{sen} x}\left(-3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx\right]\left(e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).)$$

4-8 ▪ ECUACIÓN DE EULER

Un tipo de ecuación diferencial lineal con coeficientes variables que siempre es posible convertir a una ecuación con coeficientes constantes es la **ecuación de Euler**, que puede expresarse, en forma general, como

$$x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_ny = R(x) \tag{4-50}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes. El distintivo característico de esta ecuación es que el coeficiente de y es una constante, el coeficiente de y' es una constante por x y, en general, el coeficiente de la n-ésima derivada de y es un múltiplo constante de la potencia n de x. Es decir, cada término del lado izquierdo es de la forma $kx^my^{(m)}$, donde k es una constante y m es un entero no negativo (figura 4-19). Si expresamos la ecuación de Euler en la forma estándar dividiendo cada término entre el coeficiente principal, que es x^n, todos los demás coeficientes incluirán una potencia de x en sus denominadores. Obviamente, estos coeficientes serán discontinuos en $x = 0$.

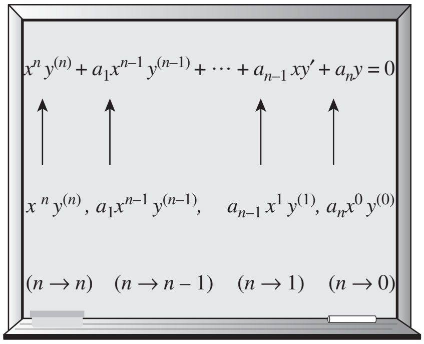


FIGURA 4-19
Cada término de una ecuación homogénea de Euler es de la forma $kx^my^{(m)}$, donde k es una constante y m es un entero no negativo.

TEOREMA 4-9 Ecuaciones de Euler

La transformación $x = e^t$ siempre convertirá la ecuación de Euler de orden n

$$x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_ny = R(x)$$

en una ecuación lineal de orden n con coeficientes constantes.

Considere el teorema 4-9, el cual probamos en el capítulo 3 para $n = 2$, y esa prueba puede extenderse para órdenes superiores. Una vez que una ecuación de Euler se convierte en una ecuación con coeficientes constantes, puede resolverse de forma rutinaria formando el polinomio característico de su parte homogénea y encontrando sus raíces. Finalmente, la solución deseada se obtiene mediante la transformación inversa $t = \ln x$.

En ecuaciones de orden superior, la transformación que se muestra en el teorema 4-9 para obtener la ecuación transformada con coeficientes constantes es bastante prolongada y tediosa. Un atajo es usar la transformación alterna $y = x^r$. Esto da por resultado una ecuación polinomial de grado n en r, que casualmente es el polinomio característico de la ecuación transformada con coeficientes constantes (figura 4-20). Una vez que determinamos las n raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$, podemos determinar la solución general de la ecuación de Euler transformada con coeficientes constantes, como se explicó en secciones anteriores. Incluso podemos aplicar los métodos de coeficientes indeterminados o de variación de parámetros para determinar la solución particular de la ecuación no homogénea. Finalmente, la transformación inversa $t = \ln x$ dará la solución general de la ecuación de Euler dada.

Como alternativa más sencilla, podemos olvidarnos de la transformación en el teorema 4-9 y suponer directamente que la solución es de la forma $y = x^r$, donde r es una constante, como se explicó en la sección 3-9 del capítulo 3 para el caso de segundo orden (figura 4-20). Sustituya $y = x^r$ y sus derivadas en la parte homogénea de la ecuación de Euler. Dichas ecuaciones de Euler incluirán sólo funciones reales.

La sustitución

$$y = x^r$$

en la ecuación de Euler

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

da el siguiente polinomio característico:

$$r^n + b_1 r^{n-1} + \cdots + b_{n-1} r + b_n = 0$$

FIGURA 4-20
Alternativa para obtener los polinomios característicos de la ecuación transformada con coeficientes constantes de la ecuación de Euler.

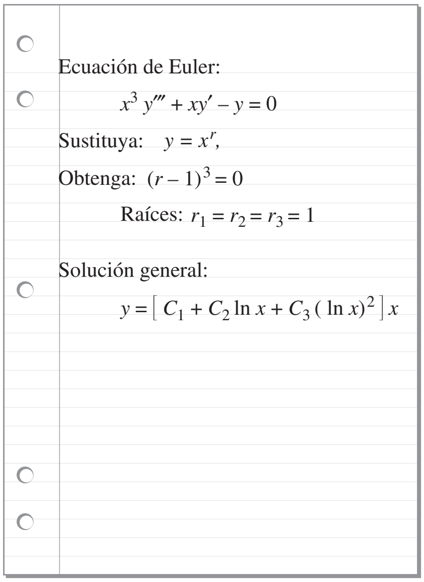


FIGURA 4-21
Obtención de la solución general de una ecuación homogénea de Euler cuando r es una raíz triple.

Si todas las n raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son reales y distintas, entonces las n soluciones linealmente independientes son

$$x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_n} \tag{4-51}$$

Si r_1 es una raíz repetida k veces, entonces las k soluciones linealmente independientes correspondientes a esta raíz son (figura 4-21):

$$x^{r_1}, (\ln x)x^{r_1}, (\ln x)^2 x^{r_1}, \ldots, (\ln x)^{k-1} x^{r_1} \tag{4-52}$$

Si el par complejo conjugado $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ es una raíz repetida k veces, entonces las $2k$ soluciones linealmente independientes correspondientes a este par son

$$\begin{gathered} x^{\alpha}\cos(\beta \ln x),\ x^{\alpha}\text{sen}(\beta \ln x), \\ (\ln x)\, x^{\alpha}\cos(\beta \ln x),\ (\ln x)\, x^{\alpha}\text{sen}(\beta \ln x), \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (\ln x)^{k-1}\, x^{\alpha}\cos(\beta \ln x),\ (\ln x)^{k-1}\, x^{\alpha}\text{sen}(\beta \ln x) \end{gathered} \tag{4-53}$$

Observe que $\ln x$ desempeña el papel de la variable independiente x en las ecuaciones con coeficientes constantes. De modo que no sorprende que la transformación $t = \ln x$ convierta las ecuaciones de Euler en una ecuación con coeficientes constantes. Las soluciones dadas en la ecuación 4-53 también son aplicables para $x < 0$ si todas las apariciones de x en las relaciones se reemplazan por $|x|$.

Las soluciones generales de una ecuación de Euler para $x > 0$ también pueden determinarse a partir de la solución general de una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga el mismo polinomio característico, sustituyendo todas las apariciones de x en la solución por $\ln x$.

Para ecuaciones de Euler no homogéneas, determinamos la solución homogénea antes descrita y encontramos una solución particular mediante el método de variación de parámetros, ya que los coeficientes de la ecuación de Euler son variables. Observe que la ecuación primero debe ponerse en la forma estándar dividiendo cada término entre el coeficiente principal, de modo que identifiquemos correctamente el término no homogéneo $R(x)$.

EJEMPLO 4-11 Ecuación de Euler de tercer orden

Determine la solución general de la ecuación $x^3y''' - 2xy' + 4y = 0$ para $x > 0$ tomando $y = x^r$.

Solución Reconocemos inmediatamente esta ecuación como una ecuación de Euler, ya que su término en el lado izquierdo es de la forma $kx^m y^{(m)}$ para $m = 0$, 1 y 3. Tomando $y = x^r$ y sustituyéndolo junto con sus derivadas $y' = rx^{r-1}$ y $y''' = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$ en la ecuación diferencial dada obtenemos

$$r(r-1)(r-2)x^3x^{r-3} - 2rxx^{r-1} + 4x^r = 0$$

o $[r(r-1)(r-2) - 2r + 4]x^r = 0$, lo cual da $r^3 - 3r^2 + 4 = 0$ ya que x^r no puede ser cero. Las raíces de la ecuación son 2, 2 y -1. Dado que 2 es una raíz doble, la solución general de esta ecuación de Euler es

$$y = (C_1 + C_2 \ln x)x^2 + \frac{C_3}{x}$$

Repaso de la sección

4-19C ¿Cómo reconoce usted una ecuación diferencial de orden n como una ecuación de Euler?

4-20C ¿Es posible reducir siempre la ecuación de Euler a una ecuación lineal con coeficientes constantes sin que importe su orden?

4-21 Determine la solución general de la siguiente ecuación de Euler para $x > 0$.

$$x^3y''' + x^2y'' + 4y = 0$$

(*Respuesta:* $y(x) = \dfrac{C_1}{x} + x^{3/2}\left[C_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\ln x\right) + C_2\,\text{sen}\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\ln x\right)\right]$.)

4-9 ▪ MÉTODOS DE COMPUTADORA PARA ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

Aunque la teoría de las ecuaciones de orden superior es similar a la de las ecuaciones de segundo orden, hay una gran diferencia entre ambas cuando se trata de aplicar los métodos, porque el álgebra necesaria se vuelve mucho más tediosa al aumentar el orden de la ecuación. Sin embargo, hay potentes métodos de computadora disponibles para dar asistencia con esta álgebra.

Por ejemplo, despejar las raíces características es más difícil. Existen fórmulas para encontrar las raíces de ecuaciones polinomiales de tercero y cuarto orden, pero su uso es fastidioso; además, está demostrado que no es posible encontrar ninguna fórmula para polinomios de orden quinto y superior. De modo que debemos usar un procedimiento numérico para encontrar las raíces para esos casos.

La solución de una ecuación de orden n contendrá n constantes de integración, que se deben encontrar de las n condiciones iniciales o condiciones en la frontera. Para encontrarlas es necesario resolver n ecuaciones algebraicas. Un problema relacionado incluye la evaluación del determinante dado por el wronskiano.

En esta sección, ilustramos los métodos de computadora adecuados y útiles para resolver ecuaciones de orden superior.

EJEMPLO 4-12 Cómo encontrar raíces

Considere la siguiente ecuación de tercer orden para la función $y(x)$: $y''' + 10y'' + 29y' + 20y = 0$. Las condiciones iniciales son $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ y $y''(0) = 0$. Obtenga su solución.

Solución El polinomio característico es

$$m^3 + 10m^2 + 29m + 20 = 0$$

Sus raíces pueden encontrarse tal como se muestra en la tabla 4-1. Son $m = -1, -4$ y -5.

TABLA 4-1

Solución por computadora para las raíces de $m^3 + 10m^2 + 29m + 20 = 0$

MATLAB

```
roots([1,10,29,20])
```

MuPAD

```
numeric::polyroots(m^3 +10*m^2+29*m+20)
```

Maple

```
solve(m^3 + 10*m^2 + 29*m + 20)
```

Mathematica

```
Roots[m^3+10*m^2+29*m+20==0,m]
```

Entonces, la forma de la solución es

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x} + C_3e^{-5x} \tag{4-54}$$

Para calcular los tres coeficientes, use las condiciones iniciales dadas para obtener

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ y'(0) &= -C_1 - 4C_2 - 5C_3 = 0 \\ y''(0) &= C_1 + 16C_2 + 25C_3 = 0 \end{aligned}$$

Éstas son tres ecuaciones algebraicas lineales con tres incógnitas; y es posible resolverlas de varias maneras. Una de ellas es escribir cada una de las tres ecuaciones y luego resolverlas como un conjunto; este método se ilustra en la tabla 4-2. La otra manera es expresar las tres ecuaciones en una sola ecuación matricial: $\mathbf{AC} = \mathbf{b}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -5 \\ 1 & 16 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este método se muestra para los cuatro programas de la tabla 4-2. La solución es $C_1 = 1.667$, $C_2 = 1.667$ y $C_3 = 1$.

TABLA 4-2

Solución por computadora para los coeficientes de la ecuación 4-54

MATLAB

```
A = [1,1,1;-1,-4,-5;1,16,25];
B = [1;0;0];
C = A\b
```

MuPAD

```
eqn1 := C1+C2+C3=1:
eqn2 := -C1-4*C2-5*C3=0:
eqn3 := C1+16*C2+25*C3=0:
numeric::linsolve([eqn1,eqn2,eqn3],[C1,C2,C3])
```

o

```
A := matrix([[1,1,1],[-1,-4,-5],[1,16,25]]):
B := matrix([[1],[0],[0]]):
linalg::matlinsolve(A, b)
```

Maple

```
eqn1 := C1+C2+C3=1:
eqn2 := -C1-4*C2-5*C3=0:
eqn3 := C1+16*C2+25*C3=0:
solve({eqn1, eqn2, eqn3},[C1, C2, C3])
```

o

```
A := Matrix([[1,1,1],[-1,-4,-5],[1,16,25]]):
b := Matrix([[1],[0],[0]]):
LinearAlgebra[LinearSolve](A,b)
```

Mathematica

```
A={{1,1,1},{-1,-4,-5},{1,16,25}};
LinearSolve[N[A],N[b]]
```

El wronskiano puede evaluarse por computadora. Por ejemplo, la siguiente ecuación se resolvió en el ejemplo 4-10:

$$y''' + 2y'' = e^x$$

La solución es

$$C_1 + C_2x + C_3e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$$

Esta solución puede encontrarse como se muestra en la tabla 4-3.

El wronskiano es

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & x & e^{-2x} \\ 0 & 1 & -2e^{-2x} \\ 0 & 0 & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = 4e^{-2x} \qquad \textbf{(4-55)}$$

Esta evaluación se muestra en la tabla 4-4.

TABLA 4-3

Solución por computadora de $y''' + 2y'' = e^x$

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
dsolve('D3y+2*D2y=exp(x)','x')
```

MuPAD

```
eqn:=ode(y'''(x)+2*y''(x)=exp(x),y(x)):
solve (eqn)
```

Maple

```
eqn := y'''(x)+2*y''(x)=exp(x)
dsolve(eqn)
```

Mathematica

```
DSolve[y'''[x]+2*y''[x]==Exp[x],y[x],x]
```

TABLA 4-4

Evaluación por computadora del wronskiano 4-55

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
syms W x
W = [1,x,exp(-2*x);0,1,-2*exp(-2*x);0,0,4*exp(-2*x)];
det(W)
```

MuPAD

```
W := matrix([[1,x,exp(-2*x)],[0,1,-2*exp(-2*x)],
 [0,0,4*exp(-2*x)]])
linalg::det(W)
```

Maple

```
W := Matrix([[1,x,exp(-2*x)],[0,1,-2*exp(-2*x)],[0,0,
 exp(-2*x)]])
with(LinearAlgebra);Determinant(W)
```

Mathematica

```
W = {{1,x,Exp[-2*x]},{0,1,-2*Exp[-2*x]},{0,0,Exp[-2*x]}};
Det[W]
```

4-10 ▪ RESUMEN

Terminología de ecuaciones lineales Se dice que una ecuación diferencial es *lineal* si no incluye ninguna potencia, producto ni función lineal de la variable dependiente y ni de sus derivadas. La ecuación lineal de orden n puede escribirse en la forma más general como

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = R(x) \quad \textbf{(4-1)}$$

donde los coeficientes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pueden depender solo de x. La función $R(x)$ representa todos los términos que no incluyen la variable dependiente y ni alguna de sus derivadas, y se llama *término no homogéneo*. Se dice que una ecuación diferencial es *no homogénea* cuando $R(x) \neq 0$, y *homogénea* cuando $R(x) = 0$. La ecuación que se obtiene haciendo que $R(x) = 0$ se llama *ecuación homogénea asociada* o *ecuación complementaria.* Si los coeficientes de la variable dependiente y y sus derivadas son constantes, se dice que la ecuación tiene *coeficientes constantes*. Si uno o más coeficientes dependen de la variable independiente x, entonces se dice que la ecuación tiene *coeficientes variables*.

Existencia y unicidad de las soluciones La *existencia y unicidad* de la solución de los problemas lineales de valor inicial de orden n se expresa por el teorema 4-1.

> Si las funciones $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ y $R(x)$ son continuas en un intervalo $x_1 < x < x_2$ y x_0 en cualquier punto en este intervalo, entonces la ecuación lineal de orden n 4-1 tiene una solución única en este intervalo que satisface las n condiciones iniciales
>
> $$y(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$
>
> donde $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ son constantes reales específicas.

Principio de superposición para ecuaciones lineales homogéneas Si una función es una solución de una ecuación diferencial lineal homogénea, un múltiplo constante de dicha función también lo es. Si n funciones son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, su suma también es una solución de la ecuación diferencial. Esto se conoce como *principio de superposición* y se expresa por el teorema 4-2.

> Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son n soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden n, entonces la combinación lineal
>
> $$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n \quad \textbf{(4-7)}$$
>
> donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias, también es una solución de esta ecuación.

Identidad de Abel Para una ecuación lineal homogénea de orden n cuyos coeficientes son continuos en el intervalo que interesa, la identidad de *Abel* se expresa en el teorema 4-3.

> El wronskiano de cualesquiera n soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de una ecuación lineal homogénea de orden n puede ser siempre cero (lo cual indica que estas n soluciones son linealmente dependientes) o nunca cero (lo cual indica que estas n soluciones son linealmente independientes).

Conjunto fundamental de soluciones Una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n tiene n soluciones linealmente independientes que forman un *conjunto fundamental de soluciones*, como se expresa en el teorema 4-4.

> Una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n cuyos coeficientes son continuos en un intervalo $x_1 < x < x_2$ siempre tiene n soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ que son linealmente independientes en ese intervalo. Además, cualquier solución de esta ecuación diferencial en ese intervalo puede expresarse en forma única como una combinación lineal de estas n soluciones como
>
> $$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n \quad \textbf{(4-9)}$$
>
> que se llama solución general de la ecuación en ese intervalo.

Reducción de orden Cuando se conoce una de las soluciones no triviales de una ecuación lineal homogénea, su orden puede reducirse en una unidad por el método de *reducción de orden*. Esto se expresa por el teorema 4-5.

> Si y_1 es una solución de una ecuación lineal homogénea de orden n, entonces la sustitución $y = \nu y_1$, donde ν es función de x, la reduce a una ecuación lineal homogénea de orden $n - 1$ en ν'.

Formas de solución para raíces reales distintas Una ecuación lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes siempre tiene n soluciones lineales independientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$, y su solución general se expresa como $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$, donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias. Si las n raíces del polinomio característico $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son reales y diferentes, entonces las n soluciones fundamentales de la ecuación diferencial de orden n dada son: $e^{m_1x}, e^{m_2x}, \ldots, e^{m_nx}$.

Formas de solución para raíces reales repetidas Si m_1 es una raíz repetida k veces del polinomio característico, entonces las k ecuaciones lineales independientes correspondientes a esta raíz son

$$e^{m_1x}, xe^{m_1x}, x^2e^{m_1x}, \ldots, x^{k-1}e^{m_1x} \quad \textbf{(4-17)}$$

La parte de la solución general correspondiente a una raíz m repetida k veces se obtiene multiplicando e^{mx} por un polinomio de grado $k - 1$ con coeficientes constantes arbitrarios.

Formas de solución para raíces complejas Si una ecuación polinomial tiene coeficientes reales, entonces las raíces complejas que pueda tener deben ocurrir en conjugados. La solución general correspondiente a un par de raíces conjugadas $\alpha \pm i\beta$ del polinomio característico es

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x) \quad \textbf{(4-19)}$$

La parte de la solución general correspondiente a un par conjugado repetido k veces $\alpha \pm \beta$ es

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x) \\ &\quad + xe^{\alpha x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \operatorname{sen} \beta x) + \cdots \\ &\quad + x^{k-1}e^{\alpha x}(C_{2k-1} \cos \beta x + C_{2k} \operatorname{sen} \beta x) \end{aligned} \quad \textbf{(4-20)}$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_{2k}$ son constantes arbitrarias.

Soluciones homogéneas y particulares La solución general de una ecuación lineal no homogénea se obtiene combinando la solución general de la ecuación homogénea asociada, que se llama *solución homogénea* o *solución complementaria*, con una función que satisfaga la ecuación no homogénea dada, llamada *solución particular*, de acuerdo con el teorema 4-6.

> Si y_p es una solución particular de una ecuación lineal no homogénea de orden n cuyos coeficientes y cuyo término no homogéneo $R(x)$ son continuos en un intervalo $x_1 < x < x_2$

y y_h es la solución general de su ecuación homogénea asociada, entonces la solución general de esta ecuación no homogénea es

$$y = y_h + y_p = C_1y_1 + C_2y_2, \ldots, C_ny_n + y_p \qquad \textbf{(4-30)}$$

donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada, y $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.

Principio de superposición para ecuaciones lineales no homogéneas El término no homogéneo $R(x)$ a menudo incluye varios términos. En tales casos, es mucho más fácil encontrar una solución particular correspondiente a cada término no homogéneo y luego sumarlas de acuerdo con el *principio de superposición* expresado en el teorema 4-7.

Si y_{p1} es una solución particular de

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = R_1(x) \qquad \textbf{(4-31)}$$

y y_{p2} es una solución particular de

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = R_2(x) \qquad \textbf{(4-32)}$$

entonces $y_{p1} + y_{p2}$ es una solución particular de

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = R_1(x) + R_2(x) \qquad \textbf{(4-33)}$$

Método de coeficientes indeterminados Hay dos maneras de determinar la solución particular y_p de ecuaciones no homogéneas: el método de coeficientes indeterminados y el de variación de parámetros. El primero se explicó en el capítulo 3 respecto a las ecuaciones de segundo orden y también es aplicable a ecuaciones lineales de orden superior, sin que importe cuál sea el orden.

Método de variación de parámetros Éste es aplicable a ecuaciones con coeficientes constantes o variables y a los términos no homogéneos, que pueden ser de cualquier forma, pero requiere que esté disponible la solución general de la ecuación homogénea asociada. Para ecuaciones lineales de orden n, se resume en el teorema 4-8.

Si las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada de una ecuación lineal de orden n con coeficientes continuos y término $R(x)$ no homogéneo en un intervalo $x_1 < x < x_2$, entonces una solución particular de esta ecuación diferencial no homogénea está dada por

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_ny_n \qquad \textbf{(4-36)}$$

donde

$$u_k = \int \frac{R(x)W_k(x)}{W(y_1, y_2, \ldots, y_n)}dx \quad k = 1, 2, \ldots n \qquad \textbf{(4-45)}$$

Aquí $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es el wronskiano del conjunto fundamental de soluciones, y $W_k(x)$ es el determinante obtenido al eliminar la columna k y la última fila de $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y multiplicando por $(-1)^{n-k}$.

Ecuación de Euler No hay procedimiento general para resolver ecuaciones lineales con coeficientes variables, salvo para ciertos tipos de ecuaciones; una de éstas es la *ecuación de Euler*, que siempre puede convertirse en una ecuación con coeficientes constantes. El término general de la ecuación de Euler es de la forma $kx^my^{(m)}$, donde k es una constante y m es un entero no negativo. La ecuación de Euler de orden n se expresa como

$$x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_ny = R(x) \qquad \textbf{(4-50)}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes. La ecuación de Euler siempre puede transformarse en una ecuación con coeficientes constantes mediante la transformación $x = e^t$, como se expresa en el teorema 4-9.

A menudo es más fácil resolver la ecuación de Euler considerando que la solución es de la forma $y = x^r$. Esta transformación da como resultado una ecuación polinomial de grado n en r. Si todas las n raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son reales y distintas, entonces las n soluciones

$$x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_n} \qquad \textbf{(4-51)}$$

forman un conjunto fundamental de soluciones. Si r_1 es una raíz real repetida k veces, entonces las k soluciones linealmente independientes correspondientes a esta raíz son

$$x^{r_1}, (\ln x)x^{r_1}, (\ln x)^2x^{r_1}, \ldots, (\ln x)^{k-1}x^{r_1} \qquad \textbf{(4-52)}$$

Si el par complejo conjugado $r_{1,2} = a \pm i\beta$ es una raíz repetida k veces, entonces las $2k$ soluciones linealmente independientes correspondientes a estas raíces son

$$\begin{array}{ll} x^\alpha\cos(\beta\ln x), & x^\alpha\mathrm{sen}(\beta\ln x), \\ (\ln x)x^\alpha\cos(\beta\ln x), & (\ln x)x^\alpha\mathrm{sen}(\beta\ln x), \\ \cdots & \cdots \\ (\ln x)^{k-1}x^\alpha\cos(\beta\ln x), & (\ln x)^{k-1}x^\alpha\mathrm{sen}(\beta\ln x) \end{array} \qquad \textbf{(4-53)}$$

La solución general de una ecuación homogénea de Euler para $x > 0$ también puede determinarse a partir de la solución general de una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga el mismo polinomio característico, reemplazando todas las apariciones de x en la solución por $\ln x$.

PROBLEMAS

4-1 Introducción a las ecuaciones lineales de orden superior

4-22C ¿En qué condiciones se garantiza que un problema de valor inicial lineal de orden n tenga una solución única en un intervalo específico?

4-23C Encuentre un problema de valor inicial de tercer orden cuya única solución sea la solución trivial $y = 0$.

Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son 1) *lineales o no lineales,* 2) *homogéneas o no homogéneas* y 3) *tienen coeficientes constantes o variables:*

4-24 *a*) $y''' + 2y^2y' + 2y = xe^{-3x}$

b) $y''' + 5y' - ky = 0$

c) $y''' - 3y' + xy = 0$

d) $y''' + y' = x^2\cos x$

4-25 *a)* $y^{(iv)} - 5y' + \cos y = x + 1$
b) $y^{(iv)} = 0$
c) $y^{(iv)} + 2x^2y' + 5y = 0$
d) $y^{(iv)} + e^x y = \dfrac{1}{x}$

4-26 *a)* $y''' + e^y y' - 2y = 6$
b) $y''' - 2y' + y = x^3 \cos 2x$
c) $y''' - 5x^2y' = 0$
d) $y''' - y = 0$

4-27 *a)* $y^{(v)} + \dfrac{1}{y} = 1$
b) $y^{(v)} - 8y' - e^{\ln y} = 0$
c) $y^{(v)} - (\operatorname{sen} 2x)y' + y = 0$
d) $y^{(v)} + y = 7$

Determine el intervalo en el que se garantiza que los siguientes problemas de valor inicial tienen una solución única:

4-28 *a)* $y''' = 0 \;\; y(0) = 0, y'(0) = -4$ y $y''(0) = 0$
b) $(x-1)^3y''' + 2xy' - y = e^{-x}$,
$y(-2) = 3, y'(-2) = -7$ y $y''(-2) = 0$

4-29 *a)* $y''' + xy' - 3y = x^2e^{3x}$,
$y(-1) = 1, y'(-1) = 4$ y $y''(-1) = 0$
b) $(x-2)y''' + 6xy = 2$,
$y(0) = -2, y'(0) = 0$ y $y''(0) = 0$

4-30 *a)* $x(x-3)y''' + xy' - 2(x-3) = -3x^2$,
$y(1) = 2, y'(1) = -5$ y $y''(1) = 0$
b) $y''' - 5y = \ln x, y(5) = 3, y'(5) = 1$ y $y''(5) = 0$

4-31 *a)* $y''' + 4y = e^{2x}\cos x, y(0) = 0, y'(5) = 1$ y $y''(5) = 0$
b) $(x^2-4)y''' - 3xy' - 2y = 0$,
$y(1) = 0, y'(1) = 7$ y $y''(1) = 0$

4-2 Teoría de las ecuaciones homogéneas

4-32C ¿Cuántas soluciones diferentes puede tener una ecuación lineal de orden n con coeficientes continuos? ¿Cuántas de estas soluciones pueden ser linealmente independientes?

4-33C Considere una ecuación lineal homogénea de tercer orden con coeficientes continuos y tres de sus soluciones y_1, y_2 y y_3 que son linealmente independientes. ¿Puede esta ecuación diferencial tener una solución que no pueda expresarse como $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$ donde C_1, C_2 y C_3 sean constantes?

Considere las siguientes ecuaciones lineales homogéneas y su solución para $x > 0$. Identifique las soluciones cuyo wronskiano nunca es cero para $x > 0$, por inspección. Verifique sus hallazgos calculando su wronskiano para cada caso:

4-34 *a)* $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$; x, x^2 y x^3
b) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$; x, $-x$ y x^3

4-35 *a)* $y''' - y' = 0$; e^x, e^{-x} y 1
b) $y''' - y' = 0$; e^x, $2e^{2+x}$ y -5

4-36 *a)* $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy = 0$; $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\ln x}{x}$ y x^2
b) $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy = 0$; $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\ln x^2}{x}$ y $\dfrac{\ln x^3}{x}$

*Considere las siguientes ecuaciones lineales homogéneas y sus soluciones en $x > 0$. Determine si las soluciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones. Si es así, desarrolle una relación para **y** que contenga todas las soluciones de la ecuación:*

4-37 *a)* $y^{(iv)} - y = 0$; 1, e^x, y e^{-x}
b) $y^{(iv)} - y = 0$; 1, senh x, y cosh x

4-38 *a)* $y''' - y'' + y' - y = 0$; e^x, sen x, y cos x
b) $y''' - y'' + y' - y = 0$; e^x, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\tan x}$ y cos x

4-39 *a)* $y''' - y'' + y' - y = 0$; e^x, xe^x, y e^{-x}
b) $y''' - y'' + y' - y = 0$; xe^x, $e^{x+\ln x}$, y $3e^{-x}$

4-40 *a)* $y''' - 4y'' + 4y' = 0$; 1, e^{2x}, y xe^{2x}
b) $y''' - 4y'' + 4y' = 0$; -5, e^{2x+1}, y $e^{2x} + 15$

4-3 Reducción de orden

4-41C ¿Es práctico el método de reducción de orden para ecuaciones lineales de orden tercero y superior? Explique.

Usando la solución que se da, determine las demás soluciones linealmente independientes de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas por el método de reducción de orden:

4-42 $y^{(iv)} - 16y = 0$, $y_1 = e^{2x}$

4-43 $y''' + 9y' = 0$, $y_1 = 1$

4-44 $y^{(iv)} + 8y''' + 18y'' + 16y' + 5y = 0$, $y_1 = e^{-x}$

4-45 $x^3y''' - 2xy' + 4y = 0$, $y_1 = x^2$

4-46 $x^2y''' + 3xy'' + y' = 0$, $y_1 = 4$

4-4 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

4-47C ¿Piensa usted que exista una ecuación lineal homogénea de cuarto orden con coeficientes constantes a la que satisfagan las funciones e^{2x}, e^{-3x} y $5e^{2x} - 8e^{-3x}$?

4-48C ¿Piensa usted que exista una ecuación lineal homogénea de tercer orden con coeficientes constantes a la que satisfagan las funciones x, $x + 1$, x^2 y $x^2 + 5$?

4-49C ¿Piensa usted que exista una ecuación lineal homogénea de tercer orden con coeficientes continuos a la que satisfagan las funciones x, cos x, tan x y cotan x?

4-50C Explique cómo formaría usted una solución general cuando las raíces del polinomio característico correspondiente a una ecuación lineal homogénea de cuarto orden con coeficientes constantes son iguales.

4-51C Cuando todas las raíces del polinomio característico de una ecuación lineal homogénea de sexto orden con coeficientes constantes son complejas, ¿están necesariamente en la forma de pares conjugados?

Determine la solución general de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes:

4-52 *a)* $y''' - y' = 0$, *b)* $y''' - 5y'' + 4y = 0$

4-53 *a)* $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
b) $y''' + 6y'' + 9y' = 0$

4-54 *a)* $y''' - y'' - y' + y = 0$
b) $y''' + 3y'' + 4y = 0$

4-55 *a)* $y''' - 2y''' + y' + 4y = 0$
b) $y^{(iv)} + 4y''' + 12y'' + 16y' + 16y = 0$

Determine la solución específica de los siguientes problemas de valor inicial:

4-56 $y''' - 4y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ y $y''(0) = 0$

4-57 $y''' - y = 0$, $y(0) = 1$ y $y'(0) = y''(0) = 0$

4-58 $y''' + 2y'' + y' - y = 0$,
$y(4) = y'(4) = y''(4) = 0$

4-59 $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 1$ y
$y'(0) = y''(0) = 0$

4-60 Obtenga la ecuación diferencial de la corriente $i(t)$ para el modelo de altavoz desarrollado en el ejemplo 4-6.

4-61 Obtenga la forma de la solución homogénea para los siguientes valores de parámetros del modelo de altavoz desarrollado en el ejemplo 4-6:

$$m = 0.003 \text{ kg} \qquad k = 5 \times 10^5 \text{ N/m}$$
$$K_f = 20 \text{ N/A} \qquad K_b = 20 \; V \cdot \text{s/m}$$
$$R = 10\,\Omega \qquad L = 10^{-3} \text{ H}$$

4-62 Obtenga la ecuación diferencial de cuarto orden para el desplazamiento x_2 del segundo piso del modelo de edificio de dos pisos presentado en el ejemplo 4-7. Determine sus raíces características.

4-63 Considere el modelo de edificio de dos pisos presentado en el ejemplo 4-7, obtenga sus raíces características para el caso en que $m_1 = 2m$, $m_2 = m$ y $k_1 = 2k$, $k_2 = k$.

4-5 Teoría de las ecuaciones no homogéneas

4-64C ¿Necesitamos modificar el principio de superposición para las soluciones particulares cuando se trata de ecuaciones lineales de orden tercero o superior?

4-6 Ecuaciones no homogéneas: el método de coeficientes indeterminados

4-65C ¿Son iguales las formas generales de las soluciones particulares correspondientes al mismo término no homogéneo en una ecuación lineal de segundo y tercer orden? Si no, ¿en qué se distinguen?

Usando el método de coeficientes indeterminados, establezca la solución general de las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas:

4-66 *a)* $y''' + y' = 2\,\text{sen}\,x$
b) $y''' + y' = 2x\cos 3x$
c) $y''' + y' = -3\cos 3x$
d) $y''' + y' = xe^x\,\text{sen}\,2x - 5\,\text{sen}\,2x + 3\cos 2x$

4-67 *a)* $y''' - 3y' + 2y = -2e^{3x}$
b) $y''' - 3y' + 2y = 2e^{3-2x}$
c) $y''' - 3y' + 2y = 5xe^{-2x}$
d) $y''' - 3y' + 2y = e^x\cos 2x$

4-68 *a)* $y''' - 2y'' = x^2 + 1$
b) $y''' - 2y'' = \text{sen}\,x + \cos 2x$
c) $y''' - 2y' = e^x\,\text{sen}\,x$
d) $y''' - 2y'' = x^3e^x$

4-69 *a)* $y^{(iv)} - y = x - 2$
b) $y^{(iv)} - y = (x - 1)e^x$
c) $y^{(iv)} - y = x^2 - 1$
d) $y^{(iv)} - y = xe^x\,\text{sen}\,2x$

4-70 *a)* $4y''' - 3y' - y = 20$
b) $4y''' - 3y' - y = x^2e^x$
c) $4y''' - 3y' - y = e^{3x}\cos x$
d) $4y''' - 3y' - y = x^2\,\text{sen}\,2x$

4-71 *a)* $y''' + 8y = 2\,\text{sen}\,x - 3\cos x$
b) $y''' + 8y = x^2 - e^x$
c) $y''' + 8y = (x^2 - 1)e^x$
d) $y''' + 8y = e^{2x}\,\text{sen}\,3x$

4-72 *a)* $y''' = 5$ *b)* $y''' = -3x^2e^x$
c) $y''' = 2x^2 - 3$ *d)* $y''' = 8\cos 2x$

4-73 Considere el modelo de edificio de dos pisos que se trató en el ejemplo 4-7, obtenga la forma de la solución particular para el caso en que $y = 1$, $m_1 = m_2 = m$ y $k_1 = k_2 = k$.

4-74 Considere el modelo de edificio de dos pisos del ejemplo 4-7, obtenga la forma de la solución particular para el caso en que $y = \text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$, $m_1 = m_2 = m$ y $k_1 = k_2 = k$.

4-7 Ecuaciones no homogéneas: el método de variación de parámetros

4-75C ¿Por qué el método de variación de parámetros se complica cuando se trata de ecuaciones de orden tercero o superior?

Usando el método de variación de parámetros, determine la solución particular de las siguientes ecuaciones no homogéneas. Verifique sus resultados en la parte a) usando el método de coeficientes indeterminados. Quizá necesite dejar sin evaluar las integrales en la parte b).

4-76 *a)* $y^{(iv)} - 16y = xe^{2x}$ *b)* $y^{(iv)} - 16y = \dfrac{e^{2x}}{x}$

4-77 *a)* $y''' + 9y' = \cos 2x$ *b)* $y''' + 9y' = \dfrac{1}{\cos 2x}$

4-78 *a)* $y''' - 2y'' = e^{2x}\cos x$ *b)* $y''' - 2y'' = \tan x$

4-79 *a)* $y''' + y' = x^3 - 1$ *b)* $y''' + y' = \dfrac{1}{x}$

4-80 *a)* $y''' - y'' - 4y' - 6y = x + 5$
b) $y''' - y'' - 4y' - 6y = \ln x$

4-81 *a)* $y''' = x^2e^x$ *b)* $y''' = \dfrac{1}{x^2}$

4-82 *a)* $y''' - 2y' - 4y = e^{2x} + 8$
b) $y''' - 2y' - 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$

4-8 Ecuación de Euler

4-83C Describa dos maneras sistemáticas de obtener el polinomio característico de la ecuación transformada con coeficientes constantes correspondiente a una ecuación de Euler dada. ¿Cuál procedimiento es más práctico?

4-84C Al resolver una ecuación de Euler de orden tercero o superior usando la sustitución $y = x^r$, ¿cómo manejaría usted una raíz real repetida tres veces?

4-85C Al resolver una ecuación de Euler de sexto grado con coeficientes reales usando la sustitución $y = x^r$, ¿cómo formaría usted la solución general si $\alpha \pm i\beta$ es una raíz triple?

Determine la solución general de las siguientes ecuaciones de Euler para $x > 0$:

4-86 $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$

4-87 $x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' - 6y = 0$

4-88 $x^3y''' + x^2y'' = 0$

4-89 $2x^3y''' + 6xy' - 6y = 0$

4-90 $x^3y''' - 6y = 0$

4-91 $x^3y''' + 4x^2y'' - 6xy' - 12y = 0$

4-92 $x^3y''' + 3x^2y'' - 6y = 0$

4-9 Problemas de computadora

4-93 Use una computadora o una calculadora para obtener las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $r^3 + 16r^2 + 76r + 96 = 0$
b) $r^3 + 9r^2 + 24r + 20 = 0$
c) $5r^3 + 30r^2 + 60r + 40 = 0$
d) $r^3 + 13r^2 + 119r + 267 = 0$
e) $r^4 + 16r^3 + 194r^2 + 984r + 4\,005 = 0$
f) $r^4 + 16r^3 + 158r^2 + 624r + 801 = 0$
g) $r^4 + 12r^3 + 104r^2 + 408r + 1\,156 = 0$

Use una computadora para determinar la solución general de las siguientes ecuaciones:

4-94 *a)* $y^{(iv)} - y = 0$ *b)* $y''' + 3y'' + 4y' + 12y = 0$

4-95 *a)* $y''' - y'' - 4y' - 6y = x + 5$
b) $y''' - y = e^{3x}$

4-96 *a)* $x^3y''' + x^2y'' + 4y = 0$
b) $x^3y''' + 4x^2y'' - 6xy' - 12y = 0$

Determine la solución específica de los siguientes problemas de valor inicial usando una computadora para despejar las constantes albitrarias:

4-97 $y''' - 4y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ y $y''(0) = 0$

4-98 $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 1$ y $y'(0) = y''(0) = 0$

Use una computadora para determinar el wronskiano para cada uno de los siguientes problemas:

4-99 *a)* $y''' - 3y'' + 3y' = 0$; e^x, xe^x, y x^2e^x
b) $y''' - 3y'' + 3y' = 0$; e^x, $2e^x$, y $-3x^2e^x$

4-100 *a)* $x^3y''' + 2x^2y'' - 2xy' = 0$; $\dfrac{1}{x}$, x^2 y 1
b) $x^3y''' + 2x^2y'' - 2xy' = 0$; $e^{-\ln x}$, x^2 y 5

Problemas de repaso

4-101 Verifique que si y_1 es una solución de

$$y''' + P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$$

entonces la sustitución $y = u(x)y_1$ da la siguiente ecuación lineal homogénea de segundo orden en u':

$$y_1u''' + (3y_1' + P_1y_1)u'' + (3y_1'' + 2P_1y_1' + P_2y_1)u' = 0.$$

Determine la solución general de las siguientes ecuaciones lineales para $x > 0$. También determine las constantes arbitrarias en la solución general cuando se especifican las condiciones iniciales.

4-102 $y^{(iv)} - 16y = 0$

4-103 $y''' - y' = xe^{2x}\cos x$

4-104 $y''' + 2y'' + y' = 0$

4-105 $y''' = \dfrac{1}{x} + x\,\mathrm{sen}\,x$

4-106 $2x^3y''' + 5x^2y'' = x^2 - 1$

4-107 $y''' + 2y'' + 6y' + 4y = x^3 - 2$

4-108 $y^{(iv)} + 2y'' + y = 0$

4-109 $x^3y''' + x^2y'' = \dfrac{1}{x} - 2$

4-110 $y''' - 6y'' + 9y' = 0$

4-111 $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

4-112 $y''' + y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = y''(0) = 1$

4-113 $y''' + y = 4e^{3x} - x$

4-114 $y''' - 4y'' = x + 1$

4-115 $y''' - 4y'' + 3y = -e^{2x} - 1$

4-116 $y^{(iv)} - y'' = x^2 + 1 - e^x\,\mathrm{sen}\,x$

4-117 $y^{(iv)} + y = x\,\mathrm{sen}\,x$

4-118 $y''' - 9y' + 8y = x^2e^{3x}$

4-119 $y^{(iv)} + 16y = xe^{2x} - 1$

4-120 $y^{(iv)} - y = 0$, $y(0) = 1$,
$y'(0) = y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$

4-121 $y''' + 9y' = x^2\cos 2x$

4-122 $x^3y''' + 3x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$

4-123 $y^{(iv)} + 64y = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

4-124 $x^4y^{(iv)} - 4x^2y'' - 6y = 0$

4-125 $x^3y''' + 6y = 0$

4-126 $y''' + 4y'' + 4y' = x^2 - 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,
$y''(0) = 2$

CAPÍTULO

5

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES: COEFICIENTES VARIABLES

OBJETIVOS

Al terminar este capítulo usted deberá ser capaz de:

1. Manipular series de potencias, hacer pruebas de convergencia y calcular el intervalo de convergencia.
2. Identificar puntos ordinarios y puntos singulares de ecuaciones de segundo orden con coeficientes variables, y calcular el radio de convergencia.
3. Obtener soluciones de series de potencias de ecuaciones de segundo orden alrededor de un punto ordinario.
4. Identificar y resolver ecuaciones de Legendre.
5. Obtener soluciones seriales alrededor de un punto singular, usando el método de Frobenius.
6. Identificar y resolver ecuaciones de Bessel.
7. Usar un software para obtener una solución como una serie de potencias o en términos de funciones especiales.

Hasta ahora hemos considerado ecuaciones diferenciales con *coeficientes constantes*, porque muchas ecuaciones siempre pueden resolverse de manera sistemática en términos de funciones elementales (tales como funciones exponenciales, trigonométrica y logaritmos). También consideramos la ecuación de Euler como un caso especial de una ecuación con coeficientes variables.

Ahora tenemos la posibilidad de manejar ecuaciones diferenciales lineales con *coeficientes variables*. Estas ecuaciones rara vez pueden resolverse en términos de funciones elementales y, por tanto, necesitamos investigar otros métodos de resolución. Uno que se usa con buen éxito para resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes variables es el *método de soluciones de serie*, el cual se usa para hallar soluciones exactas o aproximadas de ecuaciones lineales y no lineales con coeficientes constantes o variables.

En este capítulo aplicaremos el método de soluciones de serie a ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables que pueden expresarse como

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Tales ecuaciones se presentan con frecuencia en las ciencias físicas y la ingeniería, y el método de solución de serie para dichas ecuaciones está bien desarrollado. Los procedimientos que se explican en este capítulo también pueden aplicarse en ecuaciones lineales de orden superior.

En este método, la solución de una ecuación diferencial se expresa en términos de una serie infinita con coeficientes ajustables. La evaluación de una serie infinita en un punto específico —por lo menos en apariencia— requiere el cálculo y la suma de un número infinito de términos, lo cual parece una tarea interminable. En la práctica, sin embargo, basta con la evaluación de un número finito de términos de la serie, ya que las series que se usan en la solución son convergentes, y los términos tienden a cero al aumentar el índice de la sumatoria.

No hay un procedimiento estándar para aplicar el método de soluciones de serie a las ecuaciones lineales de segundo orden. No todas las soluciones pueden resolverse fácilmente por este método. Por tanto, es necesario clasificar las ecuaciones y desarrollar procedimientos aplicables a cada clase. Las ecuaciones con coeficientes continuos $P(x)$ y $Q(x)$ son de resolución relativamente fácil y clara. Cualquier complicación en el procedimiento de solución se debe a la presencia de puntos discontinuos o singulares de $P(x)$ y $Q(x)$.

Comenzamos este capítulo con un breve repaso de las series de potencias, ya que éstas son la columna vertebral del método de soluciones de serie. Después de demostrar el método, lo aplicaremos a ecuaciones cuyos coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ no tengan puntos singulares en la región que interesa. Luego extenderemos el análisis a ecuaciones cuyos coeficientes tengan ciertas formas de singularidades en la región que interesa. Finalmente, aplicaremos el método de solución de serie a algunas ecuaciones diferenciales de segundo orden bien conocidas con coeficientes variables, como la ecuación de Legendre y la ecuación de Bessel.

5-1 ▪ REPASO DE SERIES DE POTENCIAS

Las series de potencias forman la base del método de soluciones de serie y, por tanto, para el estudio de este método es esencial tener un buen entendimiento de las series de potencias, sus propiedades y la terminología correspondiente. En esta sección repasaremos las series de potencias en la medida necesaria para seguir y entender el método de solución de serie.

Una función matemática que se expresa como la suma de varios términos se llama **serie**, y una función que se expresa como la suma de un número infinito de términos se llama **serie infinita**. Una serie infinita cuyos términos incluyan las potencias de la variable en la forma x^n o $(x - x_0)^n$, donde n es un entero no negativo, se llama **serie de potencias**, y se expresa como (figura 5-1)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots \tag{5-1}$$

o

$$f(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \cdots \tag{5-2}$$

donde x_0 es un valor fijo de x. Aquí las constantes C_n se llaman **coeficientes** de la serie de potencias, y el punto $x = x_0$ se llama **centro**.

Frecuentemente la ecuación 5-1 se describe como una *serie de potencias alrededor del punto* $x = 0$, y la ecuación 5-2 como una *serie de potencias alrededor del punto* $x = x_0$. La serie de la ecuación 5-2 puede obtenerse a partir de la ecuación 5-1 simplemente reemplazando x por $(x - x_0)$. Por tanto, por simplicidad en la notación, usualmente consideraremos series de potencias en x, dando por hecho que pueden convertirse con facilidad en series en $(x - x_0)$ usando un sencillo cambio de variable.

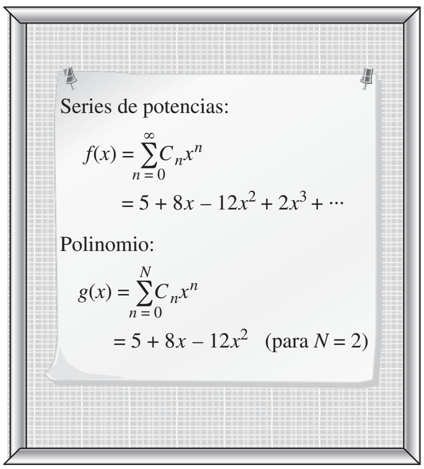


FIGURA 5-1
Una serie de potencias es infinita y sus términos son de la forma $C_n x^n$, donde n es un número entero. Un polinomio es una serie de potencias con un número finito de términos.

Muchas funciones elementales familiares tienen representaciones bien conocidas en forma de series de potencias. Algunas de éstas son:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{5-3}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{5-4}$$

$$\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \tag{5-5}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{5-6}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad \textbf{(5-7)}$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad \textbf{(5-8)}$$

Observe que el factorial de n es el producto $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \ldots, n$, con $0! = 1$, por definición (figura 5-2); y que $x^0 = 1$ para todas las x, incluyendo $x = 0$. La representación de una serie se dice que **converge** a la función que representa si el valor de la serie para un valor específico de x tiende al valor de la función cuando se incluyen más términos en la serie. Las de las ecuaciones 5-3 a 5-8 convergen hacia sus funciones respectivas para valores reales de x.

Las series de potencias en las ecuaciones 5-3 a 5-8, así como las series de potencias de otras funciones, pueden obtenerse de su expansión de serie de Taylor alrededor del punto $x = 0$. La **serie de Taylor** de cualquier función $f(x)$ alrededor del punto x_0 se expresa como la serie de potencias

$$f(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \quad \textbf{(5-9)}$$

siempre y cuando las derivadas $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ existan (en otras palabras, si la función es infinitamente diferenciable). La expansión de serie de las funciones elementales puede obtenerse por la ecuación 5-9 realizando las diferenciaciones indicadas en el punto $x_0 = 0$ (ver figura 5-3).

El símbolo griego *sigma* en la notación de serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

significa *sumatoria*, y n denota el *índice de sumatoria* que sirve como contador, el cual es un parámetro ficticio (tal como la variable ficticia en una integral definida), y da igual si lo representamos como n, m, i, j o k. Por ejemplo,

$$\sum_{n=2}^{4} n^2 x^n = 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 = \sum_{i=2}^{4} i^2 x^i \quad \textbf{(5-10)}$$

Dos series de potencias son *idénticas* si representan la misma función. Por tanto, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n \quad \textbf{(5-11)}$$

para todas las x en algún intervalo, entonces $C_n = D_n$ para todas $n = 0, 1, 2, 3,\ldots$ Como caso especial, si la serie de potencias es igual a cero para todas las x en algún intervalo, entonces $C_n = 0$ para todas las $n = 0, 1, 2, 3,\ldots$

Una expresión de serie puede manipularse de la misma manera que una integral definida. Por ejemplo,

$$\sum_{n=3}^{8} C_n x^n = \sum_{n=3}^{5} C_n x^n + \sum_{n=6}^{8} C_n x_n \quad \textbf{(5-12)}$$

$$\sum_{n=3}^{8} C_n x^n = \sum_{n=0}^{8} C_n x^n - \sum_{n=0}^{2} C_n x^n \quad \textbf{(5-13)}$$

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 1 \cdot 2 = 2$
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
$\vdots$
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

FIGURA 5-2
Función factorial.

Polinomio:

$f(x) = x^2 - 1$

entonces

$f'(x) = 2x$
$f''(x) = 2$
$f^{(n)}(x) = 0, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$

En $x = 0$:

$f(0) = -1$
$f'(0) = 0$
$f''(0) = 2$
$f^n(0) = 0, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$

Serie de Taylor:

$$f(x - 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x - 0)^n$$
$$= -1 + 0 + \frac{2}{2!}x^2$$
$$= x^2 - 1$$
$$= f(x)$$

FIGURA 5-3
Las expansiones de series de Taylor de polinomios alrededor del origen son equivalentes a las mismas series.

$$\sum_{n=0}^{10} 2C_n x^n = 2\sum_{n=0}^{10} C_n x^n \tag{5-14}$$

$$x^2\sum_{n=1}^{7} C_n x^n = \sum_{n=1}^{7} C_n x^{n+2} \tag{5-15}$$

Observe que cualquier cantidad que no dependa del índice de sumatoria puede moverse hacia dentro o hacia afuera del signo de sumatoria, igual que una cantidad que no depende de la integración puede desplazarse hacia dentro o hacia afuera del signo de integración (figura 5-4).

A veces es conveniente escribir individualmente algunos de los términos de una sumatoria y dejar el resto de los términos en la sumatoria. Por ejemplo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{2n} = C_0 + C_1x^2 + C_2x^4 + \sum_{n=3}^{\infty} C_n x^{2n}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\sqrt{x}(n-1)x^n$$

$$= 2\sqrt{x}\sum_{n=0}^{\infty} (n-1)x^n$$

$$\neq (n-1)\sum_{n=0}^{\infty} 2\sqrt{x}x^n$$

FIGURA 5-4
Una cantidad que no depende del índice de sumatoria puede moverse hacia dentro o hacia afuera de la sumatoria.

Cómo desplazar el índice de sumatoria

Frecuentemente es necesario desplazar el índice de sumatoria, especialmente cuando se combinan series cuyos términos generales no son de la misma potencia. El índice puede trasladarse hacia adelante o hacia atrás en cualquier cantidad, mientras se mantenga la igualdad. Es decir, ambas series tienen los mismos términos al expandirse. Por ejemplo, considere que las siguientes tres representaciones de polinomios son idénticas a pesar de la diferencia en sus apariencias.

$$f(x) = \sum_{n=2}^{4} (n+1)x^2 = 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \tag{5-16}$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2} (i+3)x^{i+2} = 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \tag{5-17}$$

$$f(x) = \sum_{j=5}^{7} (j-2)x^{j-3} = 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \tag{5-18}$$

Cualquier par de éstas pueden obtenerse de la restante simplemente corriendo el índice. En este ejemplo, la ecuación 5-17 se obtiene de la ecuación 5-16 reemplazando n por $i + 2$, y la ecuación 5-18 se obtiene de la ecuación 5-16 reemplazando n por $j - 3$.

Digamos que nos gustaría volver a expresar la ecuación 5-16 de manera que la potencia de x cambie de n a $i + 2$. La forma más fácil de hacerlo es reemplazar cada aparición de n en la serie, incluyendo las que están debajo y encima del signo de sumatoria, por $i + 2$. Obtenemos

$$f(x) = \sum_{i+2=2}^{i+2=4} (i+2+1)x^{i+2} = \sum_{i=0}^{2} (i+3)x^{i+2}$$

que es la ecuación 5-17. Si lo deseamos, podemos volver a cambiar de i al índice n, de modo que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{2} (n+3)x^{n+2}$$

Por supuesto, podríamos evitar este paso reemplazando n al principio por $n + 2$ en vez de $i + 2$.

Una regla práctica sobre el uso del corrimiento de índice es: al aumentar en un número el índice en la expresión, disminuya el mismo número en los límites de la sumatoria, y viceversa (figura 5-5). En el ejemplo anterior, cuando aumentamos en 2 el índice en la expresión, también disminuimos en 2 ambos límites de la sumatoria. Cuando se trata de series infinitas, el límite superior de la sumatoria no se ve afectado por el proceso de corrimiento, y siempre es infinito, ya que al sumar o restar una cantidad finita a infinito sigue siendo infinito.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} nx^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^{2(n-1)} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-2)x^{2(n-2)} \\ &= \sum_{n=i}^{\infty} (n-i)x^{2(n-i)} \end{aligned}$$

FIGURA 5-5
El índice de la sumatoria n puede cambiarse en i reemplazando las apariciones de n por $n - i$.

EJEMPLO 5-1 Cómo cambiar el índice de sumatoria

Cambie el índice de sumatoria de la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{(x-x_0)^{n+3}}{2^{n+1}}$$

de modo que la potencia de $(x - x_0)$ sea n.

Solución Por inspección, vemos que podemos obtener el cambio necesario simplemente reemplazando todas las apariciones de n por $n - 3$, de modo que

$$f(x) = \sum_{n-3=1}^{\infty} (n-3)^2 \frac{(x-x_0)^{n-3+3}}{2^{n-3+1}} = \sum_{n=4}^{\infty} (n-3)^2 \frac{(x-x_0)^n}{2^{n-2}}$$

que es el resultado deseado (figura 5-6). La equivalencia de las dos series puede verificarse con facilidad escribiendo los términos individuales de ambas series y observando que los términos correspondientes son exactamente iguales.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{(x-x_0)^{n+3}}{2^{n+1}} = \frac{(x-x_0)^4}{2^2} + 2^2 \frac{(x-x_0)^5}{2^3} + 3^2 \frac{(x-x_0)^6}{2^4} + \cdots$$

y $$\sum_{n=4}^{\infty} (n-3)^2 \frac{(x-x_0)^n}{2^{n-2}} = \frac{(x-x_0)^4}{2^2} + 2^2 \frac{(x-x_0)^5}{2^3} + 3^2 \frac{(x-x_0)^6}{2^4} + \cdots$$

Entonces, las dos series de potencias son idénticas.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{(x-x_0)^{n+3}}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=4}^{\infty} (n-3)^2 \frac{(x-x_0)^n}{2^{n-2}} \end{aligned}$$

FIGURA 5-6
Cambio en 3 del índice de sumatoria en el ejemplo 5-1.

EJEMPLO 5-2 Cómo manipular la serie de potencias

Usando las propiedades de series equivalentes, determine los coeficientes C_n en la expansión de serie de potencias de la función exponencial e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

Solución Fácilmente podemos determinar el primer coeficiente C_0 evaluando ambos lados de la expresión en $x = 0$. Obtenemos

$$e^0 = C_0 + 0 + 0 + 0 + \cdots \rightarrow C_0 = 1$$

Ahora calculamos la primera derivada de ambos lados:

$$\frac{de^x}{dx} = 0 + C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \cdots + nC_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n-1}^{\infty} nC_n x^{n-1}$$

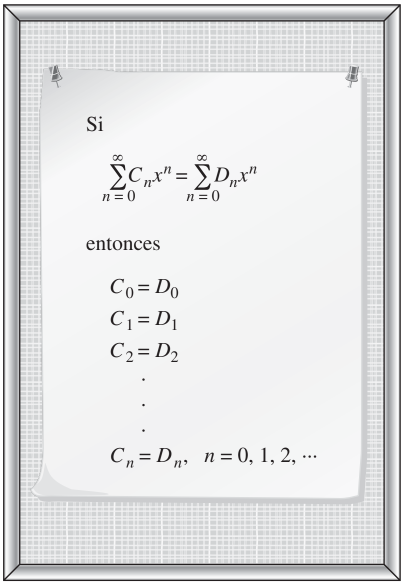


FIGURA 5-7
Si las series de potencias son equivalentes, sus coeficientes correspondientes deben ser iguales para cada potencia de x.

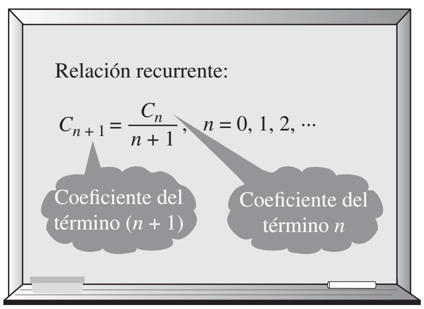


FIGURA 5-8
Una relación que conecta entre sí dos o más coeficientes de una serie se llama relación de recurrencia.

Dado que la primera derivada de e^x es igual a la misma e^x, sus expansiones de series también deben ser iguales, de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Para igualar las potencias de x en ambos lados, corremos en 1 el índice de la primera sumatoria, reemplazando todas las apariciones de n por $n + 1$. Obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)C_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Para que esta igualdad sea válida para todas las x, los coeficientes correspondientes de las dos series deben ser iguales (figura 5-7). Esta condición nos da la relación que buscamos:

$$(n + 1)C_{n+1} = C_n \quad \text{o} \quad C_{n+1} = \frac{C_n}{n + 1} \tag{5-19}$$

Una relación como la ecuación 5-19 que relaciona entre sí dos o más coeficientes de la serie de potencias se llama **relación de recurrencia** (figura 5-8). En este caso, la relación de recurrencia conecta un coeficiente con el que le precede. Así, como el primer coeficiente está disponible ($C_0 = 1$), el resto de los coeficientes (C_1, C_2, C_3, C_4,...) puede determinarse a partir de la relación de recurrencia como

$$n = 0: \quad C_1 = \frac{C_0}{1} = \frac{1}{1!}$$

$$n = 1: \quad C_2 = \frac{C_1}{2} = \frac{1}{2!}$$

$$n = 2: \quad C_3 = \frac{C_2}{3} = \frac{1}{3!}$$

$$n = 3: \quad C_4 = \frac{C_3}{4} = \frac{1}{4!}$$

Generalizando, obtenemos

$$C_n = \frac{C_0}{n!} = \frac{1}{n!}, \; n = 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{5-20}$$

Así determinamos todos los coeficientes; sustituyéndolos en la serie de potencias dada obtenemos

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

que es la expansión de la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ de la función exponencial.

Convergencia de series de potencias

Al tratar series, un asunto de suma importancia es la **convergencia**. Una representación en serie de una función es de poca utilidad si la serie no converge hacia la función. Por ejemplo, las representaciones en serie de las funciones elementales dadas en las ecuaciones 5-3 a 5-8 convergen hacia la función que representan, para todos los valores de x. Pero la expansión de serie de potencias de

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{5-21}$$

converge hacia $1/(1-x)$ sólo para los valores de $|x| < 1$. Para $x = 3$, por ejemplo, la serie diverge (se vuelve infinita) en vez de convergir hacia el valor correcto de -0.5. Por tanto, a menudo es necesario hablar de convergencia en un intervalo o en un rango de valores de x, en vez de todo el eje x (de $-\infty$ a $+\infty$).

La convergencia de las series de potencias puede definirse así:

Se dice que una serie de potencias de la forma $\Sigma_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ converge en un intervalo I si el límite $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} C_k x^k$ existe para todas las x en ese intervalo.

En otras palabras, una serie de potencias converge en una x dada si la suma de todos sus términos es un número finito para ese valor de x (figura 5-9).

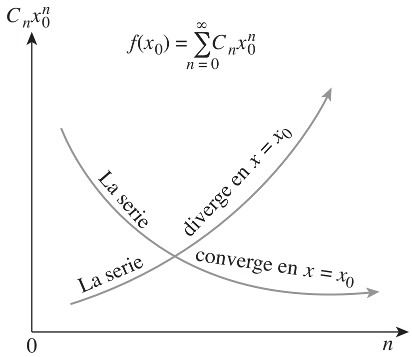


FIGURA 5-9
Se dice que una serie de potencias converge en un valor específico de x si el valor absoluto de los términos de la serie disminuye al aumentar el índice n.

La manera más sencilla de verificar la convergencia de una serie de potencias es aplicar la **prueba de razón**, que se basa en comparar los términos n y $(n+1)$ de la serie y calculando el límite cuando $n \to \infty$ (figura 5-10).

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| \tag{5-22}$$

Serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$
$$= C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n + C_{n+1} x^{n+1} + \cdots$$

Prueba de razón para convergencia:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| < 1$$

FIGURA 5-10
La prueba de razón para la convergencia se basa en comparar los valores absolutos de los términos n y $(n+1)$ cuando $n \to \infty$.

La serie de potencias converge para un valor de x dado si $L < 1$, y diverge si $L > 1$. La prueba de razón falla si $L = 1$. En otras palabras, la serie de potencias converge para un valor de x dado si el valor absoluto de los términos disminuye cuando n aumenta. Es decir, una serie de potencias convergirá para una x dada si su término n tiende a cero cuando $n \to \infty$.

EJEMPLO 5-3 Convergencia de series de potencias

Determine si la siguiente serie de potencias converge en $x = 0.4$ y $x = -2$:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n\to 0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots \tag{5-23}$$

Solución Aplicando la prueba de razón, tenemos

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+2)x^{n+1}}{(-1)^n (n+1) x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+2}{n+1} \right| = |x|$$

Así, tenemos $L = |x|$, y esta serie de potencias convergirá para $|x| < 1$. Por tanto, la serie de potencias dada convergirá para $x = 0.4$, pero divergirá para $x = -2$.

EJEMPLO 5-4 Intervalo de convergencia de series de potencias

Determine el intervalo de valores de x en el que converge la siguiente serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(x+3)^n$$

Solución Aplicando la prueba de razón, tenemos

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+3)(x+3)^{n+1}}{(n+2)(x+3)^n}\right| = |x+3|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+3}{n+2}\right| = |x+3|$$

Por tanto, tenemos $L = |x+3|$, y esta serie de potencias convergirá para $|x+3| < 1$ o $-4 < x < -2$. Divergirá para todos los demás valores de x, específicamente para $x < -4$ y $x = -4$, ya que el término n de la serie tiende a infinito en vez de a cero cuando $n \to \infty$.

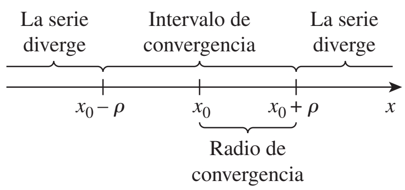


FIGURA 5-11
Representación geométrica del intervalo de convergencia y el radio de convergencia.

En el eje x, el intervalo abierto en el que la serie de potencias $\Sigma_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$ converge se llama **intervalo de convergencia**, y este intervalo puede determinarse por la prueba de razón. El intervalo de convergencia se describe a menudo en términos del **radio de convergencia** ρ, que puede visualizarse como la distancia entre el centro x_0 de la serie y el punto más cercano en el que la serie diverge (figura 5-11). El intervalo de convergencia de una serie de potencias de centro x_0 se describe usualmente en términos del radio de convergencia como $|x - x_0| < \rho$, como se muestra en la figura 5-11. Para $\rho = 0$, la serie de potencias diverge para todas las x salvo $x = x_0$. Para $\rho = \infty$, la serie converge para todas las x, y el intervalo de convergencia en este caso es todo el eje x. En general, ρ es un número finito, y la serie converge para $|x - x_0| < \rho$ y diverge cuando $|x - x_0| > \rho$. En los puntos finales $x = x_0 - \rho$ y $x = x_0 + \rho$, la serie puede convergir o divergir. La convergencia en estos puntos puede verificarse por separado sustituyendo estos valores en la serie y tomando el límite en cada caso.

El radio de convergencia de una serie de potencias de la forma $\Sigma_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$ puede determinarse directamente a partir de

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| \tag{5-24}$$

Pero esta relación no es aplicable a series que incluyan exponentes distintos de n, tales como $\Sigma C_n(x - x_0)^{2n}$ o $\Sigma C_n(x - x_0)^{n^3}$.

EJEMPLO 5-5 **Radio de convergencia de series de potencias**

Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n}$$

usando *a*) la prueba de razón y *b*) la ecuación 5-24.

Solución *a*) Aplicando la prueba de razón, tenemos

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\text{término } (n+1)}{\text{término } n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}/2^{n+1}}{(x-3)^n/2^n}\right| = |x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{|x+3|}{2}$$

La serie convergirá para $\dfrac{|x-3|}{2} < 1$ o $|x-3| < 2$. Por tanto, el intervalo de convergencia es $1 < x < 5$, y el radio de convergencia es $\rho = 2$, que es la mitad de la longitud del intervalo de convergencia.

b) Usando la ecuación 5-24, el radio de convergencia se determina como

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1/2^n}{1/2^{n+1}} = 2$$

El centro de la serie de potencias es $x_0 = 3$, y por tanto, el intervalo de convergencia es $x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$ o $1 < x < 5$ (figura 5-12).

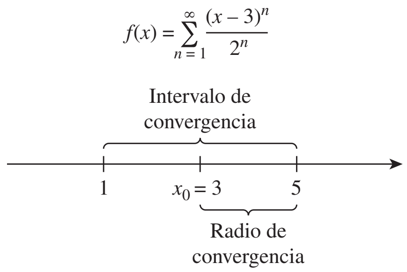


FIGURA 5-12
Intervalo de convergencia y radio de convergencia de la serie de potencias descrita en el ejemplo 5-5.

Si ambas series de potencias $f(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ y $g(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ convergen en el intervalo *I*, entonces su suma, su diferencia y su producto también convergirán en ese intervalo (figura 5-13).

1. $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(x - x_0)^n$ **(5-25)**

2. $f(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)(x - x_0)^n$ **(5-26)**

3. $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0)(x - x_0)^n$ **(5-27)**

Si dos series de potencias convergen en un intervalo, entonces
- su suma
- su diferencia y
- su producto

también convergen en ese intervalo.

FIGURA 5-13
Cómo extender la convergencia de series de potencias.

También para $g(x) \neq 0$, las dos series de potencias pueden dividirse para dar

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n \qquad \textbf{(5-28)}$$

donde los nuevos coeficientes C_n se determinan dividiendo formalmente las formas expandidas de las dos series, un proceso que es bastante laborioso y problemático. Asimismo, la serie resultante puede tener un radio de convergencia más pequeño que cualquiera de las dos series, ya que $f(x)/g(x)$ puede divergir en los ceros de $g(x)$.

Derivadas de series de potencias

La serie de potencias es esencialmente un polinomio con un número infinito de términos y, por tanto, es infinitamente diferenciable en su intervalo de convergencia. Las derivadas f', f'',..., $f^{(n)}$ pueden determinarse por diferenciación término por término. Las derivadas de $f(x)$ también son series de potencias y convergen en el intervalo de convergencia de $f(x)$. El primer término de una serie de potencias (correspondiente a $n = 0$) es la constante C_0, que se elimina durante la derivación. Por tanto, la sumatoria de la primera derivada comienza con $n = 1$ en vez de $n = 0$. El valor de n aumenta en 1 con cada diferenciación. Si

$$\begin{aligned} f(x) &= C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + C_3(x - x_0)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n \end{aligned}$$

entonces
$$\begin{aligned} f'(x) &= C_1 + 2C_2(x - x_0) + 3C_3(x - x_0)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n n(x - x_0)^{n-1} \end{aligned} \qquad \textbf{(5-29)}$$

$$f''(x) = 2C_2 + 2\cdot 3C_3(x - x_0) + \cdots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} C_n(n-1)n(x-x_0)^{n-2} \tag{5-30}$$

y así sucesivamente. En $x = x_0$, tenemos $f(x_0) = C_0$, $f'(x_0) = C_1$, $f''(x_0) = 2C_2$ y (en general) $f^{(n)}(x_0) = n!C_n$. Despejando C_n, tenemos

$$C_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{5-31}$$

Sustituyendo esto en la serie de potencias, obtenemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{5-32}$$

que es la fórmula para la expansión de serie de Taylor de la función $f(x)$.

Por tanto, si una función es infinitamente derivable en el punto x_0, su serie de Taylor existe en ese punto. También, si existe la expansión de serie de Taylor de una función $f(x)$ en un punto x_0 y su vecindad inmediata, entonces se dice que esa función es **analítica** en ese punto. Por tanto, *cualquier función que es analítica en* x_0 *puede expresarse como una serie de potencias de centro* x_0 *con un radio de convergencia diferente a cero.*

A la luz de esta explicación, podemos decir que, si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son analíticas en x_0, también lo son las funciones $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ e incluso $f(x)/g(x)$, salvo cuando $g(x_0) = 0$. Por ejemplo, las funciones e^x, sen x, cos x, senh x y cosh x son analíticas en todas partes. Asimismo, cualquier polinomio es analítico en cualquier punto. Las sumas, las diferencias, los productos y los cocientes (salvo en los ceros del denominador) de los polinomios también son analíticos en cualquier punto (figura 5-14).

Dado que:

$f(x) = 3x^2 + 5$
$g(x) = x - 1$

Entonces,

$f(x) + g(x) = 3x^2 + x + 4$
$f(x) - g(x) = 3x^2 - x + 6$
$f(x)\cdot g(x) = 3x^3 - 3x^2 + 5x - 5$
$f(x)/g(x) = 3x + 3 + \dfrac{8}{x-1},\ x \neq 1$

FIGURA 5-14
Todos los polinomios: sus sumas, sus diferencias, sus productos y sus cocientes (salvo en los ceros del denominador) son analíticos en todas partes.

Repaso de la sección

Los problemas marcados con una "C" son conceptuales para discusión

5-1C ¿Qué es una serie de potencias? ¿En qué se distingue de un polinomio?

5-2C ¿En qué aspectos son similares los índices de la sumatoria y la variable de una integral definida?

5-3C Considere una serie de potencias cuyo índice de sumatoria es n. ¿En qué condiciones puede extraerse de la sumatoria un factor que esté dentro de ésta?

5-4C ¿En qué condiciones son idénticas dos series de potencias?

5-5 Escriba los primeros tres términos de la siguiente serie conservando los demás términos bajo la sumatoria:

a) $2\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ *b*) $-3x\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{2n}$

(*Respuestas: a*) $2x + 4x^2 + 6x^3 + 2\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ y *b*) $-3C_1x^3 - 6C_2x^5 - 9C_3x^7 - 3x\sum_{n=4}^{\infty} nC_n x^{2n}$.)

5-6 Cambie el índice de las siguientes sumatorias de manera que la potencia de x en cada una de ellas sea n:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+2}}{n!}$ *b*) $\sum_{n=4}^{\infty} nC_n x^{n-3}$

(*Respuestas: a*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!}$ *b*) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+3)C_{n+3}x^n$.)

5-7 Pruebe que la siguiente igualdad es correcta:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(3n+2)x^n = 0$$

5-8 Determine el intervalo de convergencia y el radio de convergencia de la siguiente serie de potencias:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ *b*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}x^{n-1}$

(*Respuestas: a*) El intervalo de convergencia es $[-1,1)$. *b*) El intervalo de convergencia es $[-2,2)$.)

5-2 ▪ INTRODUCCIÓN A LAS SOLUCIONES POR SERIES DE POTENCIAS

El método de solución por serie de potencias se basa en suponer que una ecuación diferencial dada tiene una solución por serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad \text{o} \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n,$$

sustituir esta supuesta solución en la ecuación diferencial dada, realizar las derivaciones indicadas y, finalmente, determinar los coeficientes desconocidos, C_n. Comprobaremos el método con algunos ejemplos sencillos para familiarizarnos con el método, entenderlo y apreciarlo mejor, antes de introducir la teoría relacionada con dicho método. Haremos esto primero con ecuaciones que tienen coeficientes constantes, y luego con ecuaciones con coeficientes variables.

EJEMPLO 5-6 Método de solución por serie de potencias

Resuelva el siguiente problema de valor inicial suponiendo una solución por serie de potencias:

$$y' - y = 0 \qquad y(0) = 1$$

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden con coeficientes constantes, y su solución puede determinarse fácilmente mediante separación de variables o usando el procedimiento de resolución para ecuaciones lineales como $y = e^x$. De momento ignoraremos esta solución (incluso pasaremos por alto la existencia de la función exponencial e^x) y trataremos de resolver esta ecuación suponiendo una solución de serie de potencias de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Diferenciando término por término, tenemos

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Luego igualamos las potencias de x en ambas sumatorias; desplazamos en 1 el índice de la primera sumatoria y reemplazamos n por $n - 1$. Esto nos da

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)C_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

o

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)C_{n+1} - C_n] x^n = 0$$

Esta ecuación quedará satisfecha para todas las x si y solo si, el coeficiente de cada potencia de x es cero (figura 5-15). Esta condición nos da un número infinito de ecuaciones para la determinación de los coeficientes de expansión C_n: $(n + 1)C_{n+1} - C_n = 0$ o

$$C_{n+1} = \frac{C_n}{(n+1)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{5-33}$$

En este caso, la ecuación 5-33 es la relación de recurrencia, y relaciona cualquier coeficiente con el que le precede. Entonces, si el primer coeficiente C_0 está disponible, los demás coeficientes (C_1, C_2, C_3, C_4,...) pueden determinarse por la relación de recurrencia, ecuación 5-33:

$$n = 0: \qquad C_1 = \frac{C_0}{1} = \frac{C_0}{1!}$$

$$n = 1: \qquad C_2 = \frac{C_1}{2} = \frac{C_0}{2!}$$

$$n = 2: \qquad C_3 = \frac{C_2}{3} = \frac{C_0}{3!}$$

$$n = 3: \qquad C_4 = \frac{C_3}{4} = \frac{C_0}{4!}$$

Generalizando, obtenemos

$$C_n = \frac{C_0}{n!}, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

En esta forma determinamos todos los coeficientes en las soluciones supuestas de serie de potencias, salvo C_0. Sustituyendo estos coeficientes en la solución y sacando C_0 como factor común, obtenemos

$$Y = C_0\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right] = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aplicando la condición inicial $y(0) = 1$ obtenemos $C_0 = 1$, ya que todos los términos de la serie (excepto el primero) desaparecen en $x = 0$. Sustituyendo, obtenemos la solución de la serie como

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

ya que la serie en la relación anterior es exactamente la expansión de serie de Taylor de la función exponencial e^x. Entonces, obtuvimos el mismo resultado por el método de solución de serie de potencias.

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n = 0$$

Entonces,

$$D_0 = 0$$
$$D_1 = 0$$
$$\vdots$$
$$D_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

FIGURA 5-15
Una serie de potencias será igual a cero para todas las x si y solo si, el coeficiente de cada potencia de x es cero.

Por supuesto, aquí el procedimiento puede ser más complejo que otros métodos pero nuestro propósito es comprobar el nuevo método y crear la confianza de que realmente funciona antes de aplicarlo a problemas que no pueden resolverse por ningún otro método analítico.

EJEMPLO 5-7 Método de solución por serie de potencias

Resuelva la siguiente ecuación diferencial suponiendo una solución de serie de potencias: $y'' + y = 0$.

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, y su solución general se determinó en el capítulo 3 como

$$y = C_0 \operatorname{sen} x + C_1 \cos x$$

Ahora ignoraremos esta solución (incluso pasaremos por alto la existencia de las funciones seno y coseno) y trataremos de resolver esta ecuación suponiendo una solución de serie de potencias de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Diferenciando dos veces término por término (figura 5-16), tenemos

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Para igualar las potencias de x en ambas sumatorias, corremos en 2 el índice de la primera sumatoria reemplazando n por $n - 2$. Esto da

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)C_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

o

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)C_{n+2} + C_n]x^n = 0$$

Esta ecuación la satisfarán todas las x si y sólo si el coeficiente de cada potencia de x es cero. Esta condición nos da un número infinito de ecuaciones para la determinación de los coeficientes de expansión C_n: $(n + 2)(n + 1)C_{n+2} + C_n = 0$ o

$$C_{n+2} = \frac{C_n}{(n+2)(n+1)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(5-34)}$$

En este caso, la ecuación 5-34 es la relación de recurrencia, y relaciona cualquier coeficiente con el segundo anterior. Entonces, si los primeros dos coeficientes C_0 y C_1 están disponibles, los demás (C_2, C_3, C_4, C_5,...) pueden determinarse por la anterior relación de recurrencia.

Si

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$$

Entonces

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1}$$

$$= 0 + C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}$$

FIGURA 5-16
El límite inferior del índice de una serie de potencias puede subir durante la diferenciación, ya que la derivada de los términos constantes es cero.

Cuando n es par ($n = 2k = 2, 4, 6,...$), la relación de recurrencia da

$$C_2 = -\frac{C_0}{2 \cdot 1} = -\frac{C_0}{2!}$$

$$C_4 = -\frac{C_2}{4 \cdot 3} = \frac{C_0}{4!}$$

$$C_6 = -\frac{C_4}{6 \cdot 5} = -\frac{C_0}{6!}$$

Generalizando, obtenemos

$$C_{n,\text{par}} = C_{2k} = (-1)^k \frac{C_0}{(2k)!}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Cuando n es impar ($n = 2k + 1 = 3, 5, 7,...$), la relación de recurrencia da

$$C_3 = -\frac{C_1}{3 \cdot 2} = -\frac{C_1}{3!}$$

$$C_5 = -\frac{C_3}{5 \cdot 4} = \frac{C_1}{5!}$$

$$C_7 = -\frac{C_5}{7 \cdot 6} = -\frac{C_1}{7!}$$

Generalizando, tenemos

$$C_{n,\text{impar}} = C_{2k+1} = (-1)^k \frac{C_1}{(2k + 1)!}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Así determinamos todos los coeficientes en la solución supuesta de serie de potencias, salvo C_0 y C_1. Al sustituir estos coeficientes en la solución y determinar C_0 y C_1 como factores comunes, obtenemos (figura 5-17):

$$\begin{aligned} y = {} & C_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right] \\ & + C_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} + \cdots\right] \\ = {} & C_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} \\ = {} & C_0 \cos x + C_1 \operatorname{sen} x \end{aligned} \tag{5-35}$$

ya que las dos series en la ecuación 5-35 son exactamente las expansiones de serie de Taylor de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, respectivamente (recuerde que $0! = 1$, de modo que no hay división entre cero con el término $n = 0$ en la expansión de serie del coseno). Entonces, obtuvimos el mismo resultado con el método de solución por serie de potencias. Observe que los coeficientes constantes C_0 y C_1 son completamente arbitrarios y se determinan por las condiciones iniciales $y(0)$ y $y'(0)$. Esto no sorprende ya que la solución general de una ecuación diferencial lineal de segundo orden incluye dos constantes arbitrarias.

Todas las potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + \cdots$$

Solo potencias pares:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} x^{2n} = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + \cdots$$

Solo potencias impares:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} x^{2n+1} = C_1 x + C_3 x^3 + \cdots$$

FIGURA 5-17

Todas las potencias pares de x pueden representarse por x^{2n}, y es posible representar todas las potencias de x mediante x^{2n-1}, donde $n = 0, 1, 2,...$

También vale la pena señalar que muchas propiedades de las funciones $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ pueden deducir sus representaciones en series de potencias. Vemos inmediatamente que $\cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$. También podemos comprobar fácilmente, usando la diferenciación término por término, que $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, y que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

De ordinario, las funciones $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ se definen por referencia a un triángulo rectángulo en trigonometría. Este ejemplo comprueba que la solución por serie de potencias de ciertas ecuaciones diferenciales también puede usarse para definir funciones básicas. Por ejemplo, podemos definir $\cos x$ como la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$y'' + y = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

y $\operatorname{sen} x$ como la solución del problema de valor inicial

$$y'' + y = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

De hecho, muchas funciones bien conocidas, como las *funciones de Bessel* y los *polinomios de Legendre*, se definen de esta manera.

EJEMPLO 5-8 Método de solución por serie de potencias

Resuelva la siguiente ecuación diferencial suponiendo una solución de serie de potencias: $(x - 1)y' + 2y = 0$.

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden con coeficientes variables, y su solución puede determinarse fácilmente separando las variables o por el procedimiento de solución para ecuaciones lineales, como

$$y = \frac{C_0}{(x-1)^2}$$

De momento ignoraremos la existencia de esta solución, y trataremos de resolver la ecuación suponiendo una solución de serie de potencias de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Diferenciando término por término, tenemos

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos

$$(x-1)\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

o

$$\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Para igualar las potencias de x en todas las sumatorias, corremos en 1 el índice de la sumatoria de enmedio, reemplazando n por $n - 1$. También reemplazamos $n = 0$ por $n = 1$ en la primera sumatoria, sin efecto en la suma, ya que esto equivale a agregar un cero a la serie. Este procedimiento nos da

$$\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)C_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

o

$$\sum_{n=0}^{\infty}[nC_n - (n+1)C_{n+1} + 2C_n]x^n = 0$$

Esta ecuación se satisfará para todas las x si y solo si el coeficiente de cada potencia de x es cero. Esta condición nos da un número infinito de ecuaciones para la determinación de los coeficientes de expansión C_n:

$$(n+2)C_n - (n+1)C_{n+1} = 0$$

o

$$C_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}C_n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{5-36}$$

La relación de recurrencia en este caso relaciona un coeficiente con el que le precede. Entonces, el primer coeficiente está disponible, y los demás coeficientes (C_1, C_2, C_3, C_4,...) pueden determinarse por la relación de recurrencia como

$$n = 0: \qquad C_1 = \frac{2}{1}C_0 = 2C_0$$

$$n = 1: \qquad C_2 = \frac{3}{2}C_1 = 3C_0$$

$$n = 2: \qquad C_3 = \frac{4}{3}C_2 = 4C_0$$

$$n = 3: \qquad C_4 = \frac{5}{4}C_3 = 5C_0$$

La pauta ahora está clara. Generalizando, tenemos

$$C_n = (n+1)C_0, \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Así determinamos todos los coeficientes en la solución supuesta por serie de potencias, salvo C_0. Sustituyendo estos coeficientes en la solución y sacando como factor común C_0, obtenemos

$$y = C_0[1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots]$$

$$= C_0\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{C_0}{(x-1)^2}$$

La serie de esta relación es exactamente la expansión de serie binomial de $1/(x-1)^2$. Entonces, obtenemos el mismo resultado con el método de solución por serie de potencias.

Sin embargo, esta solución es engañosa, ya que aquí la solución por serie de potencias divergirá para $|x| > 1$ en vez de convergir hacia el valor que se obtendría de $1/(x-1)^2$. Entonces, la solución por serie de potencias es válida aquí para $|x| < 1$ (figura 5-18). Con todo, el procedimiento de solución no nos da advertencia alguna en este sentido. Esto muestra que hay más respecto al método de serie de potencias que lo que aquí se implica, y necesitamos entender la teoría subyacente si queremos usar este método con eficacia y confianza.

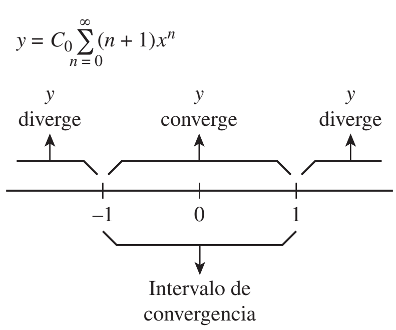


FIGURA 5-18
Las soluciones por serie de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables generalmente no convergen para todos los valores de x (ejemplo 5-8).

En las siguientes secciones explicaremos las bases fundamentales del método de serie de potencias y lo aplicaremos a ecuaciones diferenciales lineales para las que no hay otros métodos alternativos de solución viables. Algunas de estas ecuaciones se encuentran frecuentemente en la práctica, y se conocen por sus nombres. Éstas son las más conocidas:

Ecuación de Bessel: $$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{5-37}$$

En la sección 5-7 se da una aplicación de esta ecuación a la transferencia de calor.

Ecuación de Legendre: $$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \tag{5-38}$$

Esta ecuación resulta al resolver para la función potencial gravitacional en coordenadas esféricas.

Ecuación de Euler: $$x^2y'' + axy' + by = 0 \tag{5-39}$$

Esta ecuación, también conocida como ecuación de Cauchy-Euler, es el caso más simple de una ecuación de segundo orden con puntos singulares regulares. Por tanto, sirve como buena introducción al caso general. Aparece en aplicaciones que incluyen funciones de potencial gravitacional y electrostático en coordenadas esféricas.

Ecuación de Airy: $$y'' - xy = 0 \tag{5-40}$$

Esta ecuación se aplica en óptica.

Ecuación de Hermite: $$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0 \tag{5-41}$$

Esta ecuación aparece en la solución de la ecuación de onda en mecánica cuántica.

Ecuación de Chebyshev: $$(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda^2 y = 0 \tag{5-42}$$

Esta ecuación aparece en aplicaciones de ajuste de curvas en polinomios.

Ecuación de Laguerre: $$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0 \tag{5-43}$$

Esta ecuación tiene soluciones no singulares si λ es un entero no negativo.

Ecuación hipergeométrica de Gauss:

$$x(1 - x)y'' + [c - (a + b + 1)x]y' - aby = 0 \tag{5-44}$$

Toda ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden con tres puntos regulares singulares puede transformarse en esta ecuación mediante un cambio de variables. Vea la sección 5-3.

Estudiaremos brevemente algunas de estas ecuaciones, y algunas otras en detalle.

Repaso de la sección

5-9C ¿El método de solución por serie se limita sólo a ecuaciones diferenciales con coeficientes variables, o también es aplicable a ecuaciones con coeficientes constantes?

5-10 Resuelva la siguiente ecuación diferencial usando dos métodos diferentes, siendo uno de ellos el método que utiliza series de potencias. Compruebe que las dos soluciones son idénticas: $y'' + 4y = 0$.

(*Respuesta:* $y(x) = C_0\left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + \cdots\right) + C_1\left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{4}{315}x^7 + \cdots\right)$.)

5-3 ▪ PUNTOS ORDINARIOS CONTRA SINGULARES

En los capítulos anteriores, al resolver ecuaciones lineales con coeficientes *constantes* de la forma

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{5-45}$$

simplemente hablamos de la *solución* de la ecuación, sin especificar ningún punto o intervalo para ésta. Esto se debe a que un coeficiente constante (como $a = 2$) representa una línea continua paralela al eje x, que se extiende de $-\infty$ a $+\infty$; ningún valor de x puede hacer que este coeficiente sea cero. En consecuencia, las soluciones obtenidas son válidas para todos los valores de x. En el caso trivial de que un coeficiente constante sea cero (como $b = 0$), el término con ese coeficiente simplemente desaparece de la ecuación, y tenemos una ecuación más simple con coeficientes continuos. Sin embargo, al resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables, como

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{5-46}$$

tendremos que pensar en *soluciones cercanas a un punto* (o, alternativamente, soluciones *alrededor* de un punto o una solución *en la cercanía* o *vecindad* de un punto). Esto se referirá a una solución en un intervalo que contiene ese punto (figura 5-19). El intervalo en el que la solución es aplicable rara vez será todo el eje x. En consecuencia, una ecuación distintos con coeficientes variables puede tener diferentes soluciones alrededor de diferentes puntos, o puede incluso no tener soluciones alrededor de algunos puntos. Por tanto, necesitamos especificar el intervalo o el punto alrededor del cual queremos resolver una ecuación con coeficientes variables.

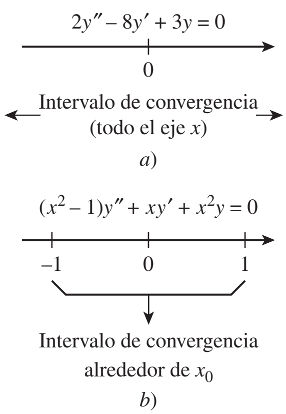


FIGURA 5-19
Las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes convergen para todas las x, pero las soluciones de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables (en general) sólo convergen en un intervalo.

En las siguientes secciones buscaremos soluciones a las ecuaciones diferenciales con coeficientes variables alrededor de un punto x_0 en términos de $(x - x_0)^n$. Como usted verá, la solución de la ecuación alrededor de un punto no sólo depende del punto mismo, sino también de la *naturaleza* o *clase* del punto con respecto a la ecuación diferencial. El método de resolución y la forma de la solución serán diferentes para distintas clases de puntos. Por tanto, necesitamos identificar la clase de punto antes de intentar resolver una ecuación dada alrededor de ese punto.

Una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables dada puede expresarse en la *forma estándar* (coeficiente principal = 1) dividiendo cada término entre $a(x)$, que es el coeficiente de y''. Después de cancelar cualquier factor común, obtenemos

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{5-47}$$

donde $P(x) = b(x)/a(x)$ y $Q(x) = c(x)/a(x)$ en la forma más simplificada. En esta sección y en las siguientes limitaremos la explicación a ecuaciones diferenciales de segundo orden, por sencillez. Sin embargo, cualquier definición y teorema puede extenderse fácilmente a ecuaciones de orden superior. Un punto dado x_0 puede ser ya sea ordinario o singular, dependiendo del comportamiento de los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ de la ecuación diferencial en ese punto (figura 5-20).

Un punto x_0 se llama **punto ordinario** *de una ecuación diferencial si tanto la función $P(x)$ como la función $Q(x)$ son analíticas en ese punto. Un punto x_0 se llama* **punto singular** *de la ecuación diferencial si una de las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ no es analítica en ese punto, o ninguna de las dos lo es.*

Un punto singular de una ecuación diferencial se reclasifica así: un punto singular x_0 se llama **punto singular regular** *de la ecuación diferencial si ambas funciones*

$$(x - x_0)P(x) \quad \text{y} \quad (x - x_0)^2Q(x) \tag{5-48}$$

son analíticas en ese punto. De no ser así, el punto x_0 se llama **punto singular irregular** *de la ecuación diferencial.*

En otras palabras, un punto singular x_0 es singular regular si existen los siguientes límites (figura 5-21):

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)P(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2Q(x) \tag{5-49}$$

Entonces, la clasificación correcta de un punto dado de una ecuación diferencial puede ser bastante laboriosa y problemática, ya que requiere establecer si dos o más funciones son analíticas, lo cual a su vez exige determinar si la serie de Taylor de estas funciones converge en el punto específico. Definitivamente necesitamos auxilio, y aquí está.

La mayoría de las funciones $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ que se encuentran en la práctica son polinomios, y todos los polinomios (incluyendo sus sumas, diferencias y productos) son funciones analíticas. Entonces, las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son (cuando mucho) los cocientes de dos polinomios, lo cual sigue siendo analítico donde sea, salvo en los ceros de los denominadores. Los puntos ordinarios y singulares en este caso pueden definirse así:

Cuando $P(x)$ y $Q(x)$ son cocientes de polinomios, los puntos en los que el denominador de $P(x)$ o $Q(x)$ de una ecuación diferencial desaparece (se vuelve cero) son los puntos singulares, y todos los demás puntos son puntos ordinarios de la ecuación diferencial.

Para el caso especial en que $P(x)$ y $Q(x)$ de una ecuación diferencial sea un polinomio, cualquier punto x es uno ordinario (figura 5-22).

Probablemente usted se pregunte por qué distinguimos un punto regular de uno irregular. Después de todo, las funciones $P(x)$ o $Q(x)$ son infinitas en un punto singular sin importar de qué clase sea dicho punto. La razón es que una singularidad regular es relativamente débil y suave, y podemos manejarla con confianza, mientras que una singularidad irregular es más bien severa y difícil de manejar. La definición de punto singular regular implica que en el punto x_0 la singularidad en $P(x)$ no es más severa que $(x - x_0)^{-1}$, y la singularidad en $Q(x)$ no es más severa que $(x - x_0)^{-2}$.

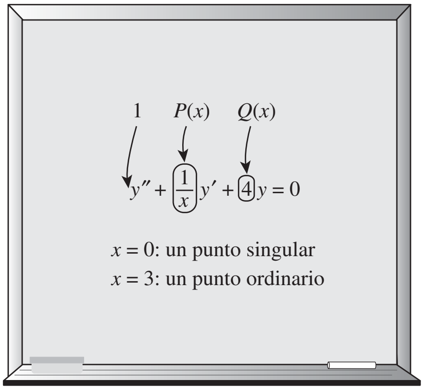


FIGURA 5-20
Un punto es ordinario de una ecuación diferencial si tanto $P(x)$ como $Q(x)$ son analíticos en ese punto; de no ser así, es singular.

a) $x = 0$ es un punto singular regular de

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 0$$

ya que

$$xP(x) = 1, \quad x^2Q(x) = 3$$

b) $x = 0$ es un punto singular irregular de

$$y'' + \frac{1}{x^2}y' + \frac{3}{x^2}y = 0$$

ya que

$$xP(x) = \frac{1}{x} \quad x^2Q(x) = 3$$

FIGURA 5-21
El punto $x = 0$ es singular regular de la ecuación diferencial *a*), pero es singular irregular de la ecuación *b*).

Dado

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

si

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$
$$Q(x) = b_0 + bx_1 + b_2x^2 + \cdots$$

entonces cualquier punto es ordinario de esta ecuación diferencial.

FIGURA 5-22
Cualquier punto es ordinario de una ecuación diferencial si las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

EJEMPLO 5-9 Puntos ordinarios

Determine los puntos ordinarios y singulares de la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' - (x - 2)y' + (3x^2 - 2x + 5)y = 0$$

Solución La ecuación diferencial ya está en la forma estándar (el coeficiente de y'' es 1), y tenemos

$$P(x) = -(x - 2) \quad \text{y} \quad Q(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

Ambos son polinomios; por tanto, todos los puntos son ordinarios de la ecuación diferencial, ya que los polinomios son analíticos en todas partes.

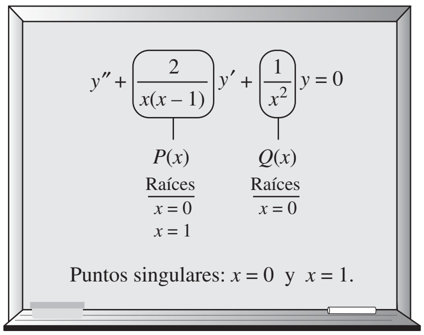


FIGURA 5-23
Cuando $P(x)$ y $Q(x)$ son razones de polinomios, los únicos puntos singulares de una ecuación diferencial son los ceros de los denominadores de $P(x)$ y $Q(x)$.

EJEMPLO 5-10 Puntos singulares regulares e irregulares

Determine los puntos ordinarios y singulares de la siguiente ecuación diferencial:

$$xy'' + \frac{2}{x - 1}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

Solución La ecuación diferencial puede expresarse en la forma estándar dividiendo cada término entre x (el coeficiente de y''):

$$y'' + \frac{2}{x(x - 1)}y' + \frac{1}{x^3}y = 0$$

Entonces tenemos

$$P(x) = \frac{2}{x(x - 1)} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{1}{x^3}$$

ambos se expresan como razones de polinomios. Por inspección, vemos que $P(x)$ se vuelve infinito en $x = 0$ y $x = 1$, y $Q(x)$ se vuelve infinito en $x = 0$. Por tanto, $x = 0$ y $x = 1$ son los puntos singulares de esta ecuación diferencial. Todos los demás son puntos ordinarios (figura 5-23).

Además, el punto $x = 1$ es singular regular, ya que

$$(x - 1)P(x) = \frac{2}{x} \qquad \text{(analítica en } x = 1\text{)}$$

$$(x - 1)^2Q(x) = \frac{(x - 1)^2}{x^3} \qquad \text{(analítica en } x = 1\text{)}$$

Pero el punto $x = 0$ es singular irregular, ya que

$$xP(x) = \frac{2}{x - 1} \qquad \text{(analítica en } x = 0\text{)}$$

$$x^2Q(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{(no analítica en } x = 0\text{)}$$

La determinación de una solución por serie de una ecuación diferencial no está completa sin establecer el intervalo en el que la serie converge. Una manera de determinar el radio de convergencia de la serie infinita en la solución es aplicar una prueba de convergencia directamente a la serie. Una forma más práctica es determinar el radio de convergencia de las funciones $P(x)$ y $Q(x)$, y en seguida usar el siguiente teorema:

TEOREMA 5-1 Radio de convergencia de soluciones por serie

Si x_0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

entonces la serie infinita en la solución general de esta ecuación diferencial tiene un radio de convergencia que es al menos tan grande como el más pequeño de los radios de convergencia de las funciones $P(x)$ y $Q(x)$.

Los radios de convergencia de las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ (en general) pueden determinarse aplicando la prueba de convergencia. Pero cuando tanto los numeradores como los denominadores de $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios (si se expresan como relaciones), los puntos singulares de ambas funciones (incluyendo las complejas) pueden establecerse con facilidad. Entonces, el radio mínimo de convergencia de la solución por serie se convierte en la distancia entre el punto específico y el punto singular más cercano de $P(x)$ o $Q(x)$. Al determinar esta distancia, necesitamos considerar no sólo los puntos singulares reales, sino también los complejos. Esto se ilustra con los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 5-11 Radio de convergencia: puntos singulares reales

Determine el radio de convergencia de la solución por serie de la siguiente ecuación diferencial alrededor de $x = 5$:

$$(x^2 - 9)y'' - xy' + \frac{1}{x}y = 0$$

Solución La ecuación diferencial puede expresarse en la forma estándar $x^2 - 9$ dividiendo cada término:

$$y'' - \frac{x}{x^2 - 9}y' + \frac{1}{x(x^2 - 9)}y = 0$$

Entonces, tenemos

$$P(x) = -\frac{x}{x^2 - 9} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{1}{x(x^2 - 9)}$$

las cuales se expresan como razpnes de polinomios. Por inspección, vemos que $P(x)$ se vuelve infinito en $x = 3$ y $x = -3$, y $Q(x)$ se vuelve infinito en $x = 0$, $x = 3$ y $x = -3$. Por tanto, $x = 0$, $x = 3$ y $x = -3$ son los puntos singulares de la ecuación diferencial. (No hay puntos singulares complejos.) Todos los demás son puntos ordinarios.

La distancia entre el punto específico ($x = 5$) y el punto singular más cercano ($x = 3$) es 2. Por tanto, esta ecuación diferencial tiene una solución por serie alrededor del punto $x = 5$ con un radio de convergencia de $\rho = 2$, como se muestra en la figura 5-24.

Observe que la solución por serie de la misma ecuación diferencial de distintos puntos tendrá radios de convergencia diferentes. Por ejemplo, $\rho = 7$ para $x_0 = -10$; $\rho = 1$ para $x_0 = 2$, y $\rho = 0$ para $x_0 = 3$.

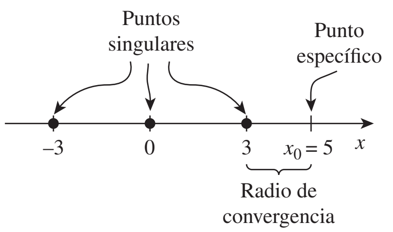


FIGURA 5-24
Radio de convergencia de la solución por serie de la ecuación diferencial en el ejemplo 5-11 alrededor del punto $x_0 = 5$.

EJEMPLO 5-12 Radio de convergencia: puntos singulares complejos

Determine el radio de convergencia de la solución por serie de la siguiente ecuación diferencial alrededor de $x = 0$:

$$(x^2 - 4x + 8)y'' - 3x^2y' + 4y = 0$$

Solución La ecuación diferencial puede expresarse en la forma estándar dividiendo cada término entre $x^2 - 4x + 8$ (el coeficiente de y''):

$$y'' - \frac{3x^2}{x^2 - 4x + 8}y' + \frac{4}{x^2 - 4x + 8}y = 0$$

Entonces tenemos

$$P(x) = -\frac{3x^2}{x^2 - 4x + 8} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{4}{x^2 - 4x + 8}$$

ambos se expresan como razones de polinomios. Determinando las raíces del denominador, vemos que tanto $P(x)$ como $Q(x)$ se vuelven cero en $x = 2 + 2i$ y $x = 2 - 2i$ (figura 5-25). Por tanto, la ecuación diferencial tiene dos puntos singulares, y ambos son complejos. Todos los demás puntos (reales o complejos) son ordinarios.

La distancia entre el punto específico ($x_0 = 0$) y cualquiera de los puntos singulares es la longitud de la línea que conecta los dos puntos, y se determina fácilmente en la figura 5-25 como $\sqrt{8}$. Por tanto, esta ecuación diferencial tiene una solución por serie alrededor del punto $x_0 = 0$ con un radio de convergencia de $\rho = \sqrt{8}$.

Observe nuevamente que la solución por serie de la misma ecuación diferencial tiene diferentes radios de convergencia alrededor de puntos diferentes. Por ejemplo, $\rho = 2$ para $x_0 = 2$; $\rho = \sqrt{20}$ para $x_0 = -2$, y $\rho = \sqrt{13}$ para $x_0 = 5$.

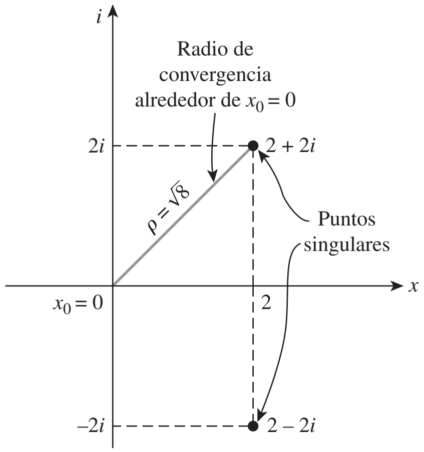


FIGURA 5-25
Radio de convergencia de la serie de la ecuación diferencial en el ejemplo 5-12 alrededor del punto $x_0 = 0$.

EJEMPLO 5-13 Radio de convergencia: puntos singulares complejos

Determine el radio de convergencia de la solución por serie de la ecuación diferencial

$$(x^2 + 4)y'' - 3y' + 4(x + 4)y = 0$$

para las soluciones por serie supuestas de *a*) $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ y *b*) $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - 3)^n$

Solución *a*) La ecuación diferencial puede expresarse en la forma estándar dividiendo cada término entre $x^2 + 4$ (el coeficiente de y''), obteniendo

$$y'' - \frac{3}{x^2 + 4}y' + \frac{4(x + 4)}{x^2 + 4}y = 0$$

Entonces tenemos

$$P(x) = -\frac{3}{x^2 + 4} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{4(x + 4)}{x^2 + 4}$$

ambos se expresan como razones de polinomios. Determinando las raíces del denominador, vemos que tanto $P(x)$ como $Q(x)$ se vuelven infinito en $x = 2i$ y $x = -2i$ (figura 5-26). Por tanto, esta ecuación diferencial tiene dos puntos singulares, y ambos son complejos. Todos los demás puntos (reales o complejos) son ordinarios.

La solución por serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ tiene el punto $x_0 = 0$ como centro, y el radio de convergencia es la distancia entre este punto y cualquiera de los puntos singulares. Se determina fácilmente en la figura 5-26 como 2. Por tanto, la solución por serie especificada convergirá para $|x| < 2$.

b) La solución por serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - 3)^n$ tiene el punto $x_0 = 3$ como centro, y el radio de convergencia esta vez es $\sqrt{13}$. Por tanto, la solución por serie en este caso convergirá para $|x - 3| < \sqrt{13}$.

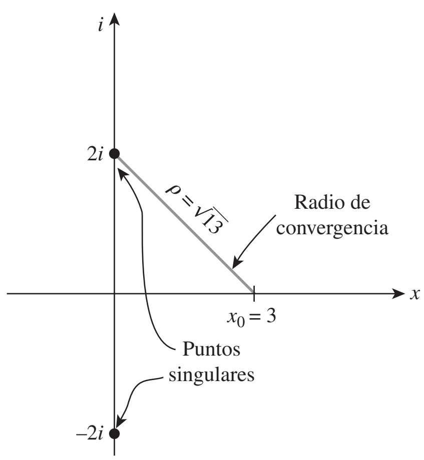


FIGURA 5-26
Radio de convergencia de la solución por serie de la ecuación diferencial del ejemplo 5-13 alrededor del punto $x_0 = 3$.

En las siguientes secciones explicaremos procedimientos de resolución alrededor de puntos ordinarios y puntos singulares regulares de ecuaciones diferenciales dadas. La clasificación correcta del punto x_0 alrededor del cual estamos buscando una solución es extremadamente importante en la solución. Como usted verá, se garantiza que una ecuación diferencial de segundo orden tiene dos soluciones por serie linealmente independientes alrededor de un punto *ordinario*. También podemos resolver una ecuación diferencial alrededor de un punto *singular regular* suponiendo una forma modificada de la solución por serie de potencias. Pero el procedimiento de resolución alrededor de un punto *singular irregular* es bastante complicado y está más allá del alcance de este texto.

También nos concentraremos en ecuaciones homogéneas, ya que la mayoría de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables que se encuentran en la práctica son homogéneas. Pero el procedimiento que se describe es igualmente aplicable a las ecuaciones no homogéneas correspondientes. La solución (en este caso) puede determinarse ya sea aplicando el método directamente a la ecuación no homogénea o determinando por separado la solución particular correspondiente a los términos no homogéneos y luego sumándola a la solución de la parte homogénea de la ecuación diferencial.

Repaso de la sección

5-11 Al resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables, ¿por qué buscamos soluciones alrededor de un punto específico en vez de buscar una solución que sea aplicable en todas partes?

5-12 ¿En qué se distinguen los puntos ordinarios de los puntos singulares de una ecuación diferencial lineal de segundo orden?

5-13 Identifique los puntos ordinarios y singulares de las siguientes ecuaciones diferenciales; también determine si los puntos singulares son regulares o irregulares:

a) $y'' - 4y' + 5y = 0$ *b*) $xy'' + \dfrac{x}{x+1}y' - \dfrac{1}{x^2}y = 0$

(*Respuestas: a*) todo punto en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es ordinario, y no hay ningún punto singular; *b*) $x = -1$ es un punto singular regular, mientras que $x = 0$ es uno singular irregular.)

5-14 Determine el radio de convergencia de la solución por serie de la siguiente ecuación diferencial alrededor del punto ordinario específico:

$$y'' + 3y' - 4y = 0, \qquad x_0 = 0$$

(*Respuesta:* el radio de convergencia de la solución por serie es infinito.)

5-4 ▪ SOLUCIONES POR SERIE DE POTENCIAS ALREDEDOR DE UN PUNTO ORDINARIO

Antes de tratar de resolver una ecuación diferencial en las cercanías de un punto específico por el método de serie infinita, necesitamos saber si existe una solución en la región y, en caso de existir, si es única. El siguiente teorema aborda estas necesidades.

TEOREMA 5-2 Soluciones por serie alrededor de puntos ordinarios

Si x_0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Ecuación diferencial:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Solución:

$$y = C_0 y_1(x) + C_1 y_2(x)$$

donde

- $y_1(x)$, $y_2(x)$ son series de potencias,
- C_0, C_1 son constantes arbitrarias.

FIGURA 5-27
Solución alrededor de un punto ordinario.

entonces esta ecuación diferencial tiene dos soluciones linealmente independientes, y_1 y y_2, cada una de la forma $\Sigma_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$. La solución general de esta ecuación diferencial es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$$

$$= C_0 y_1(x) + C_1 y_2(x) \qquad \textbf{(5-50)}$$

donde C_0 y C_1 son dos constantes arbitrarias que se determinan por las condiciones iniciales. Los demás coeficientes en la solución por serie se determinan sustituyendo la solución de la serie en la ecuación diferencial. Además, el radio de convergencia de la solución por serie es al menos tan grande como la distancia entre x_0 y el punto singular real o complejo más cercano (figura 5-27).

La prueba de este teorema puede encontrarse en textos más avanzados sobre ecuaciones diferenciales. Ahora ilustramos con ejemplos el procedimiento de resolución y el uso de este teorema.

EJEMPLO 5-14 Ecuación de Hermite

Una ecuación diferencial que se presenta en la mecánica cuántica, en el estudio de la ecuación de Schrödinger para un oscilador armónico, es la ecuación de Hermite, que es

$$\boxed{y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0} \qquad \textbf{(5-51)}$$

donde λ es una constante. Encuentre una solución por serie de potencias para esta ecuación en potencias de x (es decir, alrededor del punto $x_0 = 0$).

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables, y ya está en la forma estándar, ya que el coeficiente principal es 1. Por tanto, $P(x) = -2x$ y $Q(x) = 2\lambda$, los cuales son polinomios. Recordando que los polinomios son funciones analíticas en todo el eje x, cualquier punto es ordinario en esta ecuación diferencial, incluyendo el punto $x_0 = 0$. Entonces, por los teoremas 5-1 y 5-2, concluimos que esta ecuación diferencial tiene una solución por serie de potencias alrededor de cualquier punto, y el radio de convergencia de la solución por serie alrededor de cualquier punto es infinito (es decir, la solución converge para todos los valores de x).

Ahora suponemos una solución por serie de potencias de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Diferenciando dos veces y sustituyendo las derivadas en la ecuación diferencial, tenemos

$$\sum_{n-2}^{\infty} n(n-1)\, C_n x^{n-2} - 2x\sum_{n-1}^{\infty} nC_n x^{n-1} + 2\lambda\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Corriendo en 2 el índice de la primera sumatoria al reemplazar n por $n + 2$ y reacomodando el segundo término, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)C_{n+2}x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n + 2\lambda\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Ahora el término n de las tres series incluye la misma potencia de x. Pero todavía no podemos combinarlas bajo una sola sumatoria porque el índice de la segunda sumatoria comienza con $n = 1$ en vez de 0. Podemos arreglar este problema con facilidad al comenzar la segunda sumatoria con $n = 0$, porque el término correspondiente será cero debido al factor n en la sumatoria. Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)C_{n+2} - 2nC_n + 2\lambda C_n]x^n = 0$$

Todas las x satisfarán esta ecuación si y solo si, el coeficiente de cada potencia de x es cero. Esta condición nos da un número infinito de ecuaciones para la determinación de los coeficientes de expansión C_n.

$$(n+2)(n+1)C_{n+2} - 2nC_n + 2\lambda C_n = 0$$

o

$$C_{n+2} = \frac{2(\lambda - n)C_n}{(n+1)(n+2)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ésta es una relación de recurrencia, y relaciona cualquier coeficiente con el segundo antes de éste. De modo que si los primeros dos coeficientes C_0 y C_1 están disponibles, los demás coeficientes (C_2, C_3, C_4, C_5,...) pueden determinarse por la relación de recurrencia. Algunos de los primeros son:

$$\begin{aligned}
C_2 &= -\frac{2\lambda}{1\cdot 2}C_0 = -\frac{2\lambda}{2!}C_0\\
C_3 &= -\frac{2(\lambda-1)}{2\cdot 3}C_1 = -\frac{2(\lambda-1)}{3!}C_1\\
C_4 &= -\frac{2(\lambda-2)}{3\cdot 4}C_2 = \frac{2^2\lambda(\lambda-2)}{4!}C_0\\
C_5 &= -\frac{2(\lambda-3)}{4\cdot 5}C_3 = \frac{2^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}C_1\\
C_6 &= -\frac{2(\lambda-4)}{5\cdot 6}C_4 = -\frac{2^3\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)}{6!}C_0\\
C_7 &= -\frac{2(\lambda-5)}{6\cdot 7}C_5 = -\frac{2^3(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{7!}C_1
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos coeficientes en la solución y sacando como factores comunes C_0 y C_1, obtenemos

$$\begin{aligned}
y &= C_0\left[1 - \frac{2\lambda}{2!}x^2 + 2^2\lambda\frac{(\lambda-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)}{6!}x^6 + \cdots\right]\\
&\quad + C_1\left[x - \frac{2(\lambda-1)}{3!}x^3 + \frac{2(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^5 - \frac{2^3(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{7!}x^7 + \cdots\right]\\
&= C_0y_1(x) + C_1y_2(x)
\end{aligned}$$

Generalizando los coeficientes para los términos pares e impares, las dos soluciones independientes y_1 y y_2 también pueden expresarse en una forma más general como

$$\begin{aligned}
y &= C_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n+2)}{(2n)!}x^{2n}\right]\\
&\quad + C_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)\cdots(\lambda-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]
\end{aligned} \tag{5-52}$$

$\lambda = n$	C_0	C_1	$H_n(x)$
0	1	0	1
1	0	2	$2x$
2	–2	0	$4x^2 - 2$
3	0	–2	$8x^3 - 12x$

FIGURA 5-28
Determinación de polinomios de Hermite por la ecuación 5-52 asignando valores enteros positivos a λ y valores adecuados a C_0 y C_1 de modo que el coeficiente de x^n sea 2^n.

Los términos entre corchetes son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Hermite. Observe que esta solución es válida para cualquier valor de x, ya que la ecuación de Hermite no tiene puntos singulares.

Cuando λ es un entero no negativo, los términos en la primera o la segunda serie de la solución desaparecen para $n > \lambda$, dando un polinomio de grado n en lugar de esa serie infinita. Un múltiplo constante del polinomio resultante de grado n (que es una solución de la ecuación de Hermite) se conoce como **polinomio de Hermite**, y se simboliza por $H_n(x)$. El múltiplo constante se elige de tal manera que el coeficiente de x^n sea 2^n. En la figura 5-28 se dan los cuatro primeros polinomios de Hermite.

EJEMPLO 5-15 Ecuación de Airy

Una ecuación diferencial que se presenta en óptica en el estudio de la intensidad de la luz es la ecuación de Airy, que es $y'' - xy = 0$. Encuentre una solución de serie de potencias para esta ecuación en potencias de x (es decir, alrededor del punto $x_0 = 0$).

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables, y ya está en la forma estándar, ya que el coeficiente principal es 1. Entonces, $P(x) = 0$ y $Q(x) = -x$, los cuales son polinomios. Recuerde que los polinomios son funciones analíticas en todas las x, incluyendo el punto $x_0 = 0$. Entonces, por los teoremas 5-1 y 5-2, concluimos que el radio de convergencia de las soluciones por serie alrededor de cualquier punto es infinito (es decir, la solución converge para todos los valores de x).

Ahora suponemos una solución por serie de potencias de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Diferenciando dos veces y sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, C_n x^{n-2} - x\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

o

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, C_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = 0$$

Para igualar las potencias de x en las dos sumatorias, corremos tanto el índice de la primera sumatoria sustituyendo n por $n + 2$ como el índice de la segunda sumatoria en 1, reemplazando n con $n - 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, C_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nC_{n-1} x^n = 0$$

o

$$2(1)C_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)\, C_{n+2} - C_{n-1}]x^n = 0$$

Para que esta ecuación sea verdadera para cualquier valor de x, el coeficiente de cada potencia de x, incluyendo la potencia cero, debe ser cero. Este requisito da $C_2 = 0$, y la relación de recurrencia es $(n + 2)(n + 1)C_{n+2} - C_{n-1} = 0$ o

$$C_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} C_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{5-53}$$

La relación de recurrencia en este caso relaciona cualquier coeficiente al tercero anterior. Entonces, los coeficientes $C_3, C_6, C_9,\ldots$ se determinan en términos de C_0;

los coeficientes $C_4, C_7, C_{10}, \ldots$ se determinan en términos de C_1, y los coeficientes $C_5, C_8, C_{11}, \ldots$ se determinan en términos de C_2, que ya está determinada como cero. Por tanto, $C_2 = C_5 = C_8 = C_{11} = \cdots = 0$. Los primeros pocos coeficientes se determinan por la relación de recurrencia como

$$C_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} C_0 = \frac{1}{3!} C_0$$
$$C_4 = \frac{1}{3 \cdot 4} C_1 = \frac{2}{4!} C_1$$
$$C_6 = \frac{1}{5 \cdot 6} C_1 = \frac{4}{6!} C_0$$
$$C_7 = \frac{1}{6 \cdot 7} C_4 = \frac{10}{7!} C_1$$

Sustituyendo estos coeficientes en la solución y sacando como factores comunes C_0 y C_1, obtenemos

$$\begin{aligned} y &= C_0\left[1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!}x^6 + \cdots + \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + \cdots\right] \\ &\quad + C_1\left[x + \frac{2}{4!}x^2 + \frac{2 \cdot 5}{7!}x^5 + \cdots + \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1} + \cdots\right] \\ &= C_0 y_1(x) + C_1 y_2(x) \end{aligned}$$

O, en forma más general,

$$\begin{aligned} y &= C_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{(3n)!} x^{3n}\right] \\ &\quad + C_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1}\right] \end{aligned} \qquad \textbf{(5-54)}$$

Ésta es la solución general de la ecuación de Airy, y $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son sus dos soluciones linealmente independientes. Observe que esta solución es válida para cualquier valor de x, ya que la ecuación de Airy no tiene puntos singulares.

Comentario Resolvimos la ecuación de Airy anterior alrededor del punto ordinario $x_0 = 0$, y obtuvimos una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 y_1(x) + C_1 y_2(x)$$

donde las dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ y $y_2(x)$ pueden encontrarse por la ecuación 5-54. Esta solución converge para cualquier valor de x, ya que la ecuación de Airy no tiene puntos singulares y, por tanto, su radio de convergencia es infinito.

Al escoger $x_0 = 0$ tenemos la ventaja de obtener expresiones más simples. Ahora investiguemos lo que sucedería si decidimos que x_0 sea cualquier otro punto. Esta vez, la solución sería de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n = C_0 y_3(x) + C_1 y_4(x)$$

que, nuevamente, converge para cualquier valor de x. Ambas soluciones son equivalentes, aunque parecen ser diferentes. Las funciones $y_3(x)$ y $y_4(x)$ pueden

Ecuación diferencial:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

1. Tomando $x_0 = 0$:

$$y = C_0 y_1(x) + C_1 y_2(x)$$

2. Tomando $x_0 = 5$:

$$y = C_2 y_3(x) + C_2 y_4(x)$$

Pero

$$y_3(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$
$$y_4(x) = b_0 y_1(x) + b_1 y_2(x)$$

FIGURA 5-29
Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden puede tener soluciones independientes alrededor de diferentes puntos ordinarios dentro de un intervalo de convergencia, pero todas las soluciones pueden expresarse como una combinación lineal de las dos primeras soluciones linealmente independientes.

expresarse como una combinación lineal de $y_1(x)$ y $y_2(x)$, ya que, de acuerdo con el teorema 5-3, una ecuación diferencial de segundo orden puede tener sólo dos soluciones linealmente independientes en un intervalo de convergencia específico (figura 5-29). Si lo desea, la solución en términos de $x - x_0$ puede obtenerse ya sea expresando el coeficiente x en la ecuación de Airy como $x_0 + (x - x_0)$ (que es la expansión de serie de Taylor de la función x alrededor del punto x_0) y expresando la ecuación diferencial como $y'' - (x - x_0)y + x_0 y = 0$; o mediante la definición de una nueva variable como $t = x - x_0$ y suponiendo una solución de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$.

EJEMPLO 5-16 Ecuación de Chebyshev

La búsqueda de un polinomio que se desvíe al mínimo de cero en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ (lo cual es de gran importancia en el análisis numérico) condujo al estudio de la ecuación de Chebyshev, que es

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda^2 y = 0 \tag{5-55}$$

donde λ es una constante. Encuentre la solución por serie de potencias de la ecuación alrededor del origen, $x_0 = 0$.

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables, y puede expresarse en la forma estándar dividiendo cada término entre $1 - x^2$:

$$y'' - \frac{x}{1 - x^2}y' + \frac{\lambda^2}{1 - x^2}y = 0$$

Entonces $P(x) = -x/(1 - x^2)$ y $Q(x) = \lambda^2/(1 - x^2)$, que son razones de polinomios. Por inspección, vemos que los denominadores tanto de $P(x)$ como de $Q(x)$ se vuelven cero $x = \pm 1$. Por tanto, los puntos $x = -1$ y $x = 1$ son los puntos singulares de esta ecuación diferencial; así, una solución de serie obtenida alrededor del punto $x_0 = 0$ convergirá en el intervalo $-1 < x < 1$.

Ahora suponemos una solución de serie de potencias de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Diferenciando dos veces y sustituyendo las derivadas en la ecuación diferencial, tenemos

$$(1 - x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

o $$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Corriendo el índice de la primera sumatoria mediante el reemplazo de n por $n - 2$, y comenzando ambas sumatorias de enmedio con $n = 0$ en vez de 1 o 2 (ya que los términos adicionales correspondientes a $n = 0$ o 1 serán cero debido a los factores n y $n - 1$ en la sumatoria), tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)C_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)C_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^n + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

o $$\sum_{n=0}^{\infty} \{(n+2)(n+1)C_{n+2} + [\lambda^2 - n(n-1) - n]C_n\}x^n = 0$$

Esta ecuación se satisfará para todas las x si y solo si el coeficiente de cada potencia de x es cero. Esta condición nos da un número infinito de ecuaciones para los coeficientes de expansión C_n:

$$(n+2)(n+1)C_{n+2} + [\lambda^2 - n(n-1) - n]C_n = 0$$

o

$$C_{n+2} = -\frac{\lambda^2 - n^2}{(n+1)(n+2)}C_n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ésta es la relación de recurrencia, y vincula cualquier coeficiente con el segundo anterior. Entonces, si los primeros dos coeficientes C_0 y C_1 están disponibles, el resto (C_2, C_3, C_4, C_5, . . .) puede determinarse por la relación de recurrencia. Los primeros de ellos son

$$\begin{aligned}
C_2 &= -\frac{\lambda^2}{1\cdot 2}C_0 = -\frac{\lambda^2}{2!}C_0 \\
C_3 &= -\frac{\lambda^2 - 1^2}{2\cdot 3}C_1 = -\frac{\lambda^2 - 1}{3!}C_1 \\
C_4 &= -\frac{\lambda^2 - 2^2}{3\cdot 4}C_2 = \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)}{4!}C_0 \\
C_5 &= -\frac{\lambda^2 - 3^2}{4\cdot 5}C_3 = \frac{(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 3^2)}{5!}C_1 \\
C_6 &= -\frac{\lambda^2 - 4^2}{5\cdot 6}C_4 = -\frac{\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)(\lambda^2 - 4^2)}{6!}C_0 \\
C_7 &= -\frac{\lambda^2 - 5^2}{6\cdot 7}C_5 = -\frac{(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 3^2)(\lambda^2 - 5^2)}{7!}C_1
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos coeficientes en la solución y sacando como factores comunes C_0 y C_1, obtenemos

$$\begin{aligned}
y &= C_0\left[1 - \frac{\lambda^2}{2!}x^2 + \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)}{4!}x^4 - \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)(\lambda^2 - 4^2)}{6!}x^6 + \cdots\right] \\
&\quad + C_1\left[x - \frac{\lambda^2 - 1}{3!}x^3 + \frac{(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 3^2)}{5!}x^5 - \frac{(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 3^2)(\lambda^2 - 5^2)}{7!}x^7 + \cdots\right] \\
&= C_0 y_1(x) + C_1 y_2(x)
\end{aligned}$$

Generalizando los coeficientes para los términos pares e impares, la solución también puede expresarse en una forma más general como

$$\begin{aligned}
y &= C_0\left[1 + \sum_{n-1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\lambda^2 - 0^2)(\lambda^2 - 2^2)\cdots[\lambda^2 - (2n-2)^2]}{(2n)!}x^{2n}\right] \\
&\quad + C_1\left[x + \sum_{n-1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 3^2)\cdots[\lambda^2 - (2n-1)^2]}{(2n+1)}x^{2n+1}\right]
\end{aligned} \tag{5-56}$$

Los términos entre corchetes son las dos soluciones linealmente independientes y_1 y y_2 de la ecuación de Chebyshev. Observe que esta solución es válida para cualquier valor de x en el intervalo $-1 < x < 1$.

Cuando λ es un entero no negativo, $y_1(x)$ o $y_2(x)$ se vuelve un polinomio de grado n en lugar de esa serie infinita. Cuando se multiplica por una constante adecuada, el polinomio resultante de grado n (que es una solución de la ecuación de Chebyshev) se llama **polinomio de Chebyshev**, y se simboliza como $T_n(x)$. En la figura 5-30 se muestran los primeros cuatro polinomios de Chebyshev.

$\lambda = n$	$T_n(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$

FIGURA 5-30
Primeros cuatro polinomios de Chebyshev.

Repaso de la sección

5-15C Considere una ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden con coeficientes variables. ¿Cuántas constantes arbitrarias tendrá la solución general alrededor de un punto ordinario? ¿Cuál será el radio de convergencia de esta solución?

5-16 Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden alrededor del punto ordinario específico usando el método de serie de potencias. También determine el intervalo de convergencia de la solución:

$y'' - 4xy' + 4y = 0,\ x_0 = 0$

(*Respuesta:* $y(x) = C_0\left(1 - 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{15}x^6 - \frac{2}{21}x^8 - \cdots\right) + C_1x$

El intervalo de convergencia es $(-\infty,\infty)$.)

5-17 Resuelva el siguiente problema de valor inicial lineal de segundo orden alrededor del punto ordinario $x_0 = 0$ usando el método de serie de potencias:

$y'' + xy' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$

(*Respuesta:* $y(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{105}x^7 + \frac{1}{945}x^9 + \cdots$)

5-5 ▪ ECUACIÓN DE LEGENDRE Y POLINOMIOS DE LEGENDRE

Numerosos problemas de interés práctico en física y en ingeniería requieren de la geometría esférica, como el caso de la distribución de temperatura en una envolvente esférica, y dan como resultado la **ecuación diferencial de Legendre** (que lleva el nombre del matemático francés Adrien Marie Legendre, 1752-1833). Esta ecuación es

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \qquad \textbf{(5-57)}$$

donde α es una constante. Cualquier solución por serie de la ecuación de Legendre se llama **función de Legendre** (de orden α). Cuando α es un entero no negativo, algunas funciones de Legendre se reducen a polinomios, llamados **polinomios de Legendre**. Estos polinomios especiales se usan ampliamente en la representación polinómica de funciones y en integración numérica en el método de cuadratura gaussiana, debido a su comportamiento deseable en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. En el siguiente ejemplo explicamos la solución de la ecuación de Legendre.

EJEMPLO 5-17 Ecuación de Legendre

Encuentre una solución de serie de potencias de la ecuación diferencial de Legendre alrededor del origen, $x_0 = 0$.

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables, y puede expresarse en la forma estándar dividiendo cada término entre $1 - x^2$,

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}y' + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2}y = 0$$

Entonces, $P(x) = -2x/(1 - x^2)$ y $Q(x) = \alpha(\alpha + 1)/(1 - x^2)$, que son razones de polinomios. Por inspección, vemos que el denominador tanto de $P(x)$ como de $Q(x)$ se vuelve cero en $x = \pm 1$. Así, $x = -1$ y $x = 1$ son los puntos singulares de esta ecuación diferencial y, por tanto, una solución por serie que se obtenga alrededor del punto $x_0 = 0$ convergirá en el intervalo $-1 < x < 1$. La solución por serie tendrá un radio de convergencia mínimo de 1.

Ahora suponemos una solución por serie de potencias de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Diferenciando dos veces y sustituyendo las diferenciales en la ecuación diferencial, tenemos

$$(1 - x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)C_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} + \alpha(\alpha + 1)\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

o $$\sum_{n=2}^{n} n(n - 1)C_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{n} n(n - 1)C_n x^n - 2\sum_{n=1}^{n} nC_n x^n + \alpha(\alpha + 1)\sum_{n=0}^{n} C_n x^n = 0$$

Corriendo en 2 el índice de la primera sumatoria mediante el reemplazo de n por $n + 2$, y comenzando las dos sumatorias de enmedio con $n = 0$ en vez de 1 o 2 (ya que los términos adicionales correspondientes a $n = 0$ o 1 serán cero debido a los factores n y $n + 1$ en la sumatoria), tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)(n + 1)C_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n - 1)C_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^n + \alpha(\alpha + 1)\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

o $$\sum_{n=0}^{\infty} \{(n + 2)(n + 1)C_{n+2} + [\alpha(\alpha + 1) - n(n - 1) - 2n]C_n\}x^n = 0$$

Esta ecuación se satisfará para todas las x si y solo si el coeficiente de cada potencia de x es cero. Esta condición nos da un número infinito de ecuaciones para la determinación de los coeficientes de expansión C_n's,

$$(n + 2)(n + 1)C_{n+2} + [\alpha(\alpha + 1) - n(n - 1) - 2n]C_n = 0$$

o $$C_{n+2} = \frac{n(n + 1) - \alpha(\alpha + 1)}{(n + 1)(n + 2)}C_n \qquad n = 0, 1, 3, \ldots \tag{5-58}$$

En este caso, la ecuación 5-58 es la relación de recurrencia, y relaciona cualquier coeficiente con el segundo anterior. Entonces, si los dos primeros coeficientes C_0 y C_1 están disponibles, los demás coeficientes $C_2, C_3, C_4, C_5, \ldots$ pueden determinarse por la relación de recurrencia.

Los primeros de ellos son

$$C_2 = \frac{0 \cdot 1 - \alpha(\alpha + 1)}{1 \cdot 2}C_0 = -\frac{\alpha(\alpha + 1)}{2!}C_0$$

$$C_3 = \frac{1 \cdot 2 - \alpha(\alpha + 1)}{2 \cdot 3}C_1 = -\frac{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}{3!}C_1$$

$$C_4 = \frac{2 \cdot 3 - \alpha(\alpha + 1)}{3 \cdot 4}C_2 = \frac{\alpha(\alpha - 2)(\alpha + 1)(\alpha + 3)}{4!}C_0$$

$$C_5 = \frac{3 \cdot 4 - \alpha(\alpha + 1)}{4 \cdot 5}C_3 = (\alpha - 1)(\alpha - 3)(\alpha + 2)\frac{(\alpha + 4)}{5!}C_1$$

Sustituyendo estos coeficientes en la solución y sacando como factores comunes C_0 y C_1, obtenemos

$$\begin{aligned} y &= C_0\left[1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4 - \cdots\right] \\ &\quad + C_1\left[x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5 - \cdots\right] \\ &= C_0y_1(x) + C_1y_2(x) \end{aligned}$$

Generalizando los coeficientes para los términos pares e impares, la solución también puede expresarse en forma más general como

$$\begin{aligned} y &= C_0\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\cdots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2m-1)}{(2m)!}x^{2m}\right] \\ &\quad + C_1\left[x+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2m)}{(2m+1)!}x^{2m+1}\right] \end{aligned}$$

Los términos en los corchetes son las dos soluciones linealmente independientes y_1 y y_2 de la ecuación de Legendre. Observe que esta solución es válida para cualquier valor de x en el intervalo $-1 < x < 1$. Es posible comprobar que ambas series divergen en los puntos extremos.

Polinomios de Legendre

Cuando α es igual a un entero no negativo n, las dos soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación de Legendre pueden escribirse como

$$y_1(x) = 1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{n(n-2)(n-4)\cdots(n-2m+2)(n+1)(n+3)\cdots(n+2m-1)}{(2m)!}x^{2m}$$

$$\text{y} \quad y_2(x) = x+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2m+1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2m)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

Es claro que cuando n sea un número par, $y_1(x)$ se reducirá a un polinomio de grado n, ya que el factor $n - 2m + 2$ será cero cuando $m = n/2 + 1$, y todos los términos correspondientes a valores mayores del índice m contendrán este factor. Por ejemplo, cuando n sea 0, 2 y 4, $y_1(x)$ se reducirá a

$$1, \qquad 1 - 3x^2 \qquad \text{y} \qquad 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$$

respectivamente. Del mismo modo, cuando n sea un número impar, $y_2(x)$ se reducirá a un polinomio de grado n, ya que el factor $n - 2m + 1$ será cero cuando $m = (n + 1)/2$, y todos los términos correspondientes a valores mayores del índice m contendrán este factor. Por ejemplo, cuando n es 1, 3 y 5, $y_2(x)$ se reducirá a

$$x, \qquad x - \frac{5}{3}x^3 \qquad \text{y} \qquad x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5$$

respectivamente. Entonces concluimos que, cuando α es igual a un entero no negativo n, una de las soluciones de las ecuaciones de Legendre se reduce a un polinomio de grado n. Cuando se multiplica por una constante adecuada, el polinomio resultante de grado n (que es una solución de la ecuación de Legendre) se llama **polinomio de Legendre de orden *n***, y se simboliza como $P_n(x)$. Esta constante se selecciona de manera que el coeficiente de la potencia más alta de x en $P_n(x)$ sea igual a

$$C_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \tag{5-59}$$

de modo que cuando $x = 1$, el polinomio tendrá el valor 1. Es decir, $P_n(1) = 1$ para todos los valores de n. Los coeficientes de las otras potencias de x se determinan por la relación de recurrencia (ecuación 5-58), reemplazando n por m y α por n.

$$C_{m-2} = -\frac{m(m+1)}{(n-m+2)(n+m-1)}C_m \tag{5-60}$$

Observe que n es el orden del polinomio de Legendre, mientras que m es el índice ficticio de la sumatoria. Para $m = n$, sustituyendo la ecuación 5-59 en la ecuación 5-60 obtenemos

$$C_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}C_n = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-2)!(n-1)!}$$

Para $m = n - 2$, tendremos

$$\begin{aligned} C_{n-4} &= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}C_{n-2} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}\frac{(2n-2)!}{2^n(n-2)!(n-1)!} \\ &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-4)!(n-2)!} \end{aligned}$$

Generalizando para $m = n - 2k$,

$$C_{n-2k} = \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} \tag{5-61}$$

Entonces el polinomio de Legendre de orden n puede expresarse como

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5-62}$$

donde N es el mayor entero menor o igual a $n/2$. Es decir, $N = n/2$ cuando n es par, y $N = (n-1)/2$ cuando n es impar. Observe que los polinomios de Legendre para orden par (tales como $P_2, P_4, \ldots$) incluyen solo las potencias pares de x, mientras que los polinomios de Legendre de orden impar (tales como $P_3, P_5, \ldots$) incluyen solo las potencias impares de x. Los primeros seis polinomios de Legendre pueden expresarse explícitamente como

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

En la figura 5-31 hay una gráfica de los polinomios de Legendre.

A diferencia de las funciones de Legendre, los polinomios de Legendre convergen en los puntos extremos $x = \pm 1$, así como el intervalo intermedio. Podemos

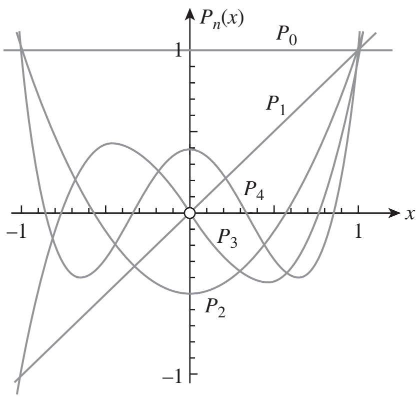


FIGURA 5-31
Gráfica de los primeros polinomios de Legendre.

comprobar que $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$ para cualquier valor de n. Por tanto, $P_n(x)$ es la única solución de la ecuación de Legendre que permanece finita en el intervalo cerrado $-1 \leq x \leq 1$.

EJEMPLO 5-18 Fórmula de Rodrigues

Compruebe que los polinomios de Legendre pueden generarse de manera sistemática a partir de la relación

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n], \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{5-63}$$

que se conoce como **fórmula de Rodrigues**, por el matemático francés Olinde Rodrigues (1794-1851).

Solución Usando la fórmula de expansión de binomios, $(x^2 - 1)^n$ puede expresarse como

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k} \tag{5-64}$$

Sustituyendo y dado que la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas (es decir, el operador de la derivada puede colocarse dentro o fuera de la sumatoria), tenemos

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2k}) \tag{5-65}$$

Derivando, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2k}) &= (2n-2k)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{2n-2k-1})\\ &= (2n-2k)(2n-2k-1)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^{2n-2k-2})\\ &= (2n-2k)(2n-2k-1)\cdots(n-2k-1)x^{n-2k}\\ &= \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}\end{aligned} \tag{5-66}$$

Asimismo, cuando $m > n/2$, la derivada en la sumatoria da cero, ya que el exponente de x en este caso se vuelve menor que n, y la derivada n de un polinomio de grado menor que n es cero. Por tanto, podemos cambiar el límite superior del índice de la sumatoria a N, que es el mayor entero igual o menor que $n/2$. Sustituyendo la ecuación 5-66 en la ecuación 5-65, obtenemos (después de algunas cancelaciones)

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

que es el resultado deseado.

Usando la fórmula de Rodrigues y después de algunas prolongadas manipulaciones, obtenemos la siguiente relación de recurrencia para polinomios de Legendre:

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)xP_{n-1} - (n-1)P_{n-2}}{n} \tag{5-67}$$

Entonces, sabiendo que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$, podemos determinar todos los polinomios de Legendre usando esta relación de recurrencia (figura 5-32).

$$a)\quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n-2k)!x^{n-2k}}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}$$

$$b)\quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$c)\quad P_n(x) = \frac{(2n-1)xP_{n-1} - (n-1)P_{n-2}}{n}$$

con $P_0 = 1$ y $P_1 = x$.

FIGURA 5-32
Tres maneras de obtener un polinomio de Legendre: *a*) expansión de serie, *b*) fórmula de Rodrigues y *c*) relación de recurrencia.

EJEMPLO 5-19 Cómo obtener polinomios de Legendre

Determine el polinomio de Legendre P_2 usando *a*) la fórmula de Rodrigues y *b*) la relación de recurrencia.

Solución *a*) Tomando $n = 2$ y aplicando la fórmula de Rodrigues (ecuación 5-63), tenemos

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^2] = \frac{1}{8}\frac{d}{dx}[4x(x^2-1)] = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

b) Observando que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$, la relación de recurrencia (ecuación 5-67), con $n = 2$, da

$$P_2 = \frac{3xP_1 - P_0}{2} = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

Como se esperaba, ambos métodos dieron el mismo resultado.

Repaso de la sección

5-18C ¿Cómo se relacionan entre sí los polinomios de Legendre y las funciones de Legendre?

5-19C ¿La solución general de la ecuación de Legendre que se obtuvo en el ejemplo 5-17 es válida para $x = 2$? ¿Por qué?

5-20 Determine el polinomio de Legendre $P_3(x)$ usando *a*) la expansión de serie, *b*) la fórmula de Rodrigues y *c*) la relación de recurrencia.

(*Respuesta:* $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$.)

5-6 ▪ SOLUCIONES POR SERIE ALREDEDOR DE UN PUNTO SINGULAR REGULAR

Ahora consideramos las soluciones de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad \textbf{(5-68)}$$

en la cercanía de un punto regular, x_0. Por conveniencia supondremos que el punto singular regular está en el origen, es decir $x_0 = 0$. Esta suposición simplifica el problema pero no causa ninguna pérdida de generalidad, ya que cualquier punto singular x_0 de una ecuación diferencial puede moverse al origen mediante la transformación $t = x - x_0$. También consideraremos el intervalo $x > 0$ en las explicaciones para evitar el signo de valor absoluto. Nuevamente, esto no es una limitación seria, ya que el intervalo $x < 0$ puede manejarse de la misma manera cambiando la variable $t = -x$ y realizando el análisis para $t > 0$.

De la definición de puntos singulares regulares se deduce que, si $x_0 = 0$ es un punto singular regular, entonces las funciones $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ son analíticas, y tienen expansiones de serie de Taylor en ese punto. Entonces, ambas funciones pueden expresarse como

$$p(x) = xP(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_nx^n \tag{5-69}$$

y

$$q(x) = x^2Q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q_nx^n \tag{5-70}$$

Las funciones $p(x)$ y $q(x)$ no necesitan incluir un número infinito de términos. De hecho, estas dos funciones, en la mayoría de ecuaciones diferenciales conocidas, son polinomios con no más de dos o tres términos. Por ejemplo, para la ecuación de Bessel de orden cero, tenemos

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

Vemos de inmediato, por inspección, que $p(x) = 1$ y $q(x) = x^2$, que son polinomios simples.

Multiplicando la ecuación 5-68 por x^2 obtenemos

$$x^2y'' + x^2P(x)y' + x^2Q(x)y = 0$$

Esta ecuación puede reacomodarse como

$$x^2y'' + x[xP(x)]y' + [x^2Q(x)]y = 0$$

o

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \tag{5-71}$$

que se parece mucho a la ecuación de Euler que se vio en el capítulo 3. Para el caso especial de que $p(x)$ y $q(x)$ sean constantes, la ecuación 5-71 sí se vuelve la ecuación de Euler (figura 5-33),

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0 \tag{5-72}$$

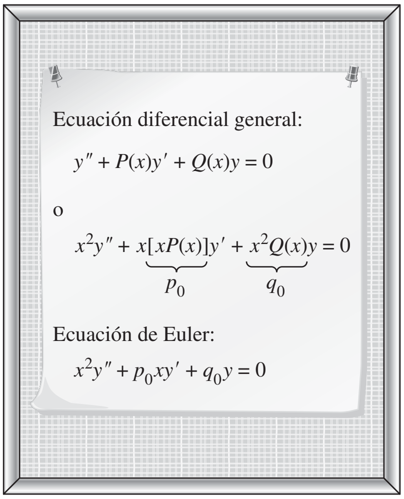


FIGURA 5-33
Cuando las funciones $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ son constantes, la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden se reduce a la ecuación de Euler.

La solución de esta ecuación es de la forma x^r, donde r no es necesariamente un entero.

Un examen cuidadoso de la ecuación 5-71 revela que los coeficientes de la ecuación diferencial aparecen como el producto de los coeficientes de la ecuación de Euler y los coeficientes de las ecuaciones que tienen soluciones por serie de potencias. Esta observación sugiere que busquemos la solución de la ecuación 5-71 en la forma

$$y = x^r\sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^{n+r} \tag{5-73}$$

es decir, como un producto de la solución de Euler y una solución por serie de potencias (figura 5-34). El procedimiento de buscar una solución de una ecuación diferencial en la forma de un producto de una potencia desconocida de x y una serie de potencias en x se conoce como **método de Frobenius**, por el matemático alemán George F. Frobenius (1849-1917). Veremos que, en la cercanía de un punto singular regular, la ecuación diferencial 5-68 tiene al menos una solución de la forma de la ecuación 5-73 y otra solución de la misma forma o modificada, dependiendo de los valores de r.

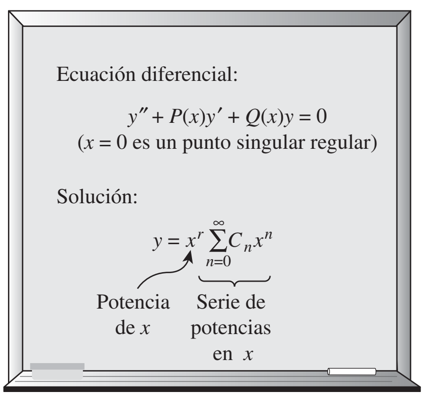


FIGURA 5-34
La solución de una ecuación diferencial alrededor del punto $x = 0$, donde $x = 0$ es un punto singular regular, está en la forma de un producto de una potencia de x y una serie de potencias en x.

Para determinar el valor de r, consideramos la ecuación diferencial en su forma general (ecuación 5-71), y sustituimos las expansiones para $p(x)$ y $q(x)$ en las ecuaciones 5-69 y 5-70 en esta ecuación. Obtenemos

$$x^2y'' + x\sum_{n=0}^{\infty} p_nx^ny' + \sum_{n=0}^{\infty} q_nx^n = 0 \tag{5-74}$$

Ahora suponemos una solución de la forma de la ecuación 5-73 con $C_0 \neq 0$, de la cual obtenemos, por diferenciación:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) C_n x^{n+r-1}$$

y

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)(n + r) C_n x^{n+r-2}$$

Sustituyendo la expresión para y, y' y y'' en la ecuación 5-74 e igualando a cero el coeficiente de x^r, que es la potencia más baja de x, obtenemos

$$[r^2 + (p_0 - 1)r + q_0]C_0 = 0$$

o

$$\boxed{r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0} \tag{5-75}$$

ya que $C_0 \neq 0$. Ésta es una ecuación cuadrática en r y se llama **ecuación indicial** de la ecuación diferencial (figura 5-35). Tiene dos raíces reales o dos raíces complejas, r_1 y r_2, que son llamados *exponentes* del punto singular regular que se considera.

Si las raíces son complejas, necesariamente son conjugadas una de otra. En este caso, la solución consistirá en funciones complejas, ya que incluirán los exponentes complejos r_1 y r_2. Sin embargo, todavía podemos obtener funciones con valor real separando la parte real y la parte imaginaria de la solución. Cuando las raíces r_1 y r_2 son reales y desiguales, siempre consideraremos que r_1 es la raíz mayor.

Cuando $p(x) = xP(x)$ y $q(x) = x^2Q(x)$ son polinomios, las constantes p_0 y q_0 son simplemente las constantes en esos polinomios (los coeficientes de x^0). De no ser así, pueden determinarse por los siguientes límites:

$$p_0 = \lim_{x \to 0} xP(x) \quad \text{y} \quad q_0 = \lim_{x \to 0} x^2Q(x) \tag{5-76}$$

Ahora ilustramos con ejemplos la determinación de r_1 y r_2.

Ecuación diferencial:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Ecuación indicial:

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$$

donde

$$p_0 = [xP(x)] \quad \text{en } x = 0,$$
$$q_0 = [x^2Q(x)] \quad \text{en } x = 0.$$

Raíces de la ecuación indicial: r_1 y r_2.

FIGURA 5-35
La ecuación indicial de una ecuación diferencial es una ecuación cuadrática en r que incluye los valores de las funciones $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ en $x = 0$.

EJEMPLO 5-20 Ecuación indicial y sus raíces

Compruebe que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2x(x - 1)y' + x^2y = 0$$

y determine las raíces de la ecuación indicial, r_1 y r_2.

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables, y puede expresarse en la forma estándar dividiendo cada término entre x^2:

$$y'' - \frac{2(x - 1)}{x}y' + y = 0$$

Entonces, $P(x) = -2(x - 1)/x$, que es una razón de dos polinomios, y $Q(x) = 1$, que es un polinomio. Por inspección, vemos que $Q(x)$ es analítica en todas partes, pero el denominador de $P(x)$ se vuelve cero en $x = 0$. Por tanto, $x = 0$ es un punto singular. Sin embargo, éste es singular regular, ya que tanto $p(x) = xP(x) = -2(x - 1) = 2 - 2x$ como $q(x) = x^2Q(x) = x^2$ son polinomios, es decir, funciones analíticas.

Por estas dos relaciones, observamos que $p_0 = 2$ y $q_0 = 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación indicial $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$, obtenemos $r^2 + r = 0$ o $r(r + 1) = 0$. Las raíces de esta ecuación indicial se determinan fácilmente por inspección como $r_1 = 0$ y $r_2 = -1$. Observe que llamamos r_1 a la raíz mayor.

EJEMPLO 5-21 Cómo mover el punto singular al origen

Compruebe que $x = 1$ es un punto singular regular de la ecuación de Legendre:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

donde α es una constante. Mueva este punto singular al origen mediante la transformación $t = x - 1$, y determine las raíces de la ecuación indicial que pertenece a la ecuación transformada.

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables, y puede expresarse en la forma estándar dividiendo cada término entre $(1 - x^2)$:

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}y' + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2}y = 0 \tag{5-77}$$

Entonces, $P(x) = -2x/(1 - x^2)$ y $Q(x) = \alpha(\alpha + 1)/(1 - x^2)$. Ambas son razones de polinomios. Por inspección, vemos que los denominadores tanto de $P(x)$ como de $Q(x)$ se vuelven cero en $x = \pm 1$. Por tanto, $x = -1$ y $x = 1$ son los puntos singulares de esta ecuación diferencial. Sin embargo, éstos son los puntos singulares regulares, ya que para $x_0 = 1$,

$$(x - x_0)P(x) = (x - 1)\frac{-2x}{1 - x^2} = \frac{2x}{x + 1}$$

y

$$(x - x_0)^2Q(x) = (x - 1)^2\frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2} = -\frac{(x - 1)\alpha(\alpha + 1)}{1 + x}$$

que son analíticas en $x = 1$. Además podemos demostrar que el punto $x_0 = -1$ también es singular regular.

Para mover el punto singular $x_0 = 1$ al origen, aplicamos la transformación $t = x - 1$. Sustituyendo en la ecuación 5-77 y reacomodando, obtenemos

$$y'' - \frac{2(t + 1)}{t(t + 2)}y' - \frac{\alpha(\alpha + 1)}{t(t + 2)}y = 0$$

donde los símbolos *prima* indican diferenciación con respecto a t. El punto $t = 0$ es claramente uno de los puntos singulares. De este modo cumplimos nuestro objetivo de mover el punto singular regular $x_0 = 1$ al origen.

Antes de poder calcular las raíces de la ecuación indicial, necesitamos determinar las constantes p_0 y q_0. Como $p(t)$ y $q(t)$ en este caso no son polinomios, necesitamos determinarlos por las ecuaciones 5-65 y 5-66 tomando los siguientes límites:

$$p_0 = \lim_{t\to 0} tP(t) = \lim_{t\to 0}\frac{2t(t + 1)}{t(t + 2)} = 1$$

y

$$q_0 = \lim_{t\to 0} t^2Q(t) = \lim_{t\to 0}\frac{-t^2\alpha(\alpha + 1)}{t(t + 2)} = 0$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación indicial $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$, obtenemos $r^2 + (1 - 1)r + 0 = 0$ o $r^2 = 0$. Las raíces de esta ecuación indicial se determinan fácilmente por inspección como $r_1 = r_2 = 0$. Observe que las raíces en este caso son reales e iguales.

Como nota al margen, es más conveniente resolver la ecuación

$$t(t + 2)y'' + 2(t + 1)y' - \alpha(\alpha + 1)y = 0 \tag{5-78}$$

que su equivalente

$$ty'' + \frac{2(t+1)}{t+2}y' - \frac{\alpha(\alpha+1)}{t+2}y = 0 \quad \textbf{(5-79)}$$

ya que, en este último caso, necesitaremos expandir los términos en el denominador usando la expansión de binomio

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2+t} = \frac{1}{2\left(1+\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}t^n$$

Sustituyendo en la ecuación 5-79, tenemos

$$ty'' + (t+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}t^n y' - \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}t^n y = 0 \quad \textbf{(5-80)}$$

que es mucho más compleja que la ecuación diferencial 5-78.

La teoría del método de Frobenius es bastante complicada y rebasa el alcance de un texto introductorio sobre ecuaciones diferenciales. Resumimos los resultados en el siguiente teorema.

TEOREMA 5-3 Soluciones por serie alrededor de puntos singulares regulares

Sea el punto $x = 0$ un punto singular regular de la ecuación diferencial:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

y sea ρ el menor radio de convergencia de dos funciones $p(x) = xP(x)$ y $q(x) = x^2Q(x)$. Si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación indicial:

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$$

donde $$p_0 = \lim_{x\to 0} xP(x) \quad y \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2Q(x)$$

y $r_1 > r_2$ cuando las raíces son reales y desiguales, entonces existen dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de esta ecuación diferencial, con un radio de convergencia de ρ. Para $x > 0$, son de las siguientes formas (figura 5-36):

Caso 1: *$r_1 = r_2 + \lambda$ (λ es positiva no entera)*

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \quad \textbf{(5-81a)}$$

$$y_2 = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n \qquad (b_0 \neq 0) \quad \textbf{(5-81b)}$$

Caso 2: *$r_1 = r_2 = r$*

$$y_1 = x^{r}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \quad \textbf{(5-82a)}$$

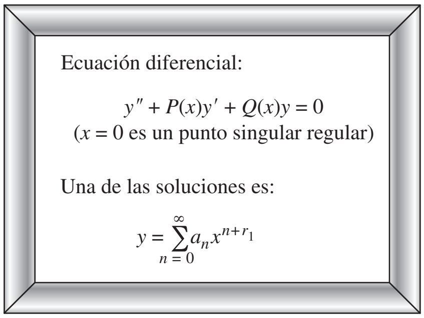


FIGURA 5-36
Cuando $x = 0$ es un punto singular regular, se garantiza que una ecuación lineal de segundo orden tendrá al menos una solución de la forma $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}$, donde r_1 es la mayor raíz de la ecuación indicial.

$$y_2 = y_1 \ln x + x^r \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \qquad \textbf{(5-82b)}$$

Caso 3: *$r_1 = r_2 + N$ (N es un entero positivo)*

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \qquad \textbf{(5-83a)}$$

$$y_2 = Cy_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad (b_0 \neq 0) \qquad \textbf{(5-83b)}$$

donde la constante C puede ser cero (figura 5-37). Entonces, la solución general de la ecuación diferencial para los tres casos se expresa como

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad \textbf{(5-84)}$$

donde las constantes arbitrarias C_1 y C_2 se determinan por las condiciones iniciales y en la frontera.

Ecuación diferencial:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

a) Cuando $r_1 = r_2 = r$:

$$y_2 = y_1 \ln x + x^r \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

b) Cuando $r_1 = r_2 + N$ (*N* es un entero positivo):

$$y_2 = \underbrace{C}_{\text{Puede ser cero}} y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

FIGURA 5-37
Cuando $r_1 = r_2 = r$, la segunda solución linealmente independiente siempre incluye un término logarítmico. Cuando $r_1 = r_2 + N$, donde N es un entero positivo, entonces la segunda solución linealmente independiente incluye un término logarítmico sólo cuando $C \neq 0$.

La prueba de este teorema se da en textos más avanzados sobre ecuaciones diferenciales. Antes de ilustrar con ejemplos el procedimiento de resolución y el uso de este teorema, hacemos las siguientes observaciones respecto a la resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes variables alrededor de un punto singular regular:

1. La forma de la primera solución es la misma para todos los casos. Los tres casos difieren sólo en la forma de la segunda solución. Para todos los casos, ambas soluciones incluyen series infinitas con diferentes conjuntos de coeficientes a_n y b_n.
2. Los coeficientes a_0 y b_0 son constantes arbitrarias diferentes de cero, y se les puede asignar cualquier valor adecuado. Es práctica común tomar $a_0 = 1$ y $b_0 = 1$ por simplicidad, sin ninguna pérdida de generalidad.
3. Las soluciones dadas se restringen a $x > 0$ para evitar usar signos de valor absoluto. Esta restricción puede eliminarse reemplazando x^{r_1} y x^{r_2} en las soluciones por $|x|^{r_1}$ y $|x|^{r_2}$, respectivamente. Una forma más práctica es sustituir $t = -x$ en la ecuación diferencial, y luego resolver la ecuación resultante para $t > 0$.
4. Las soluciones convergirán dondequiera que $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ sean analíticas, salvo en $x = 0$, tal vez. Una solución divergirá en $x = 0$ si contiene $\ln x$ o x^r donde $r < 0$. Si el punto $x = 0$ es el único punto singular de la ecuación diferencial, entonces la solución convergirá dondequiera, salvo en el origen, posiblemente. Es decir, el radio de convergencia de la solución en este caso será infinito. Si la ecuación diferencial tiene más puntos singulares, entonces el radio de convergencia de la solución es por lo menos tan grande como el más pequeño de los radios de convergencia de las funciones de coeficiente $p(x)$ y $q(x)$.
5. Las soluciones dadas en el teorema 5-3 son aplicables a puntos singulares regulares en $x_0 = 0$. Las soluciones en la cercanía de puntos singulares regulares $x_0 \neq 0$ se obtienen fácilmente cambiando la variable independiente mediante $t = x - x_0$, y luego resolviendo la ecuación resultante alrededor del punto $t = 0$ (figura 5-38).
6. La determinación de la primera solución linealmente independiente y_1 es similar a la determinación de la solución alrededor de un punto ordinario, salvo que ahora la solución incluye x^{n+r_1} en vez de x^n. Nuevamente, y_1' y y_1'' se obtienen

Dada la ecuación diferencial:

$$y'' + \frac{5x}{x-2}y' + \frac{x+3}{(x-2)^2}y = 0$$

($x = 2$ es el punto singular)

Defina:

$$t = x - 2$$

Obtenga:

$$y'' + \frac{5(t+2)}{t}y' + \frac{t+5}{t^2}y = 0$$

(ahora el punto singular es $t = 0$)

FIGURA 5-38
Cómo mover el punto singular al origen.

por diferenciación término a término, se sustituyen en la ecuación diferencial original, y los coeficientes a_n se determinan de forma usual por el requisito de que el coeficiente de cada potencia de x sea igual a cero. El término que corresponde a $n = 0$ siempre está en la forma $f(r_1)a_0x^r$, donde $f(r)$ es la ecuación indicial y, por tanto, siempre tendremos $f(r_1) = 0$. Ésta es la manera directa de obtener la ecuación indicial de la ecuación diferencial dada.

Observe que, a menos que $r = 0$, las sumatorias en y_1' y y_1'' comienzan con $n = 0$ en vez de $n = 1$ o $n = 2$, como fue el caso con series de potencias, ya que los coeficientes del primero o de los primeros dos términos ya no son cero.

7. La segunda solución para el caso 1 ($r_1 = r_{2} + \lambda$, λ no entero) se obtiene de manera fácil simplemente repitiendo el procedimiento de resolución para $x = 0$ usando r_2 en vez de r_1 y determinando los nuevos conjuntos de constantes b_n. Este procedimiento obviamente no funcionará para el caso 2, ya que $r_1 = r_2$, y dará la misma solución. Como fue el caso con la ecuación de Euler, la segunda solución linealmente independiente en este caso incluye un término logarítmico $y_1 \ln x$. Podemos verificar esto aplicando el método de reducción de orden. Finalmente, cuando r_1 y r_2 difieren por un entero (caso 3), se parece a una solución de la forma

$$y_2 = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag{5-85}$$

que será linealmente independiente de y_1. A menudo sucede que tal es el caso, pero no siempre. Cuando no lo es, se necesita incluir un término logarítmico para hacer la solución linealmente independiente de y_1. El valor de la constante C se determina durante la solución junto con las constantes b_n. Si $C = 0$, esto indica que y_2 no contiene un término logarítmico, y es de la forma de la ecuación 5-85.

Conociendo la forma general de y_2, hay varias formas de determinarla. La manera obvia es realizar las derivadas indicadas y sustituir los resultados en la ecuación diferencial, y despejar los coeficientes desconocidos b_n. Este procedimiento a veces es tedioso, pero es un buen procedimiento y siempre funciona. La presencia de términos logarítmicos no debe ser causa de preocupación, ya que siempre se cancelan. Un procedimiento alternativo sería ignorar las relaciones específicas y_2 y aplicar el método de reducción de orden una vez que y_1 esté disponible. Otro procedimiento más, cuando r_1 y r_2 difieren por un entero, sería suponer, sin ninguna justificación, que y_2 es de la forma de la ecuación 5-85, y tratar de determinar b_n, con la esperanza de que esto funcione. Obtener todos los ceros para b_n indica que nuestra suposición es incorrecta y y_2 contiene un término logarítmico. Conseguir valores diferentes de cero para b_n indica que nuestra suposición es correcta. No sólo esto, la solución obtenida usualmente contiene dos constantes arbitrarias b_0 y b_1, y obtenemos ambas soluciones linealmente independientes de una vez, sin necesidad de usar la raíz mayor r_1 (figura 5-39).

8. Una vez que las dos soluciones linealmente independientes y_1 y y_2 estén disponibles, cualquier otra solución de la ecuación diferencial puede expresarse como una combinación lineal de estas dos soluciones.

Ecuación diferencial:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

($x = 0$ es un punto singular regular)
$r_1 = r_2 + N$ (N es un entero positivo).

Haga $C = 0$ y entonces,

$$y_2 = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Si

$$y_2 = b_0 y_1(x) + b_1 y_2(x)$$

con $b_0 \neq 0$ y $b_1 \neq 0$,

Entonces y_2 es la solución general.

FIGURA 5-39
Cuando $r_1 = r_2 + N$, donde N es un entero positivo, es aconsejable hacer $C = 0$ y tratar de determinar primero y_2. Si la solución obtenida incluye dos coeficientes constantes arbitrarios, entonces ésta es usualmente la solución general.

EJEMPLO 5-22 Ecuación de Euler

Resuelva la ecuación de Euler de segundo orden $4x^2y'' + 11xy' - 2y = 0$ usando *a*) el procedimiento estándar y *b*) el método de serie alrededor del punto $x_0 = 0$.

Solución *a*) Usando el procedimiento de resolución para ecuaciones de Euler que se explicó en el capítulo 3, consideramos que la solución será de la forma $y = x^r$. Obteniendo la primera y la segunda derivadas, tenemos

$$y' = rx^{r-1}$$
$$y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y cancelando por división $y = x^r$, obtenemos

$$r^2 + \frac{7}{4}r - \frac{1}{2} = 0 \qquad \textbf{(5-86)}$$

Las raíces de esta ecuación cuadrática son $r_1 = 1/4$ y $r_2 = -2$, que son reales y distintas. Entonces, la solución general de esta ecuación de Euler es, por el capítulo 3,

$$y = C_1x^{r_1} + C_2x^{r_2} = C_1x^{1/4} + C_2x^{-2} \qquad \textbf{(5-87)}$$

Esta solución es aplicable a cualquier punto salvo en $x = 0$, ya que la división entre $y = x^r$ es válida solo para $x \neq 0$.

b) Ahora, ignorando por completo el acertado procedimiento de resolución que se dio anteriormente para las ecuaciones de Euler, trataremos de resolver la ecuación diferencial dada mediante el método por serie, más sofisticado y laborioso, con la esperanza de obtener el mismo resultado.

Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables, y puede expresarse en la forma estándar dividiendo cada término entre $4x^2$ para obtener

$$y'' + \frac{11}{4x}y' - \frac{1}{2x^2}y = 0$$

Es claro que el punto $x = 0$ es singular. Sin embargo, es singular regular, ya que tanto $p(x) = xP(x) = 11/4$ como $q(x) = x^2Q(x) = -1/2$ son polinomios (de grado cero), es decir, son funciones analíticas.

Por las dos relaciones anteriores, observamos que $p_0 = 11/4$ y $q_0 = -1/2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación indicial $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$, obtenemos

$$r^2 + \frac{7}{4}r - \frac{1}{2} = 0$$

que es idéntica a la ecuación que antes se obtuvo al reemplazar y por x^2 en la ecuación diferencial (figura 5-40), Éste siempre es el caso, y ofrece una alternativa para encontrar la ecuación indicial. Las raíces de esta ecuación indicial son $r_1 = 1/4$ y $r_2 = -1/2$. Observe nuevamente que a la raíz mayor la llamamos r_1.

Considerando que las raíces son diferentes y difieren por un no entero, de acuerdo con el teorema 5-3, la ecuación diferencial dada tiene dos soluciones linealmente independientes, ambas de la forma

$$y = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r}$$

Diferenciando dos veces, tenemos

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

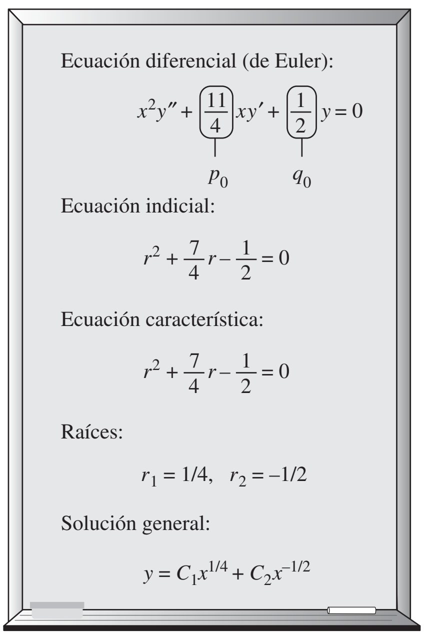


FIGURA 5-40
La ecuación indicial de una ecuación de Euler es equivalente a su ecuación característica.

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada,

$$4x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}+11x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

o
$$\sum_{n=0}^{\infty}[4(n+r)(n+r-1)+11(n+r)-2]a_nx^{n+r}=0$$

Esta ecuación se satisfará para todas las x si y solo si el coeficiente de cada potencia de x es cero. Esta condición nos da un número infinito de ecuaciones para la determinación de los coeficientes de expansión a_n:

$$[4(n+r)(n+r-1)+11(n+r)-2]a_n=0 \quad n=0,1,2,3,\ldots \tag{5-88}$$

Para $n = 0$, la relación de recurrencia se reduce a $[4r(r-1)+11r-2]a_0=0$ o $4r(r-1)+11r-2=0$, ya que $a_0 \neq 0$. Esta ecuación puede reacomodarse como

$$r^2+\frac{7}{4}r-\frac{1}{2}=0$$

que es la ecuación indicial, ecuación 5-86. Entonces concluimos que, para $n = 0$, *la relación de recurrencia siempre se reduce a la ecuación indicial.*

Para $r = r_1 = 1/4$, la relación de recurrencia (ecuación 5-88) se reduce a

$$\left[\left(n+\frac{1}{4}\right)\left(n+\frac{1}{4}-1\right)+\frac{11}{4}\left(n+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\right]a_n=0$$

o
$$\left[n\left(n+\frac{9}{4}\right)\right]a_n=0, \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{5-89}$$

Entonces, $a_n = 0, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

ya que ningún entero $n \geq 1$ puede hacer cero los términos en los corchetes de la ecuación 5-89. Entonces, tomando $a_0 = 1$, como de costumbre, la primera solución resulta

$$y_1=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{1/4}=a_0x^{1/4}=x^{1/4} \tag{5-90}$$

La segunda solución linealmente independiente se obtiene repitiendo el procedimiento para $r = r_2 -2$. La relación de recurrencia (ecuación 5-88) en este caso se reduce a

$$\left[(n-2)(n-2-1)+\frac{11}{4}(n-2)-\frac{1}{2}\right]b_n=0$$

o
$$\left[n\left(n-\frac{9}{20}\right)\right]b_n=0, \qquad n=1,2,3,4,\ldots \tag{5-91}$$

Entonces, $b_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4,\ldots$

ya que ningún entero $n \geq 1$ puede hacer cero los términos en los corchetes de la ecuación 5-91. Entonces, tomando $b_0 = 1$, como de costumbre, la segunda solución resulta

$$y_2=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n}=b_0x^{-2}=x^{-2} \tag{5-92}$$

Entonces, la solución general es

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1x^{1/4} + C_2x^{-2} \tag{5-93}$$

que es el mismo resultado que se obtuvo en la parte *a*).

EJEMPLO 5-23 **Teorema 5-3: Caso 1 (r_1 y r_2 difieren en un no entero)**

Resuelva la ecuación diferencial $(x-2)^2y'' + (x-2)y' + (x-4)y = 0$ alrededor del punto $x_0 = 2$ para $x > 0$ mediante el método de Frobenius.

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables, y podemos comprobar que $x = 2$ es un punto singular. Para usar las formas de solución del teorema 5-3, necesitamos primero correr el punto singular al origen mediante la definición de una nueva variable $t = x - 2$. Entonces la ecuación diferencial se vuelve

$$t^2\ddot{y} + t\dot{y} + (t-2)y = 0$$

donde el sobrepunto significa diferenciación con respecto a t. Esta ecuación puede expresarse en la forma estándar dividiendo cada término entre t^2:

$$\ddot{y} + \frac{1}{t}\dot{y} + \frac{(t-2)}{t^2}y = 0$$

Es claro que el punto $t = 0$ es singular. Sin embargo, es singular regular, ya que tanto $p(t) = tP(t) = 1$ como $q(t) = t^2Q(t) = t - 2$ son polinomios, es decir, funciones analíticas.

Por ambas relaciones, observamos que $p_0 = 1$ y $q_0 = -2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación indicial $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$, obtenemos $r^2 - 2 = 0$.

Las raíces de esta ecuación indicial son $r_1 = \sqrt{2}$ y $r_2 = -\sqrt{2}$, que difieren en un no entero. Entonces, de acuerdo con el teorema 5-3, la ecuación diferencial dada tiene dos soluciones linealmente independientes, ambas de la forma

$$y = t^r\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nt^{n+r}$$

Diferenciando dos veces con respecto a t:

$$\dot{y} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nt^{n+r-1}$$

y

$$\ddot{y} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nt^{n+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nt^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nt^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{n+r+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{n+r} = 0$$

Para igualar el exponente de t en todas las sumatorias, corremos en 1 el índice de la tercera sumatoria, reemplazando n por $n-1$. Esto da

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nt^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nt^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}t^{n+r} - 2\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{n+r} = 0$$

Ahora las potencias de t en todas las sumatorias son iguales, pero la tercera sumatoria comienza con $n = 1$. Para que todas las sumatorias comiencen con $n = 1$, eliminamos los términos que corresponden a $n = 0$ y combinamos las sumatorias, obteniendo

$$[r(r-1) + r - 2]a_0 t^r + \sum_{n=1}^{\infty}\{[(n+r)(n+r-1) + (n+r) - 2]a_n + a_{n-1}\}t^{n+r} = 0$$

Esta ecuación se satisfará para todas las t si y solo si el coeficiente de cada potencia de t es cero. Esta condición para la potencia más baja de t, que es t^r, junto con el requisito de que $a_0 \neq 0$, nos da nuevamente la ecuación indicial (figura 5-41), $r(r-1) + r - 2 = 0$, que se satisface sólo con los dos valores de r antes determinados. (Éste es el modo directo de obtener la ecuación indicial.) El requisito de que desaparezcan todos los coeficientes de todas las demás potencias de t nos da

$$[(n+r)(n+r-1) + (n+r) - 2]a_n + a_{n-1} = 0$$

$$[(n+r)^2 - 2]a_n + a_{n-1} = 0$$

o

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(n+r)^2 - 2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5-94}$$

que es la relación de recurrencia para los coeficientes desconocidos a_n.

Para $r = r_1 = \sqrt{2}$, la relación de recurrencia resulta

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(n+\sqrt{2})^2 - 2} = -\frac{a_{n-1}}{n^2 + 2n\sqrt{2} + 2 - 2} = -\frac{a_{n-1}}{n(n+2\sqrt{2})}$$

Por tanto,

$$a_1 = -\frac{a_0}{1(1+2\sqrt{2})}$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2(2+2\sqrt{2})} = \frac{a_0}{1\cdot 2(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})}$$

y

$$a_3 = -\frac{a_2}{3(3+2\sqrt{2})} = -\frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$$

Generalizando, tenemos

$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{n!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})\cdots(n+2\sqrt{2})}$$

Tomando $a_0 = 1$, como de costumbre, la primera solución resulta

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n+\sqrt{2}}}{n!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})\cdots(n+2\sqrt{2})} \tag{5-95}$$

La segunda solución linealmente independiente se obtiene repitiendo el procedimiento para $r = r_2 = -\sqrt{2}$. Representando los coeficientes como b_n, la relación de recurrencia (ecuación 5-94) en este caso se reduce a

$$b_n = -\frac{b_{n-1}}{(n-\sqrt{2})^2 - 2} = \frac{b_{n-1}}{n^2 - 2n\sqrt{2} + 2 - 2} = \frac{b_{n-1}}{n(n-2\sqrt{2})}$$

Esta relación difiere de la correspondiente a a_n por un signo de menos antes de $2\sqrt{2}$. Por tanto, los coeficientes b_n serán iguales que los coeficientes a_n, excepto que el signo de $2\sqrt{2}$ será diferente.

$$b_n = \frac{(-1)^n b_0}{n!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})\cdots(n-2\sqrt{2})}$$

Ecuación diferencial:

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$$

Solución:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

sustituyendo y, y' y y'',

$$\underbrace{[r^2 + (p_0 - 1)r + q_0]}_{\text{Da la ecuación indicial}}a_0x^r + \cdots$$

FIGURA 5-41
Con el método de Frobenius, el coeficiente de a_0 siempre se asemeja a la ecuación indicial, la cual se convierte en cero cuando $r = r_1$ o $r = r_2$.

Tomando $b_0 = 1$, como de costumbre, la segunda solución linealmente independiente resulta

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n-\sqrt{2}}}{n!(1 - 2\sqrt{2})(2 - 2\sqrt{2}) \cdots (n - 2\sqrt{2})} \tag{5-96}$$

Entonces la solución general es $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Reemplazando t por $x - 2$ y sustituyendo y_1 y y_2, la solución general también puede expresarse como

$$y(x) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n+\sqrt{2}}}{n!(1 + 2\sqrt{2})(2 + 2\sqrt{2}) \cdots (n + 2\sqrt{2})}$$

$$+ C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n-\sqrt{2}}}{n!(1 - 2\sqrt{2})(2 - 2\sqrt{2}) \cdots (n - 2\sqrt{2})} \tag{5-97}$$

Esta solución convergirá para cualquier valor positivo de x salvo para $x = 2$.

EJEMPLO 5-24 Teorema 5-3: Caso 2 ($r_1 = r_2$)

Resuelva la ecuación diferencial $x^2 y'' + x(x^2 - 3)y' + 4y = 0$ alrededor del punto $x_0 = 0$ para $x > 0$ usando el método de Frobenius.

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables, y puede expresarse en la forma estándar dividiendo cada término entre x^2:

$$y'' + \frac{x^2 - 3}{x} y' + \frac{4}{x^2} y = 0$$

Es claro que el punto $x = 0$ es singular, ya que por lo menos una función de coeficiente diverge en este punto. Sin embargo, es singular regular, ya que tanto $p(x) = xP(x) = x^2 - 3$ como $q(x) = x^2 Q(x) = 4$ son polinomios indicial, es decir, funciones analíticas.

Por las dos relaciones anteriores, observamos que $p_0 = -3$ y $q_0 = 4$. Sustituyendo estos valores en la ecuación indicial $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$ obtenemos $r^2 - 4r + 4 = 0$ o $(r - 2)^2 = 0$. Las raíces de esta ecuación inicial son $r_1 = r_2 = r = 2$, que son idénticas. Entonces, de acuerdo con el teorema 5-3, la ecuación diferencial dada tiene dos soluciones linealmente independientes: la segunda contendrá un término logarítmico y la primera es de la forma:

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Diferenciando dos veces con respecto a x, tenemos

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) a_n x^{n+r-1}$$

y

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) a_n x^{n+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) a_n x^{n+r+2} - 3\sum_{n=0}^{\infty} (n + r) a_n x^{n+r} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

Para igualar el exponente de x en todas las sumatorias, corremos en 2 los índices de la segunda sumatoria reemplazando n por $n - 2$. Obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r-2)a_{n-2}x^{n+r}$$
$$-3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + 4\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0$$

Ahora las potencias de x en todas las sumatorias son iguales, pero la segunda sumatoria comienza con $n = 2$. Para hacer que las demás sumatorias comiencen con $n = 2$ también, eliminamos los términos que corresponden a $n = 0$ y $n = 1$, y combinamos las sumatorias,

$$[r(r-1) - 3r + 4]a_0 x^r + [r(1+r) - 3(1+r) + 4]a_1 x^{r+1}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\{[(n+r)(n+r+1) - 3(n+r) + 4]a_n + a_{n-2}\}x^{n+r} = 0$$

Esta ecuación se satisfará con todas las x si y solo si el coeficiente de cada potencia de x es cero. Esta condición para la potencia más baja de x, que es x^r, junto con el requisito de que $a_0 \neq 0$, nos da una vez más la ecuación indicial, $r^2 - 4r + 4 = 0$, que se satisface solo con los valores de r antes determinados. El requisito de que los coeficientes de las demás potencias de x desaparezcan nos da $[r(1 + r) - 3(1 + r) + 4]a_1 = 0$ y

$$[(n+r)(n+r-1) - 3(n+r) + 4]a_n + (n+r-2)a_{n-2} = 0 \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Para $r = 2$, la primera relación da $a_1 = 0$, y la segunda relación da la relación de recurrencia:

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{5-98}$$

que expresa un coeficiente en términos del segundo coeficiente anterior. Por tanto, todos los coeficientes con índice par se expresarán en términos de a_0, y todos los coeficientes con índice impar, en términos de a_1, que se determinan como cero. Entonces concluimos que $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$. Los coeficientes con índice par pueden expresarse como

$$a_2 = -\frac{a_0}{2} = -\frac{a_0}{2^1 1!}$$
$$a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2^2 2!}$$
$$a_6 = -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2^3 3!}$$

Generalizando, tenemos

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^n n!}$$

Como de costumbre, al tomar $a_0 = 1$ la primera solución resulta

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2^n n!} \tag{5-99}$$

La segunda solución linealmente independiente se determina de manera similar considerando y_2, de acuerdo con el teorema 5-3, como

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n-1}^{\infty} b_n x^{n+r}$$

Ecuación diferencial:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

$$r_1 = r_2 = r$$

Segunda solución:

$$y_2 = y_1 \ln x + x^r \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

Sustituyendo y, y' y y'',

$$\underbrace{[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1]}_{=0}$$

FIGURA 5-42
Cuando $r = r_1 = r_2$, la segunda solución linealmente independiente siempre contiene un término logarítmico. Pero todos los términos logarítmicos se cancelan al sustituir y_2 y sus derivadas en la ecuación diferencial.

Diferenciando dos veces con respecto a x, tenemos

$$y_2' = y_1' \ln x + \frac{1}{x}(\ln x)y_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n + r)b_n x^{n+r-1}$$

$$y_2'' = y_1'' \ln x + \frac{1}{x}y_1' + \frac{1}{x}y_1' - \frac{1}{x^2}y_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n + r)(n + r - 1)a_n x^{n+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y combinando los términos logarítmicos, obtenemos

$$[x^2y_1'' + x(x^2 - 3)y_1' + 4y_1]\ln x + 2xy_1' + (x^2 - 4)y_1$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(n + r)(n + r - 1)b_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}(n + r)b_n x^{n+r+2} - 3\sum_{n=1}^{\infty}(n + r)b_n x^{n+r}$$
$$+ 4\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^{n+r} = 0$$

El término logarítmico se elimina porque su coeficiente es el lado izquierdo de la ecuación diferencial, y y_1 es una solución. Éste es siempre el caso (figura 5-42). Asimismo, usando la expresión y_1 en la ecuación 5-99, los términos que contienen y_1 pueden expresarse como

$$2xy_1' + (x^2 - 4)y_1 = 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n + 2)x^{2n+1}}{2^n n!} + x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2^n n!}$$
$$- 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2nx^{2n+2}}{2^n n!}$$

después de algunas manipulaciones. Observe que los términos que contienen y_1 sólo aportan potencias pares de x. Sustituyendo $r = 2$ y combinando las tres sumatorias con la misma potencia de x en sus términos generales, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2nx^{2n+2}}{2^n n!} + \sum_{n=1}^{\infty}n^2 b_n x^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n + 2)b_n x^{n+4} = 0$$

Nuevamente, para igualar el exponente de x en todas las sumatorias, corremos en 2 el índice de la última sumatoria reemplazando n por $n - 2$. Esto hará que la última sumatoria comience con $n = 3$. Para hacer que la segunda sumatoria comience con $n = 3$ también, eliminamos los términos que corresponden a $n = 1$ y $n = 2$, y combinamos las sumatorias. Además eliminamos los primeros términos de la primera sumatoria, de modo que ninguna sumatoria contenga un término con x^4 ni una potencia menor,

$$-x^4 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 2nx^{2n+2}}{2^n n!} + b_1x^3 + 4b_2x^4 + \sum_{n=3}^{\infty}n^2 b_n x^{n+2} + \sum_{n=3}^{\infty}nb_{n-2}x^{n+2} = 0$$

o

$$b_1x^3 + (4b_2 - 1)x^4 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 2nx^{2n+2}}{2^n n!} + \sum_{n=3}^{\infty}[n^2 b_n + nb_{n-2}]x^{n+2} = 0$$

Esta ecuación se satisfará con todas las x si y solo si el coeficiente de cada potencia de x es cero. Aplicando esta condición a los dos primeros términos obtenemos $b_1 = 0$ y $b_2 = 1/4$. Considerando que todos los términos con potencias impares de x proceden sólo de la segunda sumatoria, y corresponden a los valores impares de n, debemos tener $n^2b_n + nb_{n-2} = 0$ para las n impares. Pero $b_1 = 0$, y por tanto $b_n = 0$ para todas las n impares. Es decir, $b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0$. Entonces la segunda suma puede modificarse para excluir todos los términos con potencias impares de x reemplazando todas las apariciones de n por $2n$. Esto da

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2nx^{2n+2}}{2^n n!} + \sum_{n=2}^{\infty} [(2n)^2 b_{2n} + 2nb_{2n-2}]x^{2n+2} = 0$$

o

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n 2n}{2^n n!} + 4n^2 b_{2n} + 2nb_{2n-2} \right] x^{2n+2} = 0$$

El requisito de que desaparezcan los términos en los corchetes para todas las $n \geq 2$ da la relación de recurrencia:

$$b_{2n} = -\frac{b_{2n-2}}{2n} - \frac{(-1)^n}{2^n n!} = 0, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{5-100}$$

Recordando que $b_2 = 1/4$, tenemos

$$b_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2 1!}$$

$$b_4 = -\frac{b_2}{4} - \frac{1}{2^2 2!} = -\frac{3}{2^3 3!}$$

$$b_6 = -\frac{b_4}{6} + \frac{1}{2^3 3!} = \frac{7}{2^4 3!}$$

Generalizando, tenemos

$$b_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{2^{n+1} n!}, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Por tanto,

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)x^{2n+2}}{2^{n+1} n!} \tag{5-101}$$

Entonces, la solución general puede expresarse como $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Esta solución convergirá para cualquier valor positivo de x, salvo $x = 0$.

EJEMPLO 5-25 Teorema 5-3: Caso 3 (r_1 y r_2 difieren por un entero)

Resuelva la ecuación diferencial $x^2y'' + 2xy' - x^2y = 0$ alrededor del punto $x_0 = 0$ para $x > 0$ usando el método de Frobenius.

Solución Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables, y puede expresarse en la forma estándar dividiendo cada término entre x^2:

$$y'' + \frac{2}{x}y' - y = 0$$

Es claro que el punto $x = 0$ es singular, ya que por lo menos una función de coeficiente diverge en este punto. Sin embargo, es singular regular, ya que tanto $p(x) = xP(x) = 2$ como $q(x) = x^2Q(x) = -x^2$ son polinomios, es decir, funciones analíticas.

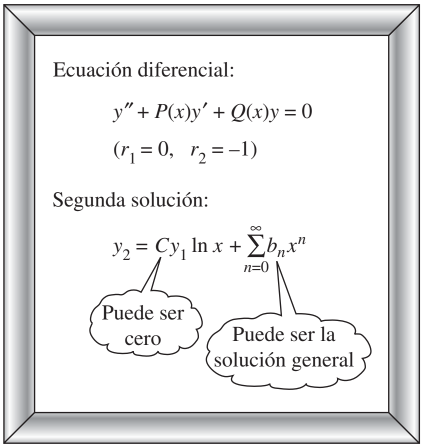


FIGURA 5-43
Cuando las raíces de la ecuación indicial difieren en un entero, la segunda solución puede contener un término logarítmico. Pero de no ser así ($C = 0$), usualmente da la solución general de manera directa.

Por las dos relaciones anteriores, observamos que $p_0 = 2$ y $q_0 = 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación indicial $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$ obtenemos $r^2 + r = 0$ o $r(r + 1) = 0$.

Las raíces de esta ecuación indicial son $r_1 = 0$ y $r_2 = -1$, que difieren en un entero. Entonces, de acuerdo con el teorema 5-3, la ecuación diferencial dada tiene dos soluciones linealmente independientes: la segunda puede contener un término logarítmico. Considerando que hay una buena probabilidad de que $C = 0$ y por tanto la segunda solución no contenga un término logarítmico, la mejor manera de manejar este problema es suponer que tal es el caso, y tratar de determinar la solución por serie correspondiente a la r menor, que es $r = r_2 = -1$. Obtener ceros para los coeficientes indicará que nuestra suposición es incorrecta. Conseguir una solución con dos constantes arbitrarias indicará que determinamos ambas soluciones linealmente independientes y, por tanto, la solución obtenida es la solución general (figura 5-43). Ahora suponemos una solución por serie de la forma

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r}$$

Diferenciando dos veces con respecto a x, tenemos

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) b_n x^{n+r-1}$$

y

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) b_n x^{n+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) b_n x^{n+r} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n + r) b_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r+2} = 0$$

Para igualar el exponente de x en todas las sumatorias, corremos en 2 el índice de la última sumatoria reemplazando n por $n - 2$, obteniendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) b_a x^{n+r} + 2\sum_{n=2}^{\infty} (n + r) b_a x^{n+r} - \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^{n+r} = 0$$

Ahora las potencias de x en todas las sumatorias son iguales, pero la segunda sumatoria comienza con $n = 2$. Para hacer que las demás sumatorias también comiencen con $n = 2$, eliminamos los términos que corresponden a $n = 0$ y $n = 1$, y combinamos las sumatorias,

$$[r(r - 1) + 2r] b_0 x^r + [r(1 + r) + 2(1 + r)] b_1 x^{r+1}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n + r)(n + r - 1) + 2(n + r)] b_n - b_{n-2}\} x^{n+r} = 0$$

Esta ecuación se satisfará con todas las x si y solo si el coeficiente de cada potencia de x es cero. Esta condición para la menor potencia de x (que es x^r), junto con el requisito de que $b_0 \neq 0$, nuevamente nos da la ecuación indicial ($r^2 + r = 0$), que solo se satisface con los dos valores de r antes determinados. El requisito de que desaparezcan los coeficientes de todas las demás potencias de x da por resultado

$$[r(1 + r) + 2(1 + r)] b_1 = 0$$

$$[(n + r)(n + r - 1) + 2(n + r)] b_n - b_{n-2} = 0 \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Para $r = r_2 = -1$, la primera relación da $0 \cdot b_1 = 0$, lo cual indica que b_1 es arbitrario, igual que b_0. La segunda relación da la relación de recurrencia:

$$b_n = \frac{b_{n-2}}{(n-1)n}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{5-102}$$

que expresa un coeficiente en términos del segundo coeficiente anterior. Por tanto, todos los coeficientes con índice par se expresarán en términos de b_0, y todos los coeficientes con índice impar en términos de b_1. Los coeficientes correspondientes a los valores pares de n pueden expresarse como

$$b_2 = \frac{b_0}{1 \cdot 2} = \frac{b_0}{2!}$$

$$b_4 = \frac{b_2}{3 \cdot 4} = \frac{b_0}{4!}$$

$$b_6 = \frac{b_4}{5 \cdot 6} = \frac{b_0}{6!}$$

Generalizando, tenemos

$$b_{2n} = \frac{b_0}{(2n)!}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Los coeficientes correspondientes a los valores impares de n pueden expresarse como

$$b_3 = \frac{b_1}{2 \cdot 3} = \frac{b_1}{3!}$$

$$b_5 = \frac{b_3}{4 \cdot 5} = \frac{b_1}{5!}$$

$$b_7 = \frac{b_5}{6 \cdot 7} = \frac{b_1}{7!}$$

Generalizando, tenemos

$$b_{2n+1} = \frac{b_1}{(2n+1)!}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Sustituyendo, obtenemos

$$\begin{aligned} y &= x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\ &= \frac{b_0}{x}\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + \frac{b_1}{x}\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right) \\ &= b_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!} + b_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \end{aligned} \tag{5-103}$$

Es fácil ver que estas dos soluciones son linealmente independientes (su relación no es una constante). Por tanto, no sólo carece de un término logarítmico, sino además contiene ambas soluciones linealmente independientes con constantes arbitrarias b_0 y b_1. Entonces concluimos que ésta es la solución general de la ecuación diferencial dada.

Si repetimos el análisis usando $r = r_1 = 0$, obtendremos como primera solución linealmente independiente

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

que es una de las soluciones en la ecuación 5-103. Si continuásemos con $r = r_2 = -1$ tomando la ecuación 5-83*b* como la segunda solución que contiene un término logarítmico, veríamos que $C = 0$. Entonces, la segunda solución no incluiría un término logarítmico, y a fin de cuentas tendríamos la ecuación 5-103 como la segunda solución linealmente independiente.

Esta solución convergirá para cualquier valor positivo de x salvo $x = 0$.

Repaso de la sección

5-21C ¿En qué se distingue el método de Frobenius del método de la serie de potencias al resolver ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes variables?

5-22C ¿Qué es la ecuación indicial? ¿Para qué se usan las raíces de la ecuación indicial de una ecuación diferencial dada?

5-23 Compruebe que el punto $x = 0$ es singular regular de las siguientes ecuaciones diferenciales y determine las raíces de la ecuación indicial r_1 y r_2:

a) $x^2y'' - xy' + 3y = 0$ *b*) $xy'' - \dfrac{2}{x(x+1)}y = 0$

(*Respuestas: a*) Las raíces son $r_1 = 1 + \sqrt{2i}$ y $r_2 = 1 - \sqrt{2i}$. *b*) Las raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = -1$.)

5-24 Determine la forma de dos soluciones linealmente independientes de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden alrededor del punto singular regular $x_0 = 0$ sin resolverlas. También determine el intervalo de valores de x dentro del cual convergen estas soluciones:

a) $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ *b*) $xy'' - \dfrac{2}{x(x+1)}y = 0$

(*Respuestas: a*) $y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $y_2(x) = Cy_1(x)\ln x + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, donde $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$, pero la constante C puede ser cero. La solución por serie converge para todas las $x > 0$; *b*) $y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $y_2(x) = Cy_1(x)\ln x + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, donde $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$, pero la constante C puede ser cero. La solución por serie convergirá para cualquier $x > 0$.)

5-25 Determine las soluciones generales de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden alrededor del punto singular regular $x_0 = 0$:

a) $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ *b*) $xy'' - \dfrac{2}{x(x+1)}y = 0$

(*Respuestas: a*) $y(x) = C_1x^3 + C_2x^{-1}$;

b) $y(x) = C_1\left(x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{10}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^6 - \frac{3}{28}x^7 + \cdots\right) + C_2\left(\frac{x+1}{x}\right)$.)

5-26 Determine las soluciones generales de las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden de Euler usando *a*) el método estándar y *b*) el método de Frobenius alrededor del punto singular regular $x_0 = 0$:

a) $x^2y'' + xy' - y = 0$ *b*) $2x^2y'' - xy' - 9y = 0$

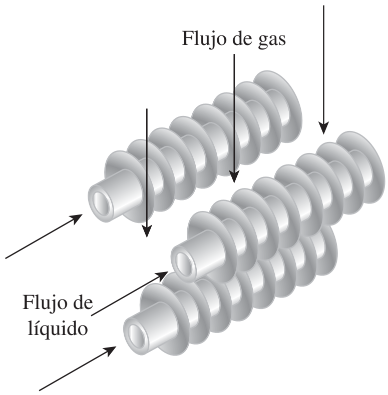
(*Respuestas: a*) $y(x) = C_1x + C_2x^{-1}$; *b*) $y(x) = C_1x^3 + Cx^{-3/2}$.)

5-7 ▪ ECUACIÓN DE BESSEL Y FUNCIONES DE BESSEL

Una de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes variables más importantes es la ecuación de Bessel de orden v:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \quad \textbf{(5-104)}$$

La ecuación toma su nombre del matemático y astrónomo alemán Friedrich W. Bessel (1784-1846) por sus estudios sistemáticos de esta ecuación. Se presenta en diversos problemas de física y de ingeniería, y su solución se expresa en términos de las funciones de Bessel, que probablemente son las funciones más conocidas después de las funciones elementales. Antes de explicar las soluciones de la ecuación de Bessel, ilustraremos con un ejemplo un origen de la ecuación de Bessel.



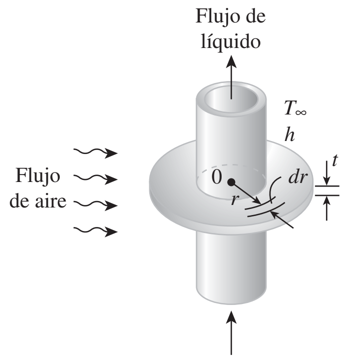


FIGURA 5-44
Aletas circulares de espesor uniforme t colocadas alrededor de tubos para aumentar la transferencia de calor.

EJEMPLO 5-26 Origen de la ecuación de Bessel

En los intercambiadores de calor compactos, frecuentemente se usan superficies extendidas llamadas *aletas* para mejorar la transferencia de calor al aumentar la superficie de transferencia. Uno de estos tipos que se usa frecuentemente alrededor de tubos es la aleta circular de espesor uniforme t, como se muestra en la figura 5-44. Por la simetría circular y por la alta conductividad térmica k del material de la aleta, la temperatura T en una aleta circular varía sólo en la dirección radial. El calor se transfiere al aire circundante desde ambos lados de la aleta, de acuerdo con la ley de Newton del enfriamiento (ver capítulo 1).

Tomando como cero la temperatura del aire circundante, obtenga la ecuación diferencial que describe la variación de temperatura de la aleta con respecto a r, en régimen permanente. Suponga que el coeficiente de transferencia térmica h entre la aleta y el aire circundante permanece constante. Use el principio de conservación de la energía y la ley de conducción térmica de Fourier.

Solución Para obtener la ecuación diferencial, necesitamos elegir un elemento de volumen diferencial adecuado en la aleta y aplicar el principio de conservación de la energía. En este caso conviene elegir un elemento de anillo de espesor dr en la ubicación r dentro de la aleta, como se muestra en la figura 5-45, ya que la temperatura cambia solo en la dirección r, y un elemento de anillo puede incorporar los cambios en esa dirección. En condiciones de régimen permanente, el contenido de energía del elemento de anillo permanecerá constante. Entonces el principio de conservación de la energía establece que el calor conducido hacia dentro del elemento en la ubicación r debe ser igual a la suma del calor conducido hacia fuera del elemento en $r + dr$ más el calor transferido al aire desde las superficies laterales. Es decir,

$$\begin{pmatrix}\text{Calor conducido hacia}\\ \text{dentro del elemento en}\\ \text{la ubicación } r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Calor conducido hacia}\\ \text{fuera del elemento en}\\ \text{la ubicación } r + dr\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Calor}\\ \text{transferido}\\ \text{al aire}\end{pmatrix}$$

o

$$Q_r = Q_{r+dr} + Q_{\text{aire}}$$

donde, por la ley de enfriamiento de Newton, tenemos

$$Q_{\text{aire}} = hS(T - T_{\text{aire}}) = 4\pi r\, dr\, hT$$

ya que $T_{\text{aire}} = 0$ y el área superficial de ambos lados del elemento diferencial es $S = 2 \times 2\pi r\, dr = 4\pi r\, dr$.

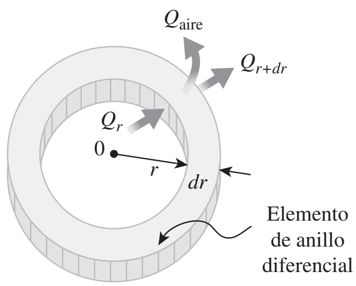


FIGURA 5-45
Elemento de anillo diferencial de la aleta circular y sus interacciones de energía.

Sustituyendo en la ecuación diferencial, dividiendo entre dr y reacomodando obtenemos

$$\frac{Q_{r+dr} - Q_r}{dr} + 4\pi hrT = 0$$

o

$$\frac{dQ}{dr} + 4\pi hrT = 0$$

donde usamos la definición de derivada como $dr \to 0$. Por la ley de Fourier de conducción térmica (ver capítulo 1), obtenemos

$$Q = -kA\frac{dT}{dr} = -k(2\pi rt)\frac{dT}{dr} = -2\pi ktr\frac{dT}{dr}$$

Sustituyendo y dividiendo entre la constante $2\pi kt$, tenemos

$$\frac{d}{dr}\left(-r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{2h}{kt}rT = 0$$

Realizando la diferenciación y multiplicando por r después de hacer $\lambda^2 = 2h/kt$, tenemos

$$r^2\frac{d^2T}{dr^2} + r\frac{dT}{dr} - \lambda^2 r^2 T = 0$$

Podemos eliminar el parámetro λ^2 definiendo una nueva variable x como $x = \lambda r$. Dado que $dx = \lambda dr$, la ecuación diferencial se vuelve (figura 5-46)

$$x^2\frac{d^2T}{dx^2} + x\frac{dT}{dx} - x^2T = 0 \qquad \textbf{(5-105)}$$

que es la ecuación deseada. Una comparación de esta ecuación diferencial con la ecuación 5-104 revela que las dos ecuaciones diferenciales son idénticas, salvo por el signo del último término y $v = 0$. La ecuación 5-105 se llama **ecuación modificada de Bessel de orden cero**, y su solución da origen a funciones modificadas de Bessel. La forma general de la función modificada de Bessel está dada como

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + v^2)y = 0 \qquad \textbf{(5-106)}$$

Dada la ecuación diferencial:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (\lambda^2x^2 - v^2)y = 0$$

Defina:

$$t = \lambda x$$

Sustituya:

$$\left(\frac{t}{\lambda}\right)^2\frac{d^2y}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2} + \frac{t}{\lambda}\frac{dy}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

$$+(t^2 - v^2)\,y = 0$$

Simplifique y obtenga:

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - v^2)y = 0$$

FIGURA 5-46
El parámetro λ^2 en la ecuación de Bessel o ecuación modificada de Bessel puede eliminarse definiendo una nueva variable como $t = \lambda x$.

Ahora examinemos más de cerca la ecuación de Bessel. Dividiéndola entre x^2 para hacer igual a uno el coeficiente principal, observamos que

$$P(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}$$

Por tanto, el origen —y solo el origen (el punto $x = 0$)— es un punto singular de la ecuación de Bessel. Es singular regular, ya que

$$p(x) = xP(x) = 1 \quad \text{y} \quad q(x) = x^2Q(x) = x^2 - v^2$$

son polinomios y por tanto funciones analíticas en $x = 0$. Por ambas relaciones, observamos que $p_0 = 1$ y $q_0 = -v^2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación indicial $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$, obtenemos

$$r^2 - \nu^2 = 0 \qquad \textbf{(5-107)}$$

cuyas raíces son $r_1 = \nu$ y $r_2 = -\nu$ (figura 5-47). Entonces, las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel pueden ser cualquiera de los tres casos que se describen en el teorema 5-3, dependiendo del valor de ν. Ahora consideramos estos casos por separado.

Ecuación de Bessel:

$$y'' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} y' + \underbrace{\frac{(x^2 - \nu^2)}{x^2}}_{Q(x)} y = 0$$

Observe que:

$$p(x) = xP(x) = 1$$
$$q(x) = x^2Q(x) = x^2 - \nu^2$$

Ecuación indicial:

$$r^2 - \nu^2 = 0$$

Raíces:

$$r_1 = \nu, \quad r_2 = -\nu$$

FIGURA 5-47
Las raíces de la ecuación indicial de la ecuación de Bessel siempre son iguales en magnitud y de signo opuesto.

EJEMPLO 5-27 Ecuación de Bessel de orden cero ($r_1 = r_2 = 0$)

Determine la solución general de la ecuación de Bessel de orden cero:

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \tag{5-108}$$

alrededor del punto $x_0 = 0$, para $x > 0$, usando el método de Frobenius.

Solución En este caso, $\nu = 0$ y las raíces de la ecuación indicial son (por la ecuación 5-107) $r_1 = r_2 = r = 0$, las cuales son idénticas. Entonces, de acuerdo con el teorema 5-3, la ecuación diferencial dada tiene dos soluciones linealmente independientes: la segunda contendrá un término logarítmico, y la primera es de la forma

$$y = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

ya que $r = 0$. Diferenciando dos veces y sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+2} = 0$$

Ahora corremos en 2 el índice de la última sumatoria reemplazando n por $n - 2$ y eliminamos el primer término de la segunda sumatoria correspondiente a $n = 1$, de modo que el exponente de x y los límites inferiores de n en todas las sumatorias sean iguales. Entonces podemos combinar las sumatorias en una:

$$a_1x - \sum_{n=2}^{\infty}\{[n(n-1) + n]a_n + a_{n-2}\}x^n = 0$$

Esta ecuación se satisfará para todos los valores de x si y solo si el coeficiente de cada potencia de x es cero. Por tanto, $a_1 = 0$ y $[n(n-1) + n]a_n + a_{n-2} = 0$. Entonces, la relación de recurrencia es

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{5-109}$$

que expresa un coeficiente en términos del segundo coeficiente que le antecede. Por tanto, todos los coeficientes con índices pares se expresarán en términos de a_0, y todos los coeficientes con índices impares se expresarán en términos de a_1, que se determinó como cero. Entonces, concluimos que $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$. Los coeficientes con índices pares pueden expresarse como

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2} = -\frac{a_0}{2^2(1!)^2}$$
$$a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{2^4(2!)^2}$$
$$a_6 = -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{a_0}{2^6(3!)^2}$$

Generalizando, tenemos

$$a_{2n} = \frac{(-1)^na_0}{2^{2n}(n!)^2}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

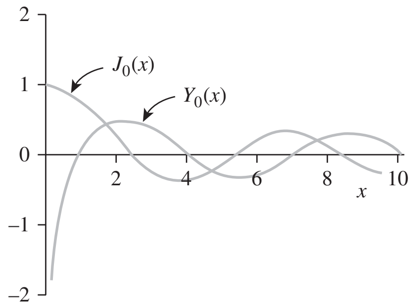


FIGURA 5-48
Función de Bessel de primera y segunda clases, de orden cero.

Ceros de $J_0(x)$	Intervalo entre ceros
2.4048	
5.5201	3.1153
8.6537	3.1336
11.7915	3.1378
14.9309	3.1394
—	—
—	—
—	—
—	π

FIGURA 5-49
Primeros cinco ceros de $J_0(x)$ y la distancia entre ellos.

Tomando $a_0 = 1$ y sustituyendo, la primera solución resulta

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

Esta solución se conoce como **función de Bessel de primera clase de orden cero**, y se simboliza como $J_0(x)$. Por tanto,

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \tag{5-110}$$

Considerando que el radio de convergencia de la ecuación de Bessel alrededor del origen es infinito, la serie representada por $J_0(x)$ converge para todas las x (incluyendo en este caso el origen), ya que $J_0(x)$ es analítica en $x = 0$. De hecho, podemos comprobar por sustitución directa que $J_0(x) = 1$ en $x = 0$.

En la figura 5-48 se presenta una gráfica de $J_0(x)$. Observe que $J_0(x)$ es una función oscilante con una amplitud decreciente al aumentar x, lo cual nos recuerda las funciones elementales $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Estas tres funciones tienen un número infinito de ceros, pero determinar los ceros de $J_0(x)$ no es fácil. En la figura 5-49 se dan los primeros cinco ceros de $J_0(x)$ y el intervalo entre ellos.

La segunda solución linealmente independiente se determina de manera similar tomando y_2, de acuerdo con el teorema 5-3, como

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r} = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

Diferenciando dos veces, sustituyendo en la ecuación diferencial y combinando los términos logarítmicos, obtenemos

$$[x^2 y_1'' + x y_1' + x^2 y_1] \ln x + 2x y_1' + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} = 0$$

Nuevamente, el término logarítmico desaparece —como se esperaba— ya que y_1 es una solución. Asimismo, usando la expresión de y_1 (ecuación 5-110), el término $2xy_1'$ puede expresarse como

$$2xy_1' = 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n) x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2} = -x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (4n) \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

Ahora, manipulando las sumatorias exactamente como lo hicimos en la primera parte de esta solución, eliminando los primeros términos y sustituyendo, tenemos

$$-x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (4n) \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} + b_1 x + 4b_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 b_n + b_{n-2}) x^n = 0$$

Esta ecuación se satisfará para todas las x si y solo si el coeficiente de cada potencia de x es cero. Aplicando esta condición a las primeras dos potencias de x obtenemos $b_1 = 0$ y $b_2 = 1/4$. Dado que los términos con potencias impares de x provienen solo de la segunda sumatoria, y que corresponden a los valores impares de n, debemos tener $n^2 b_n + n b_{n-2} = 0$ para las n impares. Pero $b_1 = 0$ y, por tanto, $b_n = 0$ para todas las n impares. Es decir, $b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0$. Entonces la segunda suma puede modificarse para excluir todos los términos con potencias impares de x reemplazando todas las apariciones de n por $2n$. Esto da

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (4n) \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} [(2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2}] x^{2n} = 0$$

o $$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n(4n)\frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} + 4n^2 b_{2n} + b_{2n-2}\right]x^{2n} = 0$$

El requisito de que los términos en los corchetes desaparezcan para todas las $n \geq 2$ da como resultado la relación de recurrencia:

$$b_{2n} = -\frac{b_{2n-2}}{4n^2} - \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2 n}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{5-111}$$

Recordando que $b_2 = 1/4$, tenemos

$$b_4 = -\frac{b_2}{4 \cdot 2^2} - \frac{1}{2^4(2!)^2 2} = -\frac{1}{2^4(2!)^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$
$$b_6 = -\frac{b_4}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^6(3!)^2 3} = \frac{1}{2^6(3!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

Generalizando, tenemos

$$b_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}S_n}{2^{2n}(n!)^2}, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

donde definimos una nueva función S_n como

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \tag{5-112}$$

Por tanto, $$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}S_n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

Esta segunda solución linealmente independiente convergirá para todas las x, salvo para $x = 0$, debido al término logarítmico.

Conociendo y_1 y y_2, podríamos expresar la solución general de la ecuación de Bessel de orden cero como una combinación lineal de ambas. Sin embargo, es práctica común expresar la segunda solución como

$$Y_0 = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma - \ln\frac{x}{2}\right)J_0 + y_2\right]$$

o, $$\boxed{Y_0 = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}S_n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right]} \tag{5-113}$$

debido a las características más deseables de $Y_0(x)$ cuando $x \to \infty$. Aquí la constante γ es la *constante de Euler*, cuyo valor se determina como

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \cong 0.577215665 \tag{5-114}$$

La función $Y_0(x)$ se conoce como **función de Bessel de segunda clase de orden cero**. Entonces, la solución general de la ecuación de Bessel de orden cero para $x > 0$ puede expresarse como

$$\boxed{y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)} \tag{5-115}$$

donde las constantes C_1 y C_2 van a determinarse a partir de las condiciones iniciales o en la frontera.

En la figura 5-48 también se presenta una gráfica de $Y_0(x)$. Observe que $Y_0(x)$ oscila con amplitud decreciente al aumentar x, y también tiene un número infinito de ceros. Pero, a diferencia de $J_0(x)$, la función $Y_0(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0$. Por tanto, si la solución ha de permanecer finita en $x = 0$, lo cual a menudo es el caso, entonces debemos elegir $C_2 = 0$ para descartar $Y_0(x)$ de la solución. Por ejemplo, cuando determinamos la distribución de temperaturas en un cilindro *hueco*, la solución puede incluir $Y_0(x)$ porque el medio no contiene el punto $x = 0$. Pero la solución para un cilindro *macizo* puede no contener la función $Y_0(x)$ porque en este caso el medio contiene el punto $x = 0$, y ahí la temperatura no puede ser infinita. Comúnmente se usa este hecho como una de las condiciones en la frontera, y se expresa como $C_2 = 0$.

EJEMPLO 5-28 **Ecuación de Bessel de orden un medio ($r_1 = 1/2, r_2 = -1/2$)**

Determine la solución general de la ecuación de Bessel de orden un medio:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \qquad \textbf{(5-116)}$$

alrededor del punto $x_0 = 0$ para $x_0 > 0$, usando el método de Frobenius.

Solución En este caso, $v = 1/2$, y las raíces de la ecuación indicial son (por la ecuación 5-107) $r_1 = 1/2$ y $r_2 = -1/2$, que difieren en un entero. Entonces, de acuerdo con el teorema 5-3, la ecuación diferencial dada tiene dos soluciones linealmente independientes; la segunda *puede* contener un término logarítmico. Considerando que hay una buena posibilidad de que $C = 0$ y, por tanto, la segunda solución no contenga un término logarítmico, la mejor manera de manejar este problema es suponer que tal es el caso, y tratar de determinar la solución por serie correspondiente a la menor r, que es $r = r_2 = -1/2$. Obtener ceros para los coeficientes indicará que nuestra suposición es errónea. Conseguir una solución con dos constantes arbitrarias indicará que determinamos *ambas* soluciones linealmente independientes, y por tanto la solución obtenida es la solución general. Ahora suponemos una solución por serie de la forma

$$y = x^r\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r}$$

Diferenciando dos veces con respecto a x y sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n + r)(n + r - 1)b_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)b_n x^{n+r}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)b_n x^{n+r+2} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r} = 0$$

Para igualar el exponente de x en todas las sumatorias, corremos en 2 el índice de la tercera sumatoria reemplazando n por $n - 2$. Este proceso igualará las potencias de x en todas las sumatorias; pero la tercera sumatoria comenzará con $n = 2$. Para que las otras sumatorias también comiencen con $n = 2$, eliminamos los términos que corresponden a $n = 0$ y $n = 1$, y combinamos las sumatorias.

$$\left[r(r-1)+r-\frac{1}{4}\right]b_0x^r+\left[r(r+1)+(1+r)-\frac{1}{4}\right]b_1x^{r+1}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(n+r)(n+r-1)+(n+r)-\frac{1}{4}\right]b_n+b_{n-2}\right\}x^{n+r}=0$$

Esta ecuación se satisfará con todas las x si y solo si el coeficiente de cada potencia de x es cero. Sustituyendo $r = r_2 = -1/2$, obtenemos (después de las simplificaciones)

$$0 \cdot b_0 = 0$$

$$0 \cdot b_1 = 0$$

$$n(n-1)b_n + b_{n-2} = 0, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

El primer par de relaciones indica que los primeros dos coeficientes b_0 y b_1 son arbitrarios. La última relación da la relación de recurrencia:

$$b_n = -\frac{b_{b-2}}{(n-1)n}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{5-117}$$

que expresa un coeficiente en términos del segundo anterior. Por tanto, todos los coeficientes con índice par se expresarán en términos de b_0, y todos los coeficientes con índice impar en términos de b_1. Los coeficientes correspondientes a valores pares de n pueden expresarse como

$$b_2 = -\frac{b_0}{1 \cdot 2} = -\frac{b_0}{2!}$$

$$b_4 = -\frac{b_2}{3 \cdot 4} = \frac{b_0}{4!}$$

$$b_6 = -\frac{b_4}{5 \cdot 6} = -\frac{b_0}{6!}$$

Generalizando, tenemos

$$b_{2n} = \frac{(-1)^n b_0}{(2n)!}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Los coeficientes correspondientes a los valores impares de n pueden expresarse como

$$b_3 = -\frac{b_1}{2 \cdot 3} = -\frac{b_1}{3!}$$

$$b_5 = -\frac{b_3}{4 \cdot 5} = \frac{b_1}{5!}$$

$$b_7 = -\frac{b_5}{6 \cdot 7} = -\frac{b_1}{7!}$$

Generalizando, tenemos

$$b_{2n+1} = \frac{(-1)^n b_1}{(2n+1)!}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Sustituyendo, obtenemos

$$y = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[b_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + b_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[b_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + b_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}(b_0 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) \tag{5-118}$$

Es fácil ver que las dos soluciones anteriores son linealmente independientes (la relación de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ es $\tan x$, que no es una constante). Por tanto, la solución no sólo carece de un término logarítmico, sino que también contiene ambas soluciones linealmente independientes con constantes arbitrarias b_0 y b_1. Entonces concluimos que ésta es la solución general de la ecuación de Bessel de orden un medio.

Si repetimos el análisis usando $r = r_1 = -1/2$, obtendremos como primera solución linealmente independiente

$$y_1 = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \operatorname{sen} x$$

que es una de las soluciones de la ecuación 5-118, de la cual difiere sólo por una constante. Si continuásemos con $r = r_1 = -1/2$, tomando la ecuación 5-83*b* como la segunda solución que contiene un término logarítmico, veríamos que $C = 0$ y, por tanto, la segunda solución no incluiría un término logarítmico, y a fin de cuentas tendríamos la ecuación 5-118 como la segunda solución linealmente independiente.

Se acostumbra expresar esta solución en términos de las **funciones de Bessel de orden un medio** como (figura 5-50)

$$y = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x) \tag{5-119}$$

donde $$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \tag{5-120}$$

Nuevamente, las constantes arbitrarias C_1 y C_2 (o b_0 y b_1) van a determinarse a partir de las condiciones en la frontera o iniciales. También observe que las funciones de Bessel de orden un medio oscilan exactamente igual que las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, pero su amplitud disminuye al aumentar x debido al factor $\sqrt{x}$ en el denominador.

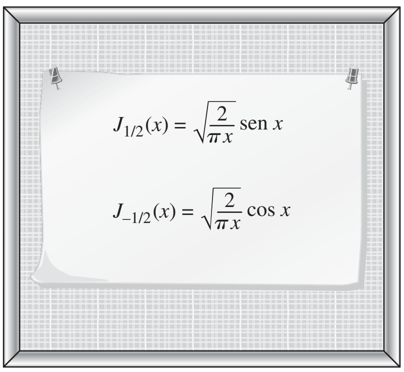


FIGURA 5-50
Las funciones de Bessel de orden un medio se relacionan con las funciones trigonométricas sen x y cos x.

EJEMPLO 5-29 **Ecuación de Bessel de orden ν (donde ν es un entero positivo)**

Determine la solución general de la ecuación de Bessel de orden ν

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{5-121}$$

donde ν es un entero positivo, alrededor del punto $x_0 = 0$ para $x_0 > 0$, usando el método de Frobenius.

Solución En este caso, las raíces de la ecuación indicial son (por la ecuación 5-107), $r_1 = \nu$ y $r_2 = -\nu$, que difieren en un entero. Entonces, de acuerdo con el teorema 5-3, la ecuación diferencial dada tiene dos soluciones linealmente independientes: la segunda *puede* contener un término logarítmico y la primera es de la forma

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu}$$

Diferenciando dos veces y sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)(n+\nu-1)a_n x^{n+\nu}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)a_n x^{n+\nu}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\nu+2}-\nu^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\nu}=0$$

Ahora corremos en 2 el índice de la tercera sumatoria reemplazando n por $n-2$, y eliminamos los primeros dos términos de las otras sumatorias, correspondientes a $n=0$ y $n=1$, de modo que el exponente de x y el límite inferior de n en las sumatorias sean iguales. Entonces podemos combinar las sumatorias en una:

$$\begin{aligned}&[\nu(\nu-1)+\nu-\nu^2]a_0x^{\nu}+[\nu(\nu+1)+(\nu+1)-\nu^2]a_1x^{\nu+1}\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\{[(n+\nu)(n+\nu-1)+(n+\nu)-\nu^2]a_n+a_{n-2}\}x^{n+\nu}=0\end{aligned}$$

o

$$(2\nu+1)a_1x^{\nu+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\{n(n+2\nu)a_n+a_{n-2}\}x^{n+\nu}=0$$

Esta ecuación se satisfará con todas las x si y solo si el coeficiente de cada potencia de x es cero. Por tanto,

$$a_1=0$$

$$n(n+2\nu)a_n+a_{n-2}=0$$

Entonces, la relación de recurrencia es

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)}\qquad n=2,3,4,\ldots\tag{5-122}$$

que expresa un coeficiente en términos del segundo anterior. Por tanto, todos los coeficientes con índice par se expresarán en términos de a_0, y todos los coeficientes de índice impar en términos de a_1, que debe ser cero ya que $2\nu+1$ no puede ser cero cuando ν es un entero positivo. Entonces concluimos que $a_1=a_3=a_5=\cdots=0$. Los coeficientes de índice par pueden expresarse como

$$a_2=-\frac{a_0}{2(2+2\nu)}=-\frac{a_0}{2^2(1+\nu)}$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4(4+2\nu)}=\frac{a_0}{2^4 2!(1+\nu)(2+\nu)}$$

$$a_6=-\frac{a_4}{6(6+2\nu)}=-\frac{a_0}{2^6 3!(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}$$

Generalizando, tenemos

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}n!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)}\tag{5-123}$$

o

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n a_0\nu!}{2^{2n}n!(n+\nu)!},\qquad n=1,2,3,4,\ldots\tag{5-124}$$

ya que ν es un entero positivo. Sustituyendo, la primera solución resulta

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a_0\nu!x^{2n+\nu}}{2^{2n}n!(n+\nu)!}$$

La constante a_0 puede elegirse con cualquier valor adecuado mientras no sea cero. En este caso, se acostumbra tomar $a_0=1/(\nu!2^{\nu})$. Sustituyendo, obtenemos

$$\boxed{J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu}n!(n+\nu)!}}\tag{5-125}$$

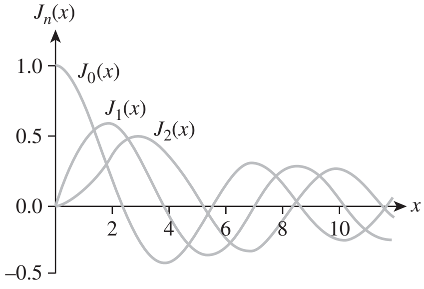


FIGURA 5-51
Funciones de Bessel de la primera clase.

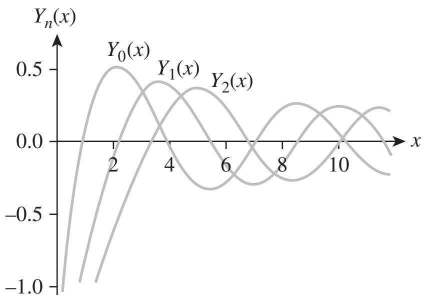


FIGURA 5-52
Funciones de Bessel de la segunda clase.

Esta función se conoce como **función de Bessel de la primera clase de orden ν**, y comúnmente se toma como la primera solución de la ecuación de Bessel de orden ν, donde ν es un entero positivo. Cuando $\nu = 0$, la relación $J_\nu(x)$ se reduce a la expresión $J_0(x)$ (ecuación 5-110), como se esperaba.

La segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel de orden ν se determina siguiendo el procedimiento usado para determinar $Y_0(x)$.

$$Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_\nu(x) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\nu-1}\frac{(\nu-n-1)!x^{2n-\nu}}{2^{2n-\nu}n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(S_n + S_{n+\nu})x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu}n!(n+\nu)!}\right] \tag{5-126}$$

La función $Y_\nu(x)$ se llama **función de Bessel de la segunda clase de orden ν**. En las figuras 5-51 y 5-52 se grafican las primeras $J_\nu(x)$ y $Y_\nu(x)$. Observe que las funciones $J_\nu(x)$ se comportan en forma muy parecida a la manera en que se comporta $J_0(x)$. Esto también es verdad para las funciones $Y_\nu(x)$ y $Y_0(x)$.

La solución general de la ecuación de Bessel de orden ν para $\nu > 0$ puede expresarse como

$$y(x) = C_1J_\nu(x) + C_2Y_\nu(x) \tag{5-127}$$

donde las constantes C_1 y C_2 van a determinarse a partir de las condiciones iniciales o en la frontera.

Las funciones $J_\nu(x)$ y $Y_\nu(x)$ oscilan con amplitud decreciente cuando x aumenta, y tienen un número infinito de ceros. Pero, a diferencia de $J_\nu(x)$, las funciones $Y_\nu(x) \to \infty$ cuando $x \to 0$. Por tanto, si la solución ha de permanecer finita en $x = 0$, como en la mayoría de los casos, entonces debemos elegir $C_2 = 0$ para descartar $Y_\nu(x)$ de la solución.

Función gamma

Cuando v no es un entero, la solución de la ecuación de Bessel de orden v incluye el factorial de no enteros, que se representan mejor por la **función gamma** $\Gamma(v)$, que se define para todas las $v > 0$ por la integral impropia

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty t^{\nu-1}e^{-t}dt \tag{5-128}$$

Reemplazando v por $v + 1$ e integrando por partes, obtenemos

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu) \tag{5-129}$$

También observe que para $v = 1$,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty -e^{-t}dt = e^{-t}\Big|_0^\infty = 1 \tag{5-130}$$

Entonces, para valores enteros de v, tenemos

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2(1) = 2!$$
$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3(2!) = 3!$$

y

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5-131}$$

Observe que $0! = 1$, por definición. Por tanto, la función factorial puede visualizarse como un caso especial de la función gamma con argumentos enteros. Para valores no enteros de v, la aplicación de la ecuación 5-129 a $\Gamma(n + v + 1)$ varias veces da

$$(1 + v)(2 + v)\cdots(n + v) = \frac{\Gamma(n + v + 1)}{\Gamma(v + 1)} \tag{5-132}$$

Cuando v es un múltiplo impar de $1/2$ (tal como $1/2$, $3/2$, $5/2$, etc.) entonces podemos demostrar que (figura 5-53)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{5-133}$$

y

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n - 1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}(n - 1)!} \tag{5-134}$$

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n - 1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}(n - 1)!}$$

$$\Gamma(n + v + 1) = (1 + v)(2 + v)\cdots(n + v)\Gamma(v + 1)$$

FIGURA 5-53
Algunos valores especiales de la función gamma ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

EJEMPLO 5-30 Ecuación de Bessel de orden v (donde v es un no entero positivo)

Determine la solución general de la ecuación de Bessel de orden v

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

donde v es un no entero positivo, alrededor del punto $x_0 = 0$ para $x > 0$ usando el método de Frobenius.

Solución En este caso, las raíces de la ecuación indicial todavía son (por la ecuación 5-107) $r_1 = v$ y $r_2 = -v$, pero en esta ocasión no difieren por un entero. Entonces, de acuerdo con el teorema 5-3, la ecuación diferencial dada tiene dos soluciones linealmente independientes, ambas de la forma

$$y_1 = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Para $r_1 = v$, el procedimiento de resolución para la primera solución y_1 es exactamente como el que se dio en el ejemplo anterior, salvo que ahora el factor $[(1 + v)(2 + v)\cdots(n + v)]$ necesita expresarse en términos de las funciones gamma (ecuación 5-131) en vez de factoriales. La primera solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel en este caso se obtiene fácilmente reemplazando $(n + v)!$ en la ecuación 5-125 por $\Gamma(n + v + 1)$, cuando es su equivalente en términos de funciones gamma,

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+v}}{2^{2n+v} n!\Gamma(n + v + 1)} \tag{5-135}$$

Nuevamente, ésta es la función de Bessel de la primera clase de orden v, que se reduce a la ecuación 5-125 cuando v es un entero.

La segunda solución linealmente independiente y_2 se determina fácilmente a partir de la primera solución (ecuación 5-132) reemplazando todas las apariciones de v por $-v$. La función resultante se llama *función de Bessel de la primera clase de orden* $-v$, y está dada por

$$J_{-v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-v}}{2^{2n-v} n!\Gamma(n - v + 1)} \tag{5-136}$$

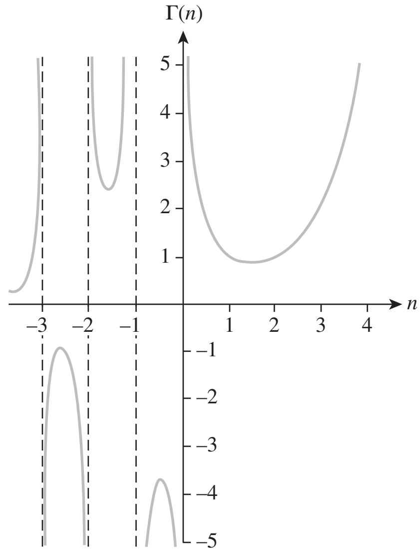


FIGURA 5-54
Gráfica de la función gamma.

Entonces la solución general de la ecuación de Bessel de orden v, siendo v un no entero para $x > 0$, puede expresarse como

$$y(x) = C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x), \quad v \text{ no entero} \tag{5-137}$$

donde las constantes C_1 y C_2 van a determinarse a partir de las condiciones iniciales o en la frontera.

La función $J_v(x)$ es analítica para todas las x, pero la función $J_{-v}(x)$ diverge en $x = 0$. Asimismo, el argumento de la función gamma en $J_{-v}(x)$ puede ser negativo. La función gamma para tales casos todavía es definida mientras su argumento no sea igual a un entero negativo, como se muestra en la figura 5-54.

Caso especial: $\quad v = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots, n + \frac{1}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

Cuando v es un múltiplo impar de $1/2$, entonces las raíces de la ecuación indicial difieren en $v - (-v) = 2v$, que es un entero. Por tanto, ordinariamente esperaríamos que la segunda solución linealmente independiente contuviera un término logarítmico $C \ln xJ_v(x)$. Sin embargo, las funciones $J_v(x)$ y $J_{-v}(-x)$ resultan ser linealmente independientes en este caso, y, consecuentemente, la constante C es cero. Por tanto, la solución antes obtenida para v no entero también es aplicable a este caso. Además, la función gamma en el denominador puede determinarse fácilmente en este caso usando las ecuaciones 5-133 y 5-134.

Propiedades de las funciones de Bessel

Tras obtener las expansiones de serie de $J_v(x)$, $J_{-v}(x)$ y $Y_v(x)$, se deja al estudiante como ejercicio demostrar que se aplican las siguientes relaciones que incluyen funciones de Bessel y sus derivadas:

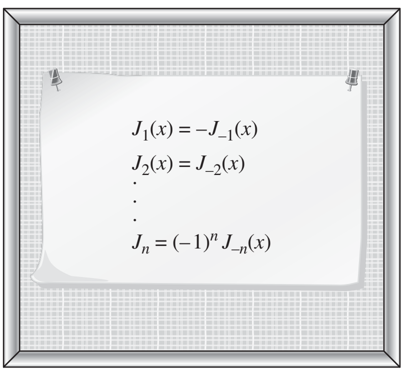


FIGURA 5-55
Cuando v es un entero, las funciones $J_v(x)$ y $J_{-v}(x)$ se vuelven dependientes.

1. Cuando v es un entero, las funciones $J_v(x)$ y $J_{-v}(x)$ son dependientes y están relacionadas entre sí por (figura 5-55)

$$J_v(x) = (-1)^n J_{-v}(x), \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{5-138}$$

2. Relaciones de recurrencia:

$$J_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x) - J_{v-1}(x) \tag{5-139}$$

y

$$J_{v+1}(x) = -2\frac{dJ_v(x)}{dx} + J_{v-1}(x) \tag{5-140}$$

3. Derivadas:

$$\frac{d}{dx}[x^v J_v(x)] = x^v J_{v-1}(x) \tag{5-141}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-v} J_v(x)] = -x^{-v} J_{v+1}(x) \tag{5-142}$$

$$\frac{d}{dx}[x^v J_v(kx)] = kx^v J_{v-1}(kx) \tag{5-143}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-v} J_v(kx)] = -kx^{-v} J_{v+1}(kx) \tag{5-144}$$

Las derivadas que incluyen la función de Bessel de la segunda clase se obtienen reemplazando J_v en las relaciones anteriores por Y_v.

4. Integrales:

$$\int x^v J_{v-1}(x)dx = x^v J_v(x) + C \tag{5-145}$$

$$\int x^{-v} J_{v+1}(x)dx = -x^{-v} J_v(x) + C \tag{5-146}$$

$$\int [J_{v-1}^2(x) - J_{v+1}^2(x)]\, x\, dx = 2vJ_v^2(x) + C \tag{5-147}$$

$$\int J_{v+1}(x)dx = \int J_{v-1}(x)dx - 2J_v(x) \tag{5-148}$$

EJEMPLO 5-31 **Integrales de las funciones de Bessel**

Usando las relaciones integrales (ecuaciones 5-145 y 5-146), compruebe que

a) $\int xJ_0(x)dx = xJ_1(x) + C$

b) $\int J_1(x)dx = -J_0(x) + C$

c) $\int J_3(x)dx = -J_2(x) - \frac{2}{x}J_1(x) + C$

Solución *a*) Esta integral se obtiene directamente de la ecuación 5-145 sustituyendo $v = 1$.

b) Esta integral se obtiene directamente de la ecuación 5-146 sustituyendo $v = 0$.

c) Esta integral no está en la forma de ninguna de las integrales dadas, pero puede expresarse en la forma de la ecuación 5-146 multiplicando y dividiendo el integrando entre x^2:

$$I = \int J_3(x)dx = \int x^2[x^{-2}J_3(x)]\, dx$$

Integrando por partes tomando $u = x^2$ y $dv = x^{-2}J_3(x)dx$ resulta

$$I = -J_2(x) + 2\int x^{-1}J_2(x)dx$$

Podemos determinar esta integral por la ecuación 5-146, y obtenemos el resultado deseado:

$$I = -J_2v(x) - \frac{2}{x}J_1(x) + C$$

Funciones de Bessel modificadas

Cuando el último término es negativo, la ecuación de Bessel se llama ecuación de Bessel modificada, y se expresa como

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + v^2)y = 0 \tag{5-149}$$

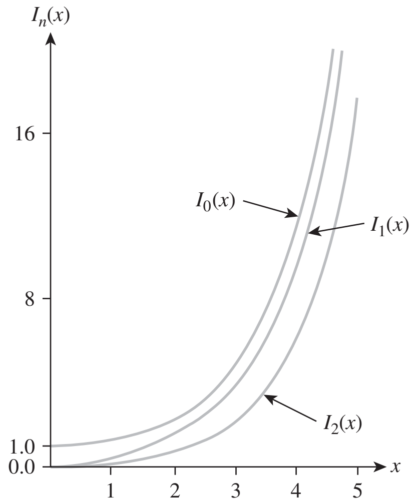


FIGURA 5-56
Funciones de Bessel modificadas de la primera clase.

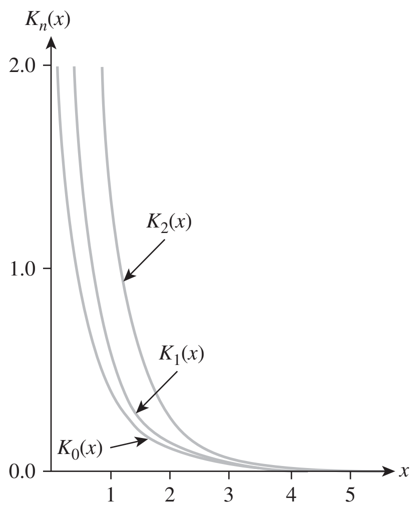


FIGURA 5-57
Funciones de Bessel modificadas de la segunda clase.

La solución de esta ecuación se expresa en términos de las **funciones de Bessel modificadas** I_v y K_v, que se relacionan con las funciones de Bessel ordinarias, para $v \geq 0$, por

$$I_v(x) = (i)^{-v} J_v(ix) \tag{5-150}$$

$$I_{-v}(x) = (i)^{v} J_{-v}(ix) \tag{5-151}$$

$$K_v(x) = (-1)^{v+1}\left[\gamma + \ln\frac{x}{2}\right] I_v(x) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{v-1}\frac{(-1)^n(v-n-1)!x^{2n-v}}{2^{2n-v}}$$
$$+ \frac{1}{2}(-1)^v \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(S_n + S_{n+v})x^{2n+v}}{2^{2n+v}n!(n+v)!} \tag{5-152}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y en la última relación v es un entero. Entonces la solución general de las ecuaciones de Bessel modificadas se expresa como

$$y = C_1 I_v(x) + C_2 I_{-v}(x), \text{ (}v\text{ no entero)} \tag{5-153}$$

o

$$y = C_1 I_v(x) + C_2 K_v(x), \text{ (}v\text{ entero)} \tag{5-154}$$

En las figuras 5-56 y 5-57 se grafican las primeras funciones de Bessel modificadas de la primera y la segunda clases. Observe que la función $I_v(x)$ es finita en $x = 0$, pero se incrementa rápidamente al aumentar x. La función $K_v(x)$, por otro lado, es no acotada en $x = 0$, pero desaparece rápidamente al aumentar x. Para valores grandes de x, estas dos funciones no dependen de v, y son aproximadamente

$$I_v(x) \cong \frac{e^x}{\sqrt{2x\pi}} \quad \text{y} \quad K_v(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x} \tag{5-155}$$

Repaso de la sección

5-27C ¿En qué se distingue la ecuación de Bessel modificada de orden v de la ecuación de Bessel?

5-28C ¿Para cuáles valores de v diferirán en un entero las raíces de la ecuación indicial de la ecuación de Bessel de orden v?

5-29C ¿En qué son similares y en qué son diferentes las funciones $J_0(x)$ y $\cos x$?

5-30 Usando el método de Frobenius, determine la primera solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel de orden 1. Compárela con $J_1(x)$.

(*Respuestas:* $y_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{384}x^5 - \frac{1}{18\,432}x^7 + \cdots$

mientras que $J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}n!(n+1)!}x^{2n+1}$

cuyos cuatro primeros términos concuerdan con $y_1(x)$.)

5-31 Determine las siguientes integrales que incluyen funciones de Bessel:

a) $\int x^2 J_1(x)\,dx$ *b)* $\int \frac{1}{x^2} J_3(x)\,dx$

(*Respuestas: a)* $x^2 J_2(x) + C$ y *b)* $-\frac{J_2(x)}{x^2} + C$.)

5-8 ▪ MÉTODOS DE COMPUTADORA

Los paquetes de software a veces dan soluciones de ecuaciones diferenciales en términos de **funciones especiales**. Los polinomios de Legendre y Hermite, y las funciones de Bessel son ejemplos de funciones especiales que ya vimos. Otros ejemplos son la función de Airy $Ai(x)$ y $Bi(x)$, que son las dos soluciones independientes de la ecuación de Airy $y'' - xy = 0$. Las funciones especiales pueden tener nombres diferentes en programas distintos. Por ejemplo, en MuPAD, las funciones de Airy son funciones de dos variables, y se llaman `airyAi(x,n)` y `airyBi(x,n)`, donde n indica la n-ésima derivada de la función de Airy. Entonces `airyAi(x,0)` y `airyBi(x,0)` da las funciones de Airy que se presentaron en la sección 5-4. En Maple y Mathematica, son funciones solo de x, y se ponen con mayúsculas como `AiryAi` y `AiryBi`. En la tabla 5-1 se da una lista de algunas de las funciones especiales disponibles en los diversos paquetes de software.

TABLA 5-1

Llamadas de funciones especiales según cada lenguaje.

Nombre y símbolo	MuPAD	Maple	Mathematica
Airy, $Ai(x)$	`airyAi(x)`	`AiryAi(x)`	`AiryAi[x]`
Airy, $Bi(x)$	`airyBi(x)`	`AiryBi(x)`	`AiryBi[x]`
Chebyshev 1st Kind, $T(n, x)$	`chebyshev1(n,x)`	`ChebyshevT(n,x)`	`ChebyshevT[n,x]`
Gamma, $\Gamma(x)$	`gamma(x)`	`GAMMA(x)`	`Gamma[x]`
Hermite, $H_n(x)$	`hermite(n,x)`	`HermiteH(n,x)`	`HermiteH[n,x]`
Bessel I, $I_n(x)$	`besselI(n,x)`	`BesselI(n,x)`	`BesselI[n,x]`
Bessel J, $J_n(x)$	`besselJ(n,x)`	`BesselJ(n,x)`	`BesselJ[n,x]`
Bessel K, $K_n(x)$	`besselK(n,x)`	`BesselK(n,x)`	`BesselK[n,x]`
Laguerre, $L(n, a, x)$	`laguerreL(n,a,x)`	`L(n,ax)`	`LaguerreL[n,a,x]`
Legendre, $P_n(x)$	`legendre(n,x)`	`LegendreP(n,x)`	`LegendreP[n,x]`
Bessel Y, $Y_n(x)$	`besselY(n,x)`	`BesselY(n,x)`	`BesselY[n,x]`

Soluciones con MuPAD

Considere la ecuación de Legendre con $\alpha = 2$: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Tiene un punto singular ordinario y puede resolverse en MuPAD con la siguiente sesión:

```
[eqn1:=ode({(1-x^2)*y"(x)-2*x*y'(x)+6*y(x)=0,
  y(0)=1,y'(0)=0},y(x)):
```

```
[solve(eqn1)
```

$$\{1 - 3x^2\}$$

El resultado es un polinomio finito de grado 2.

La ecuación de Airy $y'' - xy = 0$ con las mismas condiciones iniciales puede resolverse mediante la siguiente sesión.

```
[eqn2:=ode({y"(x)-x*y(x)=0,y(0)=1,y'(0)=0},y(x)):
[solve(eqn2)
```

$$\left\{\frac{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\mathrm{airyAi}(x, 0)}{2} + \frac{3^{1/6}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\mathrm{airyBi}(x, 0)}{2}\right\}$$

donde $\Gamma(x)$ es otra función especial llamada *función gamma*. En la tabla 5-1 se presenta una lista de algunas de las funciones especiales disponibles en MuPAD.

TABLA 5-2

Evaluación de funciones especiales por lenguaje

Resultado	MuPAD	Maple	Mathematica
Serie finita simbólica	orthpoly	simplify	Series
Serie finita simbólica	series	series	Series
Resultado numérico	float	evalf	//N

La función gamma se evalúa seleccionando el símbolo griego de la tabla de letras griegas o tecleando `gamma(x)`. En la tabla 5-2 se muestra que la función `float` se usa para evaluar numéricamente funciones especiales. Por ejemplo,

```
[float(gamma(2/3))
```

$$1.354117939$$

```
[float(airyAi(2,0))
```

$$0.03492413042$$

Si prefiere una solución explícita de serie, puede usar la opción **serie**, como sigue. Usando como ejemplo la ecuación de Legendre con $\alpha = 3$, resolverla con la función **solve** (incluso con condiciones iniciales sencillas como $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$), da por resultado una expresión complicada y demasiado detallada para mostrarla aquí (pruébela). Sin embargo, incluso con condiciones iniciales arbitrarias, la solución de serie no es muy complicada. La sesión es

```
[eqn3:=(1-x^2)*y"(x)-2*x*y'(x)+12*y(x)=0:
[ode::series({y(0)=a,y'(0)=b,eqn3},y(x),x=0)
```

$$\left\{a + bx - 6ax^2 - \frac{5b}{3}x^3 + 3ax^4 + O(x^6)\right\}$$

Para evaluar simbólicamente una función especial como serie *finita*, es decir, como polinomio, use ya sea la opción `orthpoly::` o la función `series`. El paquete `orthpoly` proporciona algunos polinomios ortogonales estándar. Llame las funciones de paquete usando simplemente el nombre del paquete `orthpoly` y el nombre de la función. Por ejemplo, el polinomio de Legendre de quinto orden se obtiene así:

```
[orthpoly::legendre(5,x)
```

$$\left\{\text{poly}\left(\frac{63x^5}{8} - \frac{35x^3}{4} + \frac{15x}{8},[x]\right)\right\}$$

```
[orthpoly::legendre(5,2)
```

$$\frac{743}{4}$$

```
[float(orthpoly::legendre(5,2))
```

$$185.75$$

Para evaluar simbólicamente una función especial que consiste en una serie *infinita*, use la función `series`. Por ejemplo,

```
[series(besselJ(0,x),x)
```

$$1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + O(x^6)$$

Usted puede graficar funciones especiales exactamente como cualquier otra función. Por ejemplo,

```
[plot(airyAi(x),x=0..5)
```

Puede graficar la solución de una ecuación diferencial siguiendo el ejemplo basado en la ecuación de Airy.

```
[eqn4:=ode({y″(x)=x*y(x),y(0)=1,y′(0)=-0.1},y(x)):
[solve(eqn4)
[Y4:=op(%)
[plotfunc2d(Y4,x=0..1)
```

La función `op` quita las llaves sinópticas que encierran la solución obtenida por la función `solve`.

Soluciones con Maple

Al resolver ecuaciones diferenciales en Maple, es buena práctica cargar el paquete `DEtools` y también el paquete `plots` si usted va a hacer gráficas. Si va a obtener soluciones de serie, también debe cargar el paquete `powseries`.

Considere la ecuación de Legendre con $\alpha = 2$: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$. Tiene un punto singular ordinario y puede resolverse en Maple con la siguiente sesión:

```
> eqn1:=(1-x^2)*y″(x)-2*x*y′(x)+6*y(x)=0:
> dsolve({eqn1,y(0)=1,y′(0)=0},y(x))
```

$$y(x) = 1 - 3x^2$$

El resultado es un polinomio finito de grado 2.

En la tabla 5-1 se muestra una lista de algunas de las funciones especiales disponibles en Maple y en la tabla 5-2 se presenta cómo evaluar las funciones especiales. Los polinomios de Legendre se obtienen tecleando `simplify(LegendreP(n,x))`. Por ejemplo,

```
> simplify(LegendreP(5,x))
```

$$\frac{63x^5}{8} - \frac{35x^3}{4} + \frac{15x}{8}$$

Use la función `evalf` para obtener una evaluación numérica. Por ejemplo,

```
> evalf(LegendreP(5,2))
```

$$185.7500000$$

La ecuación de Airy puede resolverse con la siguiente sesión:

```
> eqn2:=y″(x)-x*y(x)=0:
> dsolve({eqn2,y(0)=1, y′(0)=0},y(x))
```

$$y(x) = \frac{1}{2}3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\text{AiryAi}(x) + \frac{1}{2}3^{1/6}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\text{AiryBi}(x)$$

donde $\Gamma(x)$ es la función especial llamada *función gamma*, la cual se evalúa seleccionando el símbolo griego de la tabla de letras griegas o tecleando `GAMMA(x)`.

Si prefiere una solución de serie explícita, puede usar la opción `series` como sigue. Usando la ecuación de Airy `eqn2` como ejemplo (con condiciones iniciales arbitrarias), la sesión es

```
> dsolve({eqn2,y(0)=a,y'(0)=b},y(x),series)
```

$$y(x) = a + bx + \frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{12}bx^4 + 0(x^6)$$

La función `series` también puede usarse para obtener una representación de serie de una función especial. Por ejemplo,

```
> series(BesselJ(0,x),x)
```

$$1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 + 0(x^6)$$

Maple puede encontrar la relación de recurrencia cuando `dsolve` no da la solución en forma conveniente. Por ejemplo, la solución de la ecuación $y'' + 2xy' + 5y = 0$ dada por `dsolve` es una expresión complicada que consiste en varias funciones de Bessel, y es demasiado destallada para mostrarse aquí (pruébela). En tales casos, podemos usar el paquete `powseries` y las funciones `powsolve` y `tpsform` para obtener la relación de recurrencia. La sesión de Maple sigue usando las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ y mostrando el resultado hasta el orden 8. Recuerde que el valor predeterminado de `order` es 6, que aquí se cancela mediante la función `tpsform`, que da una respuesta en forma de serie de potencias truncada. La función `powsolve` en el paquete `powseries` resuelve una ecuación diferencial lineal como una serie de potencias.

```
> eqn3 := y"(x)+2*x*y'(x)+5*y(x) = 0
```

$$eqn3{:=}\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 2x\frac{d}{dx}y(x) + 5y(x) = 0$$

```
> initial:=y(0)=1,y'(0)=0:
> IVP:={eqn3,initial}:
> sol:=powsolve(IVP):
> Sol:=tpsform(sol,x,8)
```

$$Sol{:=}1 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{15}{8}x^4 - \frac{13}{16}x^6 + 0(x^8)$$

```
> RecursionRelation:=a(\_n)=subs(\_k=n,sol(\_k))
```

$$\textit{Relación de recurrencia}{:=}a(\_n) = -\frac{(1 + 2n)a(n - 2)}{n(n - 1)}$$

¡Asegúrese de teclear la diagonal invertida antes de pulsar el guión bajo! Por las condiciones iniciales, observamos que $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, de modo que $a_n = 0$ para n impar, $a_2 = -(5/2)a_0 = -5/2$, $a_4 = -(9/12)a_2 = (15/8)a_0 = 15/8$ y $a_6 = -(13/30)a_4 = -13/16$. Estos resultados están de acuerdo con la serie mostrada para *Sol.*

Usted puede graficar la solución de una ecuación diferencial siguiendo el ejemplo basado en la ecuación de Airy. La función `unapply` regresa a un operador de una expresión. La función `rhs` selecciona el lado derecho de la ecuación.

```
> with(plots),with(DEtools):
> eqn:=y"(x)-x*y(x)=0:
> sol1:=dsolve({eqn, y(0)=1,y'(0)=0},y(x)):
> y1:=unapply(rhs(sol1),x):
```

```
> plot(y1(x),x=0..2)
```

Soluciones con Mathematica

Considere la ecuación de Legendre $\alpha = 2$: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$. Tiene un punto singular ordinario y puede resolverse en Mathematica con la siguiente sesión:

```
> eqn1=(1-x^2)*y"[x]-2*x*y'[x]+6*y[x]==0;
```

```
> DSolve[{eqn1,y[0]==1,y'[0]==0},y[x],x]
```

$$\{\{y[x] \to 1 - 3x^2\}\}$$

El resultado es un polinomio finito de grado 2.

En la tabla 5-1 se da una lista de nombres de funciones en Mathematica y en la tabla 5-2 se muestra cómo evaluar las funciones especiales. Los polinomios de Legendre se obtienen tecleando `LegendreP[n,x]`. Por ejemplo,

```
> LegendreP[5,x]
```

$$\frac{1}{8}(15x - 70x^3 + 63x^5)$$

Use la función `//N` para obtener una evaluación numérica. Por ejemplo,

```
> LegendreP(5,2)//N
```

$$185.75$$

La ecuación de Airy $y'' - xy = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ puede resolverse con la siguiente sesión:

```
> eqn2=y"[x]-x*y[x]==0;
```

```
> DSolve[{eqn2,y[0]==1,y'[0]==0},y[x],x]
```

$$\{\{y[x] \to 1/2(3^{(2/3)}\text{AiryAi}[x]\text{Gamma}[2/3] + 3^{(1/6)}\text{AiryBi}[x]\text{Gamma}[2/3])\}\}$$

donde $\Gamma(x)$ es la función especial llamada *función gamma*, la cual se evalúa seleccionando el símbolo griego de la tabla de letras griegas o tecleando `Gamma[x]//N`. Por ejemplo,

```
> Gamma[2/3]//N
```

$$1.35412$$

```
> AiryAi[2]//N
```

$$0.0349241$$

Si prefiere una solución de serie explícita, usted puede usar la opción `series` como sigue. Usando como ejemplo la ecuación de Airy, con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, la sesión es

```
> odeseries=Series[y"[x]-x*y[x],{x,0,6}];
```

```
> coeffs=Solve[{odeseries==0,y[0]==1,y'[0]==0}]
```

```
> seriessol=Series[y[x],{x,0,6}]/.First[coeffs]
```

$$1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + 0[x^7]$$

Aquí está la solución para la ecuación de Bessel con $n = 4$. Observe que la solución se da en términos de las funciones de Bessel de la primera clase, `BesselJ`, así como las de la segunda clase, `BesselY`.

```
> DSolve[x^2*y″[x]+x*y'[x]+(x^2-16)*y[x]==0,y[x],x]
```

$$\{\{y[x] \to BesselJ[4,x]C[1] + BesselJY[4,x]C[2]\}\}$$

Es posible graficar las funciones especiales como cualquier otra función. Por ejemplo, para graficar la función `BesselJ(n,x)` para $n = 1{,}3$ y $0 \leq x \leq 20$, debe introducir

```
> Plot[{BesselJ[1,x],BesselJ[3,x]},{x,0,20}]
```

Usted puede graficar la solución de una ecuación diferencial modificando este ejemplo como

```
> DSolve[{x^2*y″[x]+x*y'[x]+(x^2-16)*y[x]==0,
  y[0]==0,y[10]==1},y[x],x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{BesselJ[4, x]}{BesselJ[4, 10]}\right\}\right\}$$

```
> Plot[y[x]/.%,{x,0,10}]
```

El comando `ReplaceAll (/.)` se usa en el comando `Plot` para sustituir la solución para $y[x]$.

5-9 ■ RESUMEN

Las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables usualmente deben resolverse en términos de series infinitas.

Series de potencias Una serie infinita cuyos términos incluyan las potencias de la variable x en la forma x^n, donde n es un entero, se llama *serie de potencias*, y se expresa como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots \quad \textbf{(5-1)}$$

Dos series de potencias son *idénticas* si representan la misma función. Por tanto, si $\Sigma_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$ para todas las x en algún intervalo, entonces $C_n = 0$ para todas las $n = 0, 1, 2, 3,...$

Manipulación de series Una expresión de serie puede manipularse exactamente igual que una integral definida. Cualquier cantidad que no dependa del índice de la sumatoria puede colocarse dentro o fuera del signo de sumatoria, igual que una cantidad que no depende de la variable de integración puede colocarse dentro o fuera del signo de integral. A menudo es necesario correr el índice de la sumatoria para combinar series cuyos términos generales no son de la misma potencia. Esto se hace reemplazando todas las apariciones del índice n por $n + k$, donde k puede ser cualquier entero. Una relación que relaciona entre sí dos o más coeficientes de la serie de potencias se llama *relación de recurrencia*.

Prueba de convergencia de series Se dice que una serie de potencias de la forma $\Sigma_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ *converge* en un intervalo I si el límite $\lim_{n\to\infty} \Sigma_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ existe para todas las x en ese intervalo. La convergencia puede verificarse aplicando la *prueba de razón*

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\,n\text{-ésimo term}}{n\text{-ésimo term}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}x^{n+1}}{C_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| \quad \textbf{(5-22)}$$

La serie de potencias converge para un valor dado de x si $L < 1$, y diverge si $L > 1$.

Intervalo de convergencia En el eje x, el intervalo abierto en el que converge una serie de potencias se llama *intervalo de convergencia*, el cual puede determinarse por la prueba de razón. El intervalo de convergencia se describe a menudo en términos del *radio de convergencia* ρ, que es la distancia entre el centro de la serie y el punto singular más cercano. El intervalo de convergencia de una serie de potencias de centro x_0 se describe usualmente en términos del radio de convergencia como $|x - x_0| < \rho$, donde

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| \quad \textbf{(5-24)}$$

Si dos series de potencias convergen en el intervalo I, entonces su suma, su diferencia y su producto también convergirán en ese intervalo. Sin embargo, el cociente de ambas series (en general) tendrá un menor radio de convergencia que el de cualquiera de las series, ya que su razón puede divergir en los ceros del denominador.

Serie de Taylor La expansión de serie de Taylor de la función $f(x)$ alrededor del punto x_0 está dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Entonces, si una función es infinitamente diferenciable en un punto x_0, su serie de Taylor existe en ese punto. Se dice que una función $f(x)$ cuya expansión de serie de Taylor en un punto x_0 y su cercanía inmediata existe, es analítica en ese punto. Por tanto, cualquier función que sea analítica en x_0 puede expresarse como una serie de potencias de centro x_0 con un radio de convergencia diferente de cero. Los polinomios, así como sus sumas, diferencias, productos y cocientes (salvo en los ceros del denominador) son analíticos en todas partes.

Soluciones alrededor de un punto Al resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables, tenemos que hablar de soluciones alrededor de un punto. Esto se refiere a una solución en un intervalo que contiene dicho punto, ya que el intervalo en el que la solución es aplicable rara vez será todo el eje x, debido a las singularidades. La solución de la ecuación alrededor de un punto depende no solo del punto mismo, sino también de la naturaleza del punto.

Puntos ordinarios y puntos singulares El punto x_0 de la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{5-47}$$

se llama *punto ordinario* si ambas funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas en ese punto. El punto x_0 se llama *punto singular de la ecuación diferencial* si una de las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ no es analítica en ese punto, o ninguna de las dos lo es. Además, un punto singular de una ecuación diferencial se clasifica así: un punto singular x_0 se llama *punto singular regular de la ecuación diferencial* si ambas funciones

$$(x - x_0)P(x) \quad \text{y} \quad (x - x_0)^2Q(x) \tag{5-48}$$

son analíticas en ese punto. De otra manera, el punto x_0 se llama *punto singular irregular de la ecuación diferencial*.

Cuando las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, todos los puntos son ordinarios de la ecuación diferencial. Cuando las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son razones de polinomios, los puntos en los que los denominadores de $P(x)$ o $Q(x)$ desaparecen son los puntos singulares, y todos los demás son puntos ordinarios de la ecuación diferencial.

Radio de convergencia El radio de convergencia de la solución de serie de una ecuación diferencial se relaciona con el radio de convergencia de las funciones $P(x)$ y $Q(x)$, y se expresa por el siguiente teorema:

TEOREMA 5-1

Si x_0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

entonces la serie infinita en la solución general de esta ecuación diferencial tiene un radio de convergencia que es por lo menos tan grande como el menor de los radios de convergencia de las funciones $P(x)$ y $Q(x)$.

Existencia y unicidad de soluciones La existencia y la unicidad de soluciones alrededor de puntos ordinarios se trata en el siguiente teorema:

TEOREMA 5-2

Si x_0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

entonces esta ecuación diferencial tiene dos soluciones linealmente independientes y_1 y y_2, cada una de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$. La solución general de esta ecuación diferencial es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n = C_0y_1(x) + C_1y_2(x) \tag{5-50}$$

donde C_0 y C_1 son dos constantes arbitrarias que se determinan por las condiciones iniciales. Los demás coeficientes en la solución de serie se establecen sustituyendo la solución de serie en la ecuación diferencial. Además, el radio de convergencia de la solución de serie es al menos tan grande como la distancia entre x_0 y el punto singular real o complejo más cercano.

Ecuación de Legendre La ecuación diferencial

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \tag{5-57}$$

donde α es una constante, se conoce como *ecuación diferencial de Legendre*, y cualquier solución de serie de esta ecuación se llama *función de Legendre de orden α*. Cuando α es un entero no negativo, algunas funciones de Legendre se reducen a polinomios llamados *polinomios de Legendre*. El polinomio de Legendre de orden n se expresa como

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n - 2k)!}{2^nk!(n - k)!(n - 2k!)}x^{n-2k}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{5-62}$$

donde N es el mayor entero menor o igual que $n/2$. A diferencia de las funciones de Legendre, los polinomios de Legendre convergen en los puntos extremos $x = \pm 1$, así como en el intervalo entre éstos. Los polinomios de Legendre pueden generarse de manera sistemática a partir de la relación:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{5-63}$$

que se conoce como *fórmula de Rodrigues*. Sabiendo que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$, todos los demás polinomios de Legendre pueden determinarse usando la relación de recurrencia:

$$P_n = \frac{(2n - 1)xP_{n-1} - (n - 1)P_{n-2}}{n} \tag{5-67}$$

Método de Frobenius La solución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables en la cercanía de un punto singular regular que se considera que está en el origen se obtiene por el método de Frobenius. Esto se describe por el siguiente teorema:

TEOREMA 5-3

Sea el punto $x = 0$ un punto regular de la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

y sea ρ el menor radio de convergencia de las dos funciones $p(x) = xP(x)$ y $q(x) = x^2Q(x)$. Sean r_1 y r_2 las raíces de la ecuación indicial

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0 \tag{5-75}$$

donde $p_0 = \lim_{x\to 0} xP(x)$ y $q_0 = \lim_{x\to 0} x^2Q(x)$

Sea $r_1 > r_2$ cuando las raíces son reales y desiguales. Entonces existen dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ y $y_2(x)$ para esta ecuación diferencial, con un radio de convergencia de ρ, y si $x > 0$, son de una de las siguientes formas:

Caso 1: *$r_1 = r_2 + \lambda$ (λ es un no entero positivo)*

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \tag{5-81a}$$

$$y_2 = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad (b_0 \neq 0) \tag{5-81b}$$

Caso 2: *$r_1 = r_2 = r$*

$$y_1 = x^{r}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (a_0 \neq 0) \tag{5-82a}$$

$$y_2 = y_1 \ln x + x^{r}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \tag{5-82b}$$

Caso 3: *$r_1 = r_2 + N$ (N es un entero positivo)*

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \tag{5-83a}$$

$$y_2 = Cy_1 \ln x + x^{r_2}\sum_{n=o}^{\infty} b_n x^n \quad (b_0 \neq 0) \tag{5-83b}$$

donde C es una constante que puede ser cero. Entonces, la solución general de la ecuación diferencial para los tres casos se expresa como

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \tag{5-84}$$

donde las constantes arbitrarias C_1 y C_2 se determinan por las condiciones iniciales o en la frontera.

La forma de la primera solución es la misma para todos los casos. Los tres casos se distinguen sólo por la forma de la segunda solución. Asimismo, los coeficientes a_0 y b_0 son constantes arbitrarias distintas de cero y se les puede asignar cualquier valor adecuado. Es práctica común tomar $a_0 = 1$ y $b_0 = 1$ por simplicidad, sin pérdida de generalidad. La restricción $x > 0$ puede eliminarse reemplazando x^{r_1} y x^{r_2} en las soluciones por $|x|^{r_1}$ y $|x|^{r_2}$, respectivamente. Una forma más práctica es sustituir $t = -x$ en la ecuación diferencial y luego resolver la ecuación resultante para $t > 0$. La determinación de la primera solución linealmente independiente y_1 es similar a la determinación de la solución alrededor de un punto ordinario, salvo que ahora la solución incluye x^{n+r_1} en vez de x^n. La segunda solución linealmente independiente en el caso 2 siempre incluye un término logarítmico. Sin embargo, en el caso 3, el término logarítmico *puede* ser cero. Una vez que las dos soluciones linealmente independientes y_1 y y_2 están disponibles, cualquier otra solución de la ecuación diferencial puede expresarse como una combinación lineal de ambas soluciones.

Ecuación de Bessel Una de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes variables más importantes es la *ecuación de Bessel de orden v*, expresada como

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \tag{5-104}$$

Sus soluciones se expresan en términos de las *funciones de Bessel*. El origen (el punto $x = 0$) es el único punto singular de la ecuación de Bessel, y es singular regular. La ecuación indicial es $r^2 - v^2 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = v$ y $r_2 = -v$. Las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel de orden cero son

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \tag{5-110}$$

y
$$Y_0 = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}S_n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right] \tag{5-113}$$

que se llaman *funciones de Bessel de la primera y la segunda clases de orden cero,* respectivamente. Aquí

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \tag{5-112}$$

Las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel de orden un medio se relacionan con las funciones trigonométricas sen x y cos x, y se expresan como

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \tag{5-120}$$

Cuando v es un entero positivo, las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel de orden v se expresan como

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+v}}{2^{2n+v}n!(n+v)!} \tag{5-125}$$

y
$$Y_v(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_v(x) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{v-1}\frac{(v-n-1)!x^{2n-v}}{2^{2n-v}n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(S_n + S_{n+v})x^{2n+v}}{2^{2n+v}n!(n+v)!}\right] \tag{5-126}$$

Cuando v es un no entero, las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel de orden v son $J_v(x)$ y $J_{-v}(x)$, que se expresan como

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+v}}{2^{2n+v}n!\Gamma(n+v+1)!} \tag{5-135}$$

y
$$J_{-v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-v}}{2^{2n-v}n!\Gamma(n-v+1)!} \tag{5-136}$$

donde la función gamma se define como

$$\Gamma(v) = \int_0^{\infty} t^{v-1}e^{-t}dt \tag{5-128}$$

Algunas propiedades de las funciones de Bessel pueden resumirse como

$$J_v(x) = (-1)^n J_{-v}(x) \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{5-138}$$

$$J_{v+1}(x) = \frac{2v}{x}J_v(x) - J_{v-1}(x) \tag{5-139}$$

$$J_{\nu+1}(x) = -2\frac{dJ_\nu(x)}{dx} + J_{\nu-1}(x) \qquad \textbf{(5-140)}$$

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(kx)] = kx^\nu J_{\nu-1}(kx) \qquad \textbf{(5-143)}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(kx)] = -kx^{-\nu} J_{\nu+1}(kx) \qquad \textbf{(5-144)}$$

$$\int x^\nu J_{\nu-1}(x)\,dx = x^\nu J_\nu(x) + C \qquad \textbf{(5-145)}$$

$$\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\,dx = -x^{-\nu} J_\nu(x) + C \qquad \textbf{(5-146)}$$

La solución de la ecuación modificada de Bessel, que se expresa en términos de las *funciones modificadas de Bessel* I_ν y K_ν,

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2) = 0 \qquad \textbf{(5-149)}$$

Perspectiva histórica

George Biddell Airy (1801-1892) Astrónomo británico. La ecuación de Airy y su solución, la función de Airy, llevan su nombre. Desarrolló esta ecuación durante sus estudios de los rayos de luz reflejados o refractados por una superficie curva.

Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) Matemático y astrónomo alemán. Generalizó las funciones de Bessel (que desarrolló primero Daniel Bernoulli) como resultado de sus estudios sobre la dinámica de sistemas gravitacionales de cuerpos múltiples. Fue el primero en usar el paralaje en el cálculo de la distancia a una estrella.

Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894) Matemático ruso. Su nombre se ha transliterado del ruso de varias maneras, como Chebychev, Chebyshov, Tchebycheff y Tschebyscheff. Considerado el padre de las matemáticas rusas, hizo numerosas aportaciones a la probabilidad, la estadística y la teoría de los números. Los polinomios de Hermite, que llevan el nombre de Charles Hermite, en realidad los desarrolló Chebyshev.

Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) Matemático alemán. Conocido por sus contribuciones a la teoría de las ecuaciones diferenciales, la teoría de grupos y la primera prueba completa del teorema de Cailey-Hamilton de análisis matricial.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Matemático y científico alemán. Contribuyó en grado significativo a la teoría de los números, geometría, geofísica, magnetismo, astronomía y óptica, entre otros campos. Desarrolló el primer teorema de números y probó el teorema fundamental del álgebra. Gauss fue el primero en dar un tratamiento sistemático completo de la ecuación hipergeométrica.

Charles Hermite (1822-1901) Matemático francés. Hizo investigación sobre teoría de los números, polinomios ortogonales, funciones elípticas y álgebra, y fue el primero en probar que e (la base de los logaritmos naturales) es un número trascendental.

Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886) Matemático francés. Sus principales aportaciones fueron en la geometría y el análisis complejo. Desarrolló el método de Laguerre para encontrar las raíces de polinomios. Desarrolló los polinomios de Laguerre para resolver la ecuación diferencial que lleva su nombre. Estos polinomios también se usan en la cuadratura gaussiana para calcular numéricamente integrales cuyos integrandos tienen la forma $f(x)e^{-x}$.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) Matemático francés. Hizo importantes contribuciones a la estadística, la teoría de números y el álgebra. Fueron otros quienes terminaron y generalizaron gran parte de su obra. Los polinomios de Legendre son la solución de la ecuación de Legendre, que resulta al resolver la ecuación diferencial parcial de Laplace para la función de potencial gravitacional en coordenadas esféricas.

Olinde Rodrigues (1795-1851) Matemático francés. Hizo investigación en análisis vectorial, polinomios ortogonales y la representación matemática de la rotación en tres dimensiones. Desarrolló la fórmula para generar el polinomio de Legendre.

PROBLEMAS

5-1 Repaso de series de potencias

5-32C ¿Por qué a veces corremos el índice de una sumatoria?

5-33C Explique cómo podemos correr hacia adelante en k el índice de una sumatoria.

5-34C ¿Qué es una reacción de recurrencia?

5-35C ¿En qué condiciones será idéntica a cero una serie de potencias?

5-36C ¿Por qué nos interesa la convergencia de las series en el método de solución por serie de ecuaciones diferenciales?

5-37C ¿Cómo se verifica la convergencia de series de potencias con la prueba de razón? ¿En qué se basa esta prueba?

5-38C Defina el intervalo de convergencia y el radio de convergencia de una serie de potencias.

5-39C Si dos series de potencias convergen en un intervalo, ¿qué puede usted decir acerca de la convergencia de su suma, de su diferencia, de su producto y de su cociente en el mismo intervalo?

5-40C ¿Cuándo se dice que una función es analítica en la cercanía de un punto específico? Dé ejemplos de funciones que sean analíticas en todas partes.

Elimine los tres primeros términos de las siguientes series conservando los demás términos bajo la sumatoria:

5-41 *a)* $5x\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2x^{n+3}$ *b)* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+5}{n+3}C_{2n+1}x^{2n+1}$

5-42 *a)* $x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^{n-1}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2 C_{2n}x^{2n}$

Corra el índice de las siguientes sumatorias de manera que la potencia de x en cada una de ellas sea n:

5-43 *a)* $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)^2 2^n x^{n+3}$ *b)* $\sum_{n=3}^{\infty}C_n x^{n+1}$

Corra el índice de las siguientes sumatorias de manera que la potencia de x en cada una de ellas sea $n-1$*:*

5-44 *a)* $\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)x^n$ *b)* $\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)^3 2^n x^{n+3}$

5-45 *a)* $\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n$ *b)* $\sum_{n=4}^{\infty}C_n x^{n-2}$

Corra el índice de las siguientes sumatorias de manera que la potencia de x en cada una de ellas sea n + 1.

5-46 *a)* $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)3^n x^n$ *b)* $\sum_{n=2}^{\infty}(n-5)^2 x^n$

5-47 *a)* $\sum_{n=4}^{\infty}C_n x^{n+2}$ *b)* $\sum_{n=3}^{\infty}(n+1)^2 2^{n-1} x^{n-1}$

Combine las tres series en las siguientes preguntas en una sola sumatoria en x^n mediante el corrimiento del índice de sumatoria cuando sea necesario y la ejecución de las sumas y restas indicadas. (Elimine individualmente algunos de los términos cuando no puedan combinarse en la sumatoria).

5-48 $\sum_{n=0}^{\infty}nC_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)C_n x^{n+2} + x\sum_{n=0}^{\infty}n2^n x^{n+1} = 0$

5-49 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2 x^{n-1} - 5x\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)C_n x^{n-2} + x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}x^{n-4} = 0$

5-50 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)C_n x^{n+1} + 2\sum_{n=1}^{\infty}n^3 x^{n+2} - 3x^2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n = 0$

Determine si las siguientes igualdades son correctas:

5-51 $3\sum_{n=0}^{\infty}nx^n = \sum_{n=2}^{\infty}3(n-2)x^{n-2}$

5-52 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2 C_n x^n = C_1 x + \sum_{j=2}^{\infty}j^2 C_j x^j$

5-53 $3x^2\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)^2 x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}3(n+2)^2 x^{n+1}$

5-54 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)C_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+4)C_{n-1}x^n$

5-55 $\sum_{n=0}^{\infty}2n^2 x^n = 2\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-2)x^{n-2}$

Determine el intervalo de convergencia y el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

5-56 *a)* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{n!}(x-1)^n$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}x^{n+2}$

5-57 *a)* $\sum_{n=0}^{\infty}3^{n+1}x^n$ *b)* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n}(x-1)^n$

5-58 *a)* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$

Tomando $y = \sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n$, determine y′ y y″ y sustituya en las siguientes ecuaciones diferenciales. Luego obtenga la relación de recurrencia para los coeficientes desconocidos C_n para cada caso:

5-59 *a)* $y'' - 3y = 0$
b) $(x+2)y'' - xy' + 2y = 0$

5-60 *a)* $y'' - 2xy' + 3y = 0$
b) $y'' + x^2y' - 4y = 0$

5-61 *a)* $y'' + y' - 2y = 0$
b) $(x^2-1)y'' + 3xy' = 0$

5-2 Introducción a las soluciones de series de potencias

5-62C Al resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden por el método de serie de potencias, ¿es posible determinar todos los coeficientes desconocidos C_n? Explique.

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales usando dos métodos diferentes, siendo uno de ellos la serie de potencias. Compruebe que ambas soluciones son idénticas:

5-63 *a)* $y'' - y = 0$ *b)* $y' - 4y = 0$

5-64 *a)* $y'' + 2y' = 0$ *b)* $y' - 2xy = 0$

5-65 $y'' + 4y' - 12y = 0$

5-3 Puntos ordinarios contra singulares

5-66C ¿Por qué distinguimos entre puntos singulares regulares e irregulares?

5-67C Considere una ecuación diferencial lineal de segundo orden cuyo coeficiente principal es uno y los otros dos coeficientes son polinomios. ¿Qué puede usted decir acerca de los puntos ordinarios y singulares de esta ecuación diferencial?

5-68C Describa dos modos de determinar el radio de convergencia de la solución por serie de potencias de una ecuación diferencial lineal de segundo orden alrededor de un punto ordinario.

Identifique los puntos ordinario y singular de las siguientes ecuaciones diferenciales. También determine si los puntos singulares son regulares o irregulares.

5-69 *a)* $y'' + 2x^2y' - 5xy = 0$
b) $(x^2-4)y'' + (x-1)y' + xy = 0$

5-70 *a)* $y'' + \frac{1}{x}y' + 3y = 0$
b) $x^2y'' - y' + 3y = 0$

5-71 *a)* $(x^2-1)y'' - xy' + 2y = 0$
b) $y'' - (x+2)y' + (2x^2-1)y = 0$

5-72 *a)* $y'' + y = 0$
b) $xy'' + \frac{1}{(x+1)^2}y' + \frac{1}{x}y = 0$

Determine el radio de convergencia de la solución por serie de las siguientes ecuaciones diferenciales alrededor del punto ordinario específico:

5-73 $(x^2-4)y'' - x^2y' + y = 0,\ x_0 = 1$

5-74 $(x^2+4)y'' + \frac{1}{x-2}y' + xy = 0,\ x_0 = 0$

5-75 $x^3y'' + \frac{1}{x^2+1}y' - 2xy = 0,\ x_0 = 4$

5-76 $(x^2-2x+4)y'' - x^2y = 0,\ x_0 = 0$

5-77 $(x^2+1)y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x-2}y = 0,\ x_0 = 3$

5-4 Soluciones por serie de potencias alrededor de un punto ordinario

5-78C Exprese el teorema de existencia y unicidad para la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables alrededor de un punto ordinario.

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden alrededor del punto ordinario específico usando el método de serie de potencias. También determine el intervalo de convergencia de la solución.

5-79 $(x^2 - 1)y'' - y = 0,\ x_0 = 0$

5-80 $(x^2 + 1)y'' + 2xy' - xy = 0,\ x_0 = 0$

5-81 $y'' - 6xy = 0,\ x_0 = 1$

5-82 $(1 - x^2)y'' + 4y = 0,\ x_0 = 0$

5-83 $y'' - \dfrac{1}{(x-1)^2}y = 0,\ x_0 = 0$

5-84 $xy'' + 2y = 0,\ x_0 = 2$

5-85 $xy'' + (1 - x)y' + y = 0,\ x_0 = 1$

5-86 $y'' - 4xy = 0,\ x_0 = 0$

5-87 $(x - 1)^2y'' + (x - 1)y' + y = 0,\ x_0 = 0$

5-88 $y'' + \dfrac{4x}{x+2}y = 0,\ x_0 = 0$

5-89 $y'' + y' - 2xy = 0,\ x_0 = 0$

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial lineales de segundo orden alrededor del punto ordinario $x_0 = 0$ usando el método de serie de potencias:

5-90 $y'' - \dfrac{1}{x^2 - 1}y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

5-91 $y'' - 4xy = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

5-92 $(x^2 - 1)y'' + xy' - 2y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$

5-5 Ecuación de Legendre y polinomios de Legendre

5-93C ¿Cuál es la relación que permite obtener los polinomios de Legendre por diferenciación sucesiva?

5-94C Conociendo los dos primeros polinomios de Legendre $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$, ¿cómo podemos obtener los demás polinomios de Legendre?

5-95 Compruebe que $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$.

5-96 Para $m \neq n$, compruebe que

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0$$

Esta relación se llama propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre.

5-97 Resuelva la ecuación de Legendre para $\alpha = 2$, y determine el intervalo de convergencia de esta solución.

5-98 Determine el polinomio de Legendre $P_4(x)$ usando *a*) la expansión de serie, *b*) la fórmula de Rodrigues y *c*) la relación de recurrencia.

5-99 Determine el polinomio de Legendre $P_5(x)$ usando *a*) la expansión de serie, *b*) la fórmula de Rodrigues y *c*) la relación de recurrencia.

5-6 Soluciones por serie alrededor de un punto singular regular

5-100C ¿Cuándo incluye un término logarítmico la segunda solución linealmente independiente de una ecuación lineal homogénea de segundo orden alrededor de un punto singular?

5-101C Cuando las raíces de la ecuación indicial de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables difieren por un entero, ¿qué sucederá si suponemos que la solución correspondiente a la raíz más pequeña no tiene un término logarítmico (es decir, $C = 0$)?

5-102C Describa dos maneras de obtener la ecuación indicial de una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

5-103C Explique cómo podemos correr al origen un punto singular x_0 de una ecuación diferencial.

Compruebe que el punto $x = 0$ es singular regular de las siguientes ecuaciones diferenciales y determine las raíces de sus ecuaciones indiciales r_1 y r_2:

5-104 *a*) $y'' - \dfrac{4}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = 0$

b) $x(1 - x)y'' + (1 + x)y' - 3xy = 0$

5-105 *a*) $xy'' + (x^2 - 1)y' - \dfrac{2}{x}y = 0$

b) $x(x^2 - 1)y'' + y' + \dfrac{2}{x}y = 0$

5-106 *a*) $x^2y'' + y = 0$

b) $y'' + \dfrac{x-1}{x}y' - y = 0$

5-107 *a*) $xy'' - 3xy' + \dfrac{4}{x}y = 0$

b) $x^2y'' + 2xy' + y = 0$

5-108 *a*) $2x^2y'' - 3xy' - y = 0$

b) $(x^2 - 1)y'' - 4y' + \dfrac{1}{x^2}y = 0$

Determine la forma de las dos soluciones linealmente independientes de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden alrededor del punto singular regular $x_0 = 0$, sin despejarlas. También establezca el intervalo de valores de x en el que convergen estas soluciones:

5-109 *a*) $y'' - \dfrac{3}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = 0$

b) $x(1 - x)y'' + (1 + x)y' - 3xy = 0$

5-110 *a*) $xy'' - (x^2 - 1)y' - \dfrac{2}{x}y = 0$

b) $x(x^2 - 1)y'' + y' - \dfrac{1}{x}y = 0$

5-111 *a*) $x^2y'' - 6y = 0$

b) $y'' + \dfrac{x-1}{x}y' - y = 0$

5-112 *a*) $xy'' - 3xy' - \dfrac{4}{x}y = 0$

b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

5-113 *a*) $2x^2y'' - 3xy' - y = 0$

b) $(x^2 - 4)y'' - 4y' + \dfrac{3}{x^2}y = 0$

Determine las soluciones generales de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden alrededor del punto singular $x_0 = 0$:

5-114 *a*) $y'' - \dfrac{3}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = 0$

b) $x(1 - x)y'' + (1 + x)y' - 3xy = 0$

5-115 *a*) $xy'' + (x^2 - 1)y' - \dfrac{2}{x}y = 0$

b) $x(x^2 - 1)y'' + y' - \dfrac{1}{x}y = 0$

5-116 *a*) $xy'' - 3xy' - \dfrac{4}{x}y = 0$

b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

5-117 *a*) $2x^2y'' - 3xy' - y = 0$

b) $(x^2 - 4)y'' - 4y' + \dfrac{3}{x^2}y = 0$

Determine las soluciones generales de las siguientes ecuaciones diferenciales de Euler usando a) el método estándar y b) el método de Frobenius alrededor del punto singular regular $x_0 = 0$.

5-118 *a*) $2x^2y'' + 6xy' - y = 0$

b) $y'' - \dfrac{12}{x^2}y = 0$

5-119 *a*) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

b) $3x^2y'' + 2xy' - 4y = 0$

5-120 *a*) $x^2y'' - 2xy' - 10y = 0$

b) $x^2y'' - \dfrac{3}{4}y = 0$

5-7 Ecuación de Bessel y funciones de Bessel

5-121C ¿En qué se distinguen las funciones de Bessel de la primera y de la segunda clases?

5-122C ¿Cómo se relaciona la función de Bessel de orden un medio con sen x? ¿En qué difieren?

5-123C ¿Cómo se define la función gamma? ¿Cómo se relaciona la función factorial con la función gama?

5-124C ¿En qué se distingue el comportamiento general de las funciones de Bessel modificadas y el comportamiento de las funciones de Bessel de la misma clase y del mismo orden?

5-125 Usando el método de Frobenius, determine la primera solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel de orden 2. Compárela con $J_2(x)$.

5-126 Usando el método de Frobenius, determine la solución general de la ecuación de Bessel de orden tres medios.

5-127 Para valores enteros positivos de v, compruebe que $J_v(x) = (-1)^n J_{-v}(x)$.

5-128 Usando el método de Frobenius, determine la solución general de la ecuación de Bessel modificada de orden cero.

Determine las siguientes integrales que incluyen funciones de Bessel:

5-129 *a*) $\int xJ_1(x)\,dx$ *b*) $\int \dfrac{1}{x^3}J_4(x)\,dx$

5-130 *a*) $\int xJ_4(x)\,dx$ *b*) $\int J_1^2(x)\,dx$

5-8 Métodos de computadora

Resuelva los siguientes problemas con el software que usted elija:

5-131 Problema 5-63

5-132 Problema 5-64

5-133 Problema 5-65

5-134 Problema 5-79

5-135 Problema 5-80

5-136 Problema 5-81

5-137 Problema 5-82

5-138 Problema 5-83

5-139 Problema 5-84

5-140 Problema 5-85

5-141 Problema 5-86

5-142 Problema 5-87

5-143 Problema 5-88

5-144 Problema 5-89

5-145 Problema 5-90

5-146 Problema 5-91

5-147 Problema 5-92

5-148 Problema 5-114

5-149 Problema 5-115

5-150 Problema 5-116

5-151 Problema 5-117

5-152 Problema 5-118

5-153 Problema 5-119

5-154 Problema 5-120

CAPÍTULO

6

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES: METODOLOGÍA ESCALAR

OBJETIVOS

Al terminar este capítulo usted deberá ser capaz de:

1. Transformar una ecuación diferencial de orden *n* en un conjunto de *n* ecuaciones de primer orden.
2. Usar el método de eliminación para resolver un conjunto de ecuaciones homogéneas de orden *n* con coeficientes constantes.
3. Usar el método de valores característicos para resolver un conjunto de ecuaciones homogéneas de orden *n* con coeficientes constantes.
4. Obtener e interpretar las modas de un conjunto de ecuaciones de orden *n* con coeficientes constantes.
5. Usar un paquete de computadora para obtener la solución de forma cerrada de un conjunto de ecuaciones de orden *n* con coeficientes constantes.

Hasta ahora hemos considerado ecuaciones diferenciales *individuales* con *una sola* variable dependiente. Aunque muchos problemas que se encuentran en las ciencias y en la ingeniería incluyen solo una variable dependiente, otros tantos incluyen dos o más variables dependientes, cada una de las cuales es función de una sola variable independiente. Tales problemas dan como resultado un *sistema* de ecuaciones diferenciales ordinarias. Aquí, la palabra **sistema** significa un conjunto de dos o más ecuaciones diferenciales *acopladas*. El término *acopladas* significa que las ecuaciones no pueden resolverse por separado, sino de manera simultánea. El tiempo es usualmente la variable independiente, y se simboliza como t. Se acostumbra representar las variables dependientes por $x, y, z\dots$ o $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Los signos de prima y los sobrepuntos se usan para indicar diferenciación con respecto a t.

En este capítulo, nos enfocaremos en sistemas de ecuaciones diferenciales *lineales* con coeficientes *constantes*, ya que siempre es posible encontrar soluciones para tales sistemas en términos de funciones elementales. Asimismo, usualmente consideraremos en las explicaciones un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden en dos variables dependientes, para mantener en el mínimo las complejidades. Pero los métodos que se presentan pueden extenderse a un sistema de cualquier número de ecuaciones de cualquier orden, ya que los mismos principios se aplican a sistemas con más ecuaciones, y cualquier ecuación de orden n puede expresarse como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden.

Iniciaremos este capítulo con una descripción general de los sistemas de ecuaciones diferenciales, y demostraremos cómo se presentan en la práctica tales sistemas. En seguida se verá el *método de eliminación*, que es una manera de convertir un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden en una sola ecuación de orden n que puede resolverse mediante las técnicas que se explicaron en los capítulos anteriores. Luego presentaremos el *método de los valores característicos*, que es una manera sistemática de resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Se parece mucho a la resolución de una sola ecuación diferencial con coeficientes constantes, en la que juegan un papel principal su polinomio característico y sus raíces. Veremos que los valores característicos son lo mismo que las raíces características.

6-1 ▪ DESCRIPCIÓN GENERAL DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Un sistema de tres ecuaciones diferenciales en tres funciones incógnitas x, y y z, con t como variable independiente:

$$x' = 2x - 3y + z + t^3$$
$$y' = x + tz + 1$$
$$z' = 4x - 3xy - t^3 z$$

FIGURA 6-1
Un sistema de ecuaciones diferenciales incluye las derivadas de dos o más variables dependientes.

Usted probablemente está familiarizado con sistemas de ecuaciones del álgebra. Pero las que vio hasta ahora no incluyen ninguna cantidad diferencial ni alguna derivada. Es decir, constituyen un sistema de *ecuaciones algebraicas*, tales como

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 3x - 5y &= -7 \end{aligned} \tag{6-1}$$

Por otro lado, los sistemas de *ecuaciones diferenciales* incluyen las derivadas de dos o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, usualmente el tiempo t (figura 6-1).

EJEMPLO 6-1 **Sistema de ecuaciones que describen un proceso de mezclado**

Considere dos tanques de salmuera, cada uno de los cuales contiene 1 000 L (litros) de salmuera, conectados como se muestra en la figura 6-2. En cualquier tiempo t, el primer tanque y el segundo contienen $x_1(t)$ y $x_2(t)$ kg de sal, respectivamente. La concentración de salmuera en cada tanque se mantiene uniforme mediante una agitación continua. Al primer tanque entra salmuera que contiene 0.1 kg de sal por litro, a razón de 15 L/min, y al segundo tanque entra agua a razón de 5 L/min. La salmuera se bombea del primer tanque al segundo a razón de 50 L/min, y del segundo tanque al primero a razón de 35 L/min. La salmuera se descarga del segundo tanque a razón de 20 L/min. Obtenga las ecuaciones diferenciales, en términos de x_1 y x_2, que rigen el contenido de sal en cada tanque en función del tiempo.

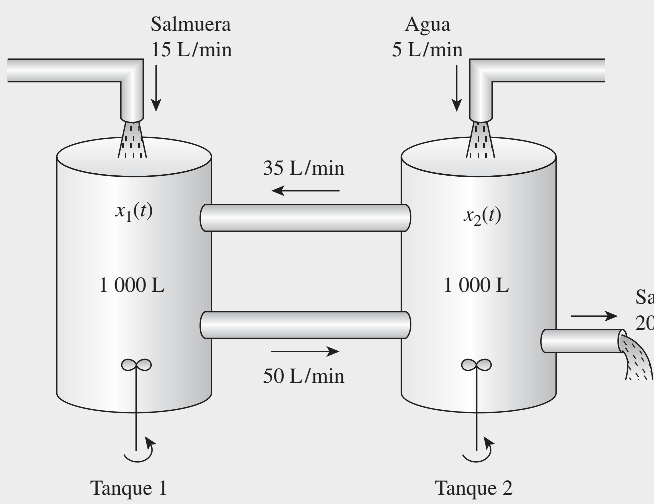


FIGURA 6-2
Mezclado en dos tanques de salmuera.

Solución Suponemos que el volumen líquido no cambia al disolverse la sal. También observamos que el volumen total de la salmuera en cada tanque permanece constante en 1 000 L, ya que los caudales de entrada y salida para cada tanque son iguales. Por tanto, cada litro de salmuera en el primer tanque contiene $x_1/1\,000$ kg de sal, y la sal sale del primer tanque a razón de 50 $(x_1/1\,000)$ kg/min. Si se considera que cada litro de salmuera en el segundo tanque contiene $x_2/1\,000$ kg de sal, la velocidad con la que la sal abandona el segundo tanque y entra en el primero es $35(x_2/1\,000)$ kg/min. Además, entra nueva sal al primer tanque a razón de 1.5 kg/min, ya que cada litro de la nueva salmuera contiene 0.1 kg de sal. Es posible dar un argumento similar para el segundo tanque. Entonces las tasas de cambio del contenido de sal en cada tanque (en kg/min) pueden expresarse como:

$$\frac{dx_1}{dt} = 1.5 - 50\frac{x_1}{1000} + 35\frac{x_2}{1000} \quad \textbf{(6-2}\textbf{\textit{a}}\textbf{)}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0 - 50\frac{x_1}{1000} - 55\frac{x_2}{1000} \quad \textbf{(6-2}\textbf{\textit{b}}\textbf{)}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden en dos incógnitas $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Están acopladas y, por tanto, deben resolverse simultáneamente, ya que cada ecuación contiene ambas incógnitas.

Sistemas que contienen derivadas de orden superior

En el ejemplo 6-1, la aplicación del principio físico pertinente (conservación de la masa) dio por resultado un sistema de ecuaciones de primer orden. Sin embargo, otros principios físicos pueden generar un sistema de ecuaciones de orden superior. Por ejemplo, la ley del movimiento de Newton puede producir sistemas que contienen derivadas de segundo orden. Por ejemplo, las ecuaciones

$$\begin{aligned} x'' &= 2y' - 3x - 2x' + y + 5e^t \\ y'' &= 3x' + x - y' + 6y + 2 \end{aligned} \quad \textbf{(6-3)}$$

forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden en dos funciones incógnitas $x(t)$ y $y(t)$. Observe que cada ecuación incluye ambas incógnitas y, por tanto, necesitamos resolver ambas simultáneamente (exactamente como necesitamos resolver al mismo tiempo las ecuaciones algebraicas en la ecuación 6-1) para determinar las funciones incógnitas. Las soluciones obtenidas deben satisfacer ambas ecuaciones en el intervalo específico de t.

Las ecuaciones diferenciales que forman un sistema pueden ser de órdenes diferentes. Por ejemplo, todas las ecuaciones en un sistema pueden ser de segundo orden, como en las ecuaciones 6-3, o bien algunas de ellas pueden ser de primer orden y las demás, de orden segundo o superior.

Hay dos enfoques para manejar sistemas de ecuaciones. El método preferido depende de la aplicación específica y de lo que necesitamos determinar. En algunos casos, es más fácil obtener la solución reduciendo el sistema a una sola ecuación de orden superior y luego usar los métodos de los capítulos anteriores para resolver la ecuación. Este es el método de eliminación, que se explica en la sección 6-3. La desventaja de este método es que no puede generalizarse.

El otro método es expandir el sistema a un conjunto de ecuaciones de primer orden. La ventaja de este procedimiento es que nos conduce hacia un método general aplicable a cualquier número de ecuaciones. Esto permite usarlo como base de métodos de solución numérica, que se tratarán en el capítulo 9. En la sección 6-4 introducimos este método (llamado método de valores característicos), y luego lo expandimos en el capítulo 7, usando métodos matriciales para aprovechar la naturaleza general del método.

Cualquier ecuación diferencial de orden n siempre puede transformarse en un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden (figura 6-3). Para comprobar cómo hacer esta transformación, considere la ecuación diferencial de tercer orden

$$x''' = 2x'' - 3x' + 5x + 7t^2 \quad \textbf{(6-4)}$$

que se convertirá a un sistema de tres ecuaciones de primer orden. Para lograr esto, definimos tres nuevas variables como

Ecuación de tercer orden:

$$x''' = x'' + 4x' - t^2x + e^{-2t}$$

Defina y y z como

$$y = x'$$
$$z = x'' = y'$$

Sistema equivalente de primer orden:

$$x' = y$$
$$y' = z$$
$$z' = z + 4y - t^2x + e^{-2t}$$

FIGURA 6-3
Una ecuación diferencial de orden superior siempre puede transformarse en un sistema de ecuaciones de primer orden definiendo cada orden de las derivadas (salvo el orden más alto) como nuevas variables.

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x' = x_1' \\ x_3 &= x'' = x_2' \end{aligned} \tag{6-5}$$

Es decir, definimos la función incógnita y cada una de sus derivadas (salvo la de orden más alto) como nuevas variables. Dado que $x_3' = x'''$, la sustitución de estas definiciones en la ecuación diferencial original (ecuación 6-4) nos da $x_3' = 2x_3 - 3x_2 + 5x_1 + 7t^2$, que es una ecuación diferencial de primer orden con tres funciones incógnitas. Esta ecuación, junto con las definiciones de x_2 y x_3, forman un sistema de tres ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= 2x_3 - 3x_2 + 5x_1 + 7t^2 \end{aligned} \tag{6-6}$$

Este sistema de tres ecuaciones de primer orden con tres incógnitas es equivalente a la ecuación original de tercer orden con una incógnita. El procedimiento que acabamos de describir es bastante general y puede aplicarse a cualquier ecuación diferencial de cualquier orden. La forma que se obtiene de esta manera se conoce como forma de *Cauchy* o de *variable de estado*.

Como veremos, definir nuevas variables de acuerdo con el esquema de la ecuación 6-5 no es la única manera de precisar un nuevo conjunto de variables, pero es quizá la forma más clara.

EJEMPLO 6-2 Cómo convertir sistemas de orden superior en un sistema de primer orden

Convierta el siguiente sistema de ecuaciones con condiciones iniciales específicas en un sistema equivalente de primer orden:

$$\begin{aligned} x'' &= 2x - 3y + x' + f(t), \quad & x(0) = 0,\ x'(0) = 1 \\ y'' &= -x + y + 2x' + g(t), \quad & y(0) = 0,\ y'(0) = 2 \end{aligned}$$

Solución Éste es un sistema de dos ecuaciones de segundo orden en dos incógnitas. Esperamos que el sistema equivalente de primer orden consista en cuatro ecuaciones en cuatro incógnitas, ya que cada ecuación de segundo orden se reduce a un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Primero definimos las cuatro nuevas variables dependientes como

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x' = x_1' \\ x_3 &= y \\ x_4 &= y' = x_3' \end{aligned}$$

Sustituyendo estas definiciones en las ecuaciones diferenciales dadas obtenemos

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, & x_1(0) &= 0 \\ x_2' &= 2x_1 - 3x_3 + x_2 + f(t), & x_2(0) &= 1 \\ x_3' &= x_4, & x_3(0) &= 0 \\ x_4' &= -x_1 + x_3 + 2x_2 + g(t), & x_4(0) &= 2 \end{aligned}$$

Este es un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden en cuatro incógnitas equivalente al sistema original dado. Observe que la suma del orden de las ecuaciones en ambos sistemas es igual a cuatro y que las ecuaciones originales y transformadas son del mismo tipo. Como las ecuaciones en el sistema original son lineales con coeficientes constantes, las ecuaciones en el sistema transformado también lo son.

Tenga en cuenta que puede no ser necesario transformar una sola ecuación de orden superior en un sistema de primer orden si puede resolverse fácilmente por cualquiera de los métodos disponibles. Sin embargo, muchas ecuaciones diferenciales de orden superior que se encuentran en la práctica son no lineales; algunas de estas solo pueden resolverse aproximadamente por métodos numéricos. Como verá en el capítulo 9, es un procedimiento usual convertir las ecuaciones de orden superior dadas en un sistema de ecuaciones de primer orden.

Clasificación de sistemas de ecuaciones

La mayoría de las definiciones correspondientes a una sola ecuación diferencial pueden extenderse a un sistema de ecuaciones diferenciales. También hay un estrecho paralelismo entre los sistemas de ecuaciones algebraicas y los de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, un sistema de ecuaciones algebraicas es lineal si cada ecuación de este es lineal. Por tanto, las ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x - 3y^2 &= -10 \end{aligned} \tag{6-7}$$

forman un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas, ya que la segunda ecuación es no lineal.

Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales es **lineal** si cada ecuación individual del sistema lo es. Se dice que un sistema es **no lineal** incluso si una sola ecuación incluye un solo término no lineal (figura 6-4). Es decir, un sistema de ecuaciones lineales no puede incluir ninguna función no lineal de ninguna de las variables dependientes. Se dice que un sistema lineal de ecuaciones diferenciales es **homogéneo** si *cada* ecuación individual del sistema lo es; y que el sistema es no homogéneo incluso si una sola ecuación incluye un solo término no homogéneo (figura 6-5).

Un sistema *lineal* de dos ecuaciones puede expresarse en la forma general como

$$\begin{aligned} x' &= P_1(t)x + Q_1(t)y + R_1(t) \\ y' &= P_2(t)x + Q_2(t)y + R_2(t) \end{aligned} \tag{6-8}$$

donde $R_1(t)$ y $R_2(t)$ son los términos no homogéneos. Un sistema *lineal homogéneo* de dos ecuaciones puede expresarse en la forma general como

$$\begin{aligned} x' &= P_1(t)x + Q_1(t)y \\ y' &= P_2(t)x + Q_2(t)y \end{aligned} \tag{6-9}$$

Observe que un sistema lineal no incluye ninguna función no lineal (potencias, productos o funciones transcendentales) de las variables dependientes ni de sus derivadas (tales como x^2, xy, xx' o sen y). Un sistema homogéneo contiene solo ecuaciones homogéneas.

Finalmente, se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales tiene **coeficientes constantes** si cada ecuación del sistema en la forma estándar tiene coeficientes constantes. Se dice que el sistema tiene **coeficientes variables** incluso si una sola ecuación incluye un solo coeficiente variable (una función de la variable independiente), como se muestra en la figura 6-6.

Un sistema lineal de dos ecuaciones con coeficientes constantes puede expresarse en la forma general como

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + R_1(t) \\ y' &= a_2x + b_2y + R_2(t) \end{aligned} \tag{6-10}$$

donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son constantes. Observe que los términos no homogéneos todavía pueden ser función de la variable independiente.

$x' = 2x - y + z + t^3$ (lineal)

$y' = x + z + 1$ (lineal)

$z' = 4x - 3xy - t^2 z$ (no lineal)

Término no lineal

FIGURA 6-4
Se dice que un sistema es *no lineal* aun cuando sea una sola ecuación la que incluya un solo término no lineal.

$x' = 2x - y + z$ (homogénea)

$y' = x + t^2y + z$ (homogénea)

$z' = -3x - y + 3t$ (no homogénea)

Término no homogéneo

FIGURA 6-5
Se dice que un sistema es *no homogéneo* incluso si una sola ecuación incluye un solo término no homogéneo.

$x' = 2x - y + z + t^3$ (con coeficientes constantes)

$y' = -x + 2y - 1$ (con coeficientes constantes)

$z' = 4x + 2ty - z$ (con coeficientes variables)

Coeficiente variable

FIGURA 6-6
Se dice que un sistema tiene coeficientes variables incluso si una sola ecuación tiene un solo término con un coeficiente variable.

Usted podría verse tentado a decir que la forma general de la ecuación para x' en la ecuación 6-10 también incluye un término en y', y la forma general de la ecuación para y' también debe incluir un término en x'. Es decir, la forma general de un sistema lineal de dos ecuaciones con coeficientes constantes debe ser

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1y' + R_1(t) \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2x' + R_2(t) \end{aligned} \tag{6-11}$$

Pero podemos eliminar fácilmente el término c_1y' en la primera ecuación usando la expresión y' en la segunda ecuación. Del mismo modo, podemos suprimir el término c_2x' en la segunda ecuación usando la expresión x' en la primera ecuación. Después de reacomodar, el sistema se parecerá a las ecuaciones 6-10. Por tanto, no hay necesidad de incluir las derivadas de las variables dependientes en el lado derecho de las ecuaciones en un sistema de primer orden. Hacerlo solo complicaría las cosas innecesariamente.

En álgebra, usted probablemente pasaba por alto los sistemas de ecuaciones no lineales y se concentraba solo en los sistemas lineales. Hacía esto no porque los sistemas no lineales no fueran importantes, sino porque tales sistemas a menudo son imposibles de resolver analíticamente. Por supuesto que pueden resolverse numéricamente con una computadora y una técnica adecuada de resolución numérica, pero se necesitaría cierto nivel de sofisticación en los métodos numéricos.

Este es también el caso con sistemas de ecuaciones diferenciales. Los sistemas de ecuaciones diferenciales *lineales* pueden resolverse usando un procedimiento sistemático; pero no existe ningún procedimiento así para sistemas de ecuaciones *no lineales*. Incluso los sistemas lineales pueden provocar dificultades considerables si incluyen coeficientes variables, ya que las soluciones en tales casos usualmente incluyen series infinitas. Por tanto, en este capítulo enfatizaremos los sistemas *lineales* de ecuaciones diferenciales con coeficientes *constantes.*

Repaso de la sección

Los problemas marcados con una "C" son conceptuales para discusión

6-1C ¿Cuándo es lineal y cuándo es no lineal un sistema de ecuaciones diferenciales?

6-2C ¿Cuándo es homogéneo y cuándo es no homogéneo un sistema de ecuaciones diferenciales?

6-3 Reduzca las siguientes ecuaciones diferenciales individuales a un sistema de ecuaciones de primer orden (x es la variable dependiente y t, la variable independiente):

a) $x''' + 3xx' = 6t^2$ *b*) $x''' - 3x = e^{2t}$

(*Respuestas: a*) definiendo $x_1 = x,\ x_2 = x' = x_1'$ y $x_3 = x'' = x_2'$ resulta $x_1' = x_2,\ x_2' = x_3$ y $x_3' = -3x_1x_2 + 6t^2$, respectivamente; *b*) definiendo $x_1 = x, x_2 = x' = x_1'$ y $x_3 = x'' = x_2'$ resulta $x_1' = x_2,\ x_2' = x_3$ y $x_3' = 3x_1 + e^{2t}$, respectivamente.)

6-4 Reduzca el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales a un sistema de ecuaciones de primer orden (t es la variable independiente):

$$x''' = 3y' + \cos t,\ x(\pi) = 0,\ x'(\pi) = 4,\ x''(\pi) = -2$$
$$y'' = 2ty' - x + e^t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$$

(*Respuestas:* definiendo $x_1 = x,\ x_2 = x' = x_1',\ x_3 = x'' = x_2',\ x_4 = y$ y $x_5 = y' = x_4'$, resulta $x_1' = x_2,\ x_2' = x_3,\ x_3' = 3x_5 + \cos t,\ x_4' = x_5$ y $x_5' = 2tx_5 - x_1 + e^t$, respectivamente, con condiciones iniciales $x_1(\pi) = 0,\ x_2(\pi) = 4,\ x_3(\pi) = -2,\ x_4(0) = 2$ y $x_5(0) = 1$.)

6-5 Determine si el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales es *a*) lineal o no lineal, *b*) homogéneo o no homogéneo y *c*) si tiene coeficientes constantes o variables:

$$x''' = 2xy - y' + \cos t$$
$$y'' = 2ty' - x + e^t$$

(*Respuesta:* El sistema es no lineal debido al término $2xy$; no homogéneo debido ya sea $a \cos t$ o $a\, e^t$, y tiene coeficientes variables debido al término $2ty'$.)

6-2 ■ ORIGEN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Los sistemas de ecuaciones diferenciales surgen naturalmente al analizar muchos problemas prácticos que incluyen dos o más sistemas físicamente acoplados en vez de un solo sistema simple. Las variables dependientes en tales sistemas son interdependientes (dependen una de otra, así como de la variable independiente) y es necesario determinarlas simultáneamente. Pero antes de explicar la teoría y las técnicas de resolución correspondientes a sistemas de ecuaciones diferenciales, comprobaremos con algunos ejemplos cómo aparecen estas ecuaciones.

EJEMPLO 6-3 Vibraciones mecánicas desacopladas

Dos masas m_1 y m_2 están suspendidas por dos resortes lineales cuyas constantes de resorte son k_1 y k_2. Las masas están sujetas a fuerzas externas $F_1(t)$ y $F_2(t)$, como se muestra en la figura 6-7. Haciendo que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representen las posiciones de las dos masas en cualquier tiempo con relación a sus posiciones de equilibrio (la posición que toman bajo la influencia de su propio peso sin la aplicación de ninguna fuerza externa), y despreciando cualquier amortiguación y fricción, obtenga las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de las dos masas.

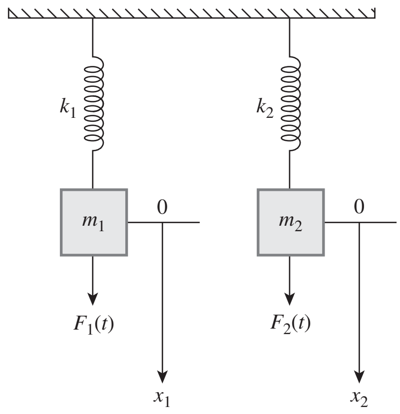


FIGURA 6-7
Dos masas desacopladas.

Solución Las vibraciones mecánicas de una sola masa se explicaron en detalle en el capítulo 3 en diversas condiciones. Considerando que no hay amortiguación y tomando la dirección hacia abajo como la dirección positiva tanto para x_1 como para x_2, la ecuación diferencial para el movimiento de cada masa puede expresarse como (ver ecuación 3-92)

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + k_1x_1 = F_1(t) \tag{6-12a}$$

y

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} + k_2x_2 = F_2(t) \tag{6-12b}$$

donde x_1 y x_2 son las dos funciones incógnitas (variables dependientes), y t es el tiempo (variable independiente).

La ecuación 6-12 forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Más precisamente, son dos ecuaciones, cada una de las cuales contiene una sola incógnita. Por tanto, ambas ecuaciones son independientes y pueden resolverse independientemente una de otra. Es decir, x_1 puede despejarse de la primera ecuación y x_2, de la segunda ecuación; como dos ecuaciones no relacionadas. Esto no sorprende, ya que los movimientos de las dos masas son completamente independientes, y el movimiento de una no afecta de ninguna manera el movimiento de la otra. Se dice que las ecuaciones 6-12 son *desacopladas* porque cada función incógnita aparece solo en una ecuación. Obviamente, no nos interesan tales sistemas en este capítulo, ya que no se necesita ninguna nueva información para resolver sistemas de ecuaciones desacopladas.

EJEMPLO 6-4 Vibraciones mecánicas acopladas

Reconsidere los dos sistemas resorte-masa descritos en el ejemplo anterior, pero esta vez supóngalos conectados entre sí en serie, como se muestra en la figura 6-8. Despreciando cualquier fricción, obtenga la ecuación diferencial que rige el movimiento de las dos masas.

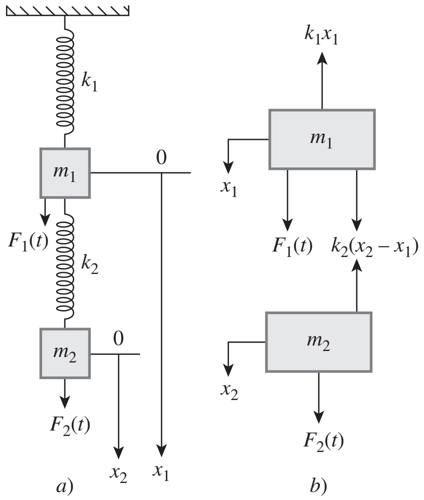


FIGURA 6-8
a) Dos masas acopladas. *b*) Diagramas de cuerpo libre para el caso en que $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ y $x_2 > x_1$.

Solución Nuevamente, haga que x_1 y x_2 representen las posiciones de las masas m_1 y m_2 con relación a sus posiciones de equilibrio (la posición que toman bajo la influencia de su propio peso, sin aplicar ninguna fuerza externa). También tomamos la dirección hacia abajo como positiva tanto para x_1 como para x_2. Recordando que la fuerza que aplica un resorte lineal es proporcional a la distancia a la que se estira (o comprime) desde su posición de equilibrio, tenemos

$$F_{\text{resorte 1}} = k_1 x_1 \tag{6-13a}$$

$$F_{\text{resorte 2}} = k_2(x_2 - x_1) \tag{6-13b}$$

El segundo resorte se estirará (o comprimirá) en una cantidad igual a la distancia a la que la segunda masa se desplaza en relación con la primera. Observe que si tanto m_1 como m_2 se mueven en la misma cantidad y dirección, entonces $x_1 = x_2$ y así $F_{\text{resorte 2}} = 0$, ya que el segundo resorte no se habrá estirado (ni comprimido) nada. Si la primera masa permanece estacionaria ($x_1 = 0$), entonces $F_{\text{resorte 2}} = k_2 x_2$, como se esperaba.

Es importante observar que el peso mg de cada masa cancela las fuerzas de resorte que existen en los resortes cuando ambas masas están en equilibrio; entonces, estas fuerzas y los pesos no aparecen en las ecuaciones de movimiento. Esto es verdad solamente si los desplazamientos x_1 y x_2 se miden desde las posiciones de equilibrio.

Los diagramas de cuerpo libre se muestran en la figura 6-8*b* bajo las suposiciones de que $x_1 > 0, x_2 > 0$ y $x_2 > x_1$. Aplicando la segunda ley del movimiento de Newton a cada una de las masas se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + k_1x_1 = k_2(x_2 - x_1) + F_1(t) \tag{6-14}$$

y

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} + k_2(x_2 - x_1) = F_2(t) \tag{6-15}$$

Cualquier intento de resolver la primera ecuación sola para $x_1(t)$ fracasaría, ya que esa ecuación ahora incluye otra función incógnita, $x_2(t)$. Del mismo modo, tampoco podemos resolver la segunda ecuación para $x_2(t)$, porque incluye otra función incógnita $x_1(t)$. Sin embargo, podemos resolver simultáneamente ambas ecuaciones para las dos incógnitas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, como veremos más adelante en este capítulo. Se dice que las ecuaciones 6-14 y 6-15 son *acopladas* porque cada ecuación incluye más de una función incógnita. Esta es la clase de ecuaciones que aprenderemos a resolver en este capítulo.

EJEMPLO 6-5 Circuito eléctrico

Considere el circuito eléctrico mostrado en la figura 6-9, que consiste en dos lazos cerrados. Obtenga las ecuaciones diferenciales que rigen las corrientes I_1 e I_2 que fluyen por los inductores L_1 y L_2, respectivamente.

Solución Al analizar circuitos eléctricos con varios lazos, es difícil saber por adelantado la dirección real de la corriente que fluye por los diversos componentes. Por tanto, a menudo es necesario suponer que la corriente fluye en cierta dirección antes del análisis. Si se obtiene un valor negativo para la corriente, esto indica que la dirección real de la corriente es opuesta a la que se pensó.

Suponemos que las corrientes I_1 e I_2 fluyen en las direcciones indicadas. Entonces, la corriente a través del resistor R se vuelve la diferencia $I_1 - I_2$, o $I_2 - I_1$, dependiendo del lazo que se analiza. Usted recordará, del capítulo 3, que la suma de caídas de voltaje en cualquier lazo es igual al voltaje aplicado en el lazo.

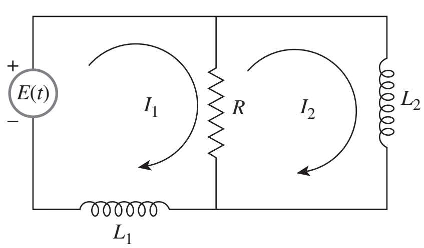


FIGURA 6-9
Circuito RL con dos lazos acoplados.

Aplicando este principio al primer lazo y al segundo obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales para las dos funciones incógnitas I_1 e I_2:

$$L_1\frac{dI_1}{dt} + R(I_1 - I_2) = E(t) \tag{6-16a}$$

$$L_2\frac{dI_2}{dt} + R(I_2 - I_1) = 0 \tag{6-16b}$$

o, después de reacomodar,

$$L_1\frac{dI_1}{dt} + RI_1 = RI_2 + E(t) \tag{6-17a}$$

$$L_2\frac{dI_2}{dt} + RI_2 = RI_1 \tag{6-17b}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden en dos incógnitas. Observe que como cada ecuación contiene ambas incógnitas, son acopladas y, por tanto, deben resolverse simultáneamente.

En seguida explicamos los métodos para resolver sistemas lineales. Primero introduciremos el método de eliminación, que es una manera de convertir un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden en una sola ecuación de grado n que puede resolverse usando las técnicas explicadas en los capítulos anteriores. Luego presentaremos el método de valores característicos, que es una manera sistemática de resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, bastante parecida a la resolución de una sola ecuación diferencial con coeficientes constantes.

Repaso de la sección

6-6 La figura 6-8*b* muestra los diagramas de cuerpo libre para el caso en que $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ y $x_2 > x_1$. Dibuje los diagramas de cuerpo libre para el caso en que $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, pero $x_2 < x_1$. Compruebe que las ecuaciones de movimiento correspondientes son idénticas a las ecuaciones 6-14 y 6-15.

6-7 Refiérase al circuito que se muestra en la figura 6-9. Sea I_a la corriente a través de R; I_b la corriente a través de L_1, e I_c la corriente a través de L_2. Aplique las leyes de circuitos de Kirchhoff para obtener las ecuaciones de circuitos, y compruebe que se reducen a las ecuaciones 6-17.

6-3 ▪ MÉTODO DE ELIMINACIÓN

El **método de eliminación** es el más sencillo y elemental para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. Se basa en convertir un sistema de ecuaciones diferenciales en una sola ecuación de orden superior con una *sola* variable dependiente, mediante la eliminación de todas las demás variables dependientes, una por una.

Este método es análogo a resolver un sistema de ecuaciones algebraicas mediante la eliminación de todas las incógnitas hasta que queda una sola incógnita en una sola ecuación. Por ejemplo, el sistema algebraico

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 5x - y &= 3 \end{aligned} \tag{6-18}$$

puede reducirse a una sola ecuación con x despejando y de la segunda ecuación, lo cual da $y = 5x - 3$ y sustituyendo en la primera ecuación para eliminar y. Esto da (ver la figura 6-10)

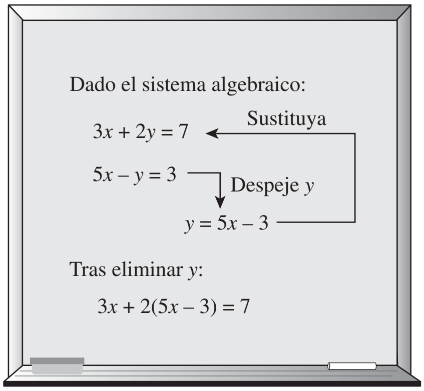


FIGURA 6-10
Aplicación del método de eliminación a un sistema algebraico.

$$3x + 2(5x - 3) = 7 \tag{6-19}$$

de la que x puede despejarse fácilmente para obtener $x = 1$. Una vez que x está disponible es posible determinar la otra incógnita y sustituyendo el valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones y despejando y para obtener $y = 2$.

Ahora considere un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes en las variables dependientes x y y,

$$x' = a_1x + b_1y + R_1(t) \tag{6-20a}$$

$$y' = a_2x + b_2y + R_2(t) \tag{6-20b}$$

Despejando y de la primera ecuación y diferenciándola con respecto a la variable independiente t obtenemos

$$y = \frac{1}{b_1}[x' - a_1x - R_1(t)] \tag{6-21}$$

y

$$y' = \frac{1}{b_1}[x'' - a_1x' - R_1'(t)] \tag{6-22}$$

Sustituyendo ahora estas relaciones para y y y' en la segunda ecuación diferencial (ecuación 6-20b), y reacomodando, obtenemos

$$x'' - (a_1 + b_2)x' + (a_1b_2 - a_2b_1)x = R_1'(t) - b_2R_1(t) + b_1R_2(t) \tag{6-23}$$

que es una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Esta ecuación puede resolverse usando los procedimientos descritos en el capítulo 3. El polinomio característico de la ecuación homogénea asociada es

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \tag{6-24}$$

La solución homogénea se construye usando las dos raíces de esta ecuación. La solución general para x se determina combinando esta solución homogénea con una solución particular que satisfaga la ecuación no homogénea.

Una vez que $x(t)$ está disponible, la otra función incógnita $y(t)$ puede determinarse al sustituir las expresiones $x(t)$ y $x'(t)$ en la relación y en la ecuación 6-21. Ahora comprobamos con un ejemplo este procedimiento.

EJEMPLO 6-6 **Método de eliminación**

Use el método de eliminación para resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden con las condiciones iniciales específicas:

$$\begin{aligned} x' &= 4x + 6y,\ x(0) = 1 \\ y' &= -3x - 5y,\ y(0) = 0 \end{aligned} \tag{6-25}$$

Solución Este es un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes. Para encontrar su ecuación equivalente homogénea lineal de segundo orden con coeficientes constantes con una sola función incógnita, despejamos y de la primera ecuación y la diferenciamos con respecto a t como

$$y = \frac{1}{6}x' - \frac{4}{6}x \tag{6-26}$$

y

$$y' = \frac{1}{6}x'' - \frac{4}{6}x' \tag{6-27}$$

Ahora sustituimos estas relaciones en la segunda ecuación diferencial para eliminar y y y'. Obtenemos

$$\frac{1}{6}x'' - \frac{4}{6}x' = -3x - 5\left(\frac{1}{6}x' - \frac{4}{6}x\right)$$

o
$$x'' + x' - 2x = 0 \tag{6-28}$$

que es una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes (figura 6-11). Su polinomio característico es $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$, que son reales y distintas. De modo que la solución general de la ecuación 6-28 es $x = C_1e^t + C_2e^{-2t}$. La otra función incógnita y se determina sustituyendo las expresiones x y x' en la ecuación 6-26 para obtener

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{6}x' - \frac{4}{6}x \\ &= \frac{1}{6}(C_1e^t - 2C_2e^{-2t}) - \frac{4}{6}(C_1e^t + C_2e^{-2t}) \\ &= -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general del sistema dado de dos ecuaciones de primer orden es

$$x = C_1e^t + C_2e^{-2t}$$
$$y = -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t}$$

Las constantes arbitrarias C_1 y C_2 se determinan aplicando las condiciones iniciales:

$$x(0) = 1 \rightarrow C_1 + C_2 = 1$$
$$y(0) = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}C_1 - C_2 = 0$$

De aquí resulta $C_1 = 2$ y $C_2 = -1$, y las soluciones del sistema dado de dos problemas de valor inicial de primer orden se determinan como

$$x = 2e^t - e^{-2t}$$
$$y = -e^t + e^{-2t}$$

Podemos verificar por sustitución directa que estas soluciones satisfacen tanto las ecuaciones diferenciales como las condiciones iniciales. También pudimos resolver este problema eliminando la variable x en vez de y.

Observe que si todas las ecuaciones de un sistema tienen coeficientes constantes, entonces la sola ecuación de orden superior obtenida por el método de eliminación también tendrá coeficientes constantes (figura 6-12).

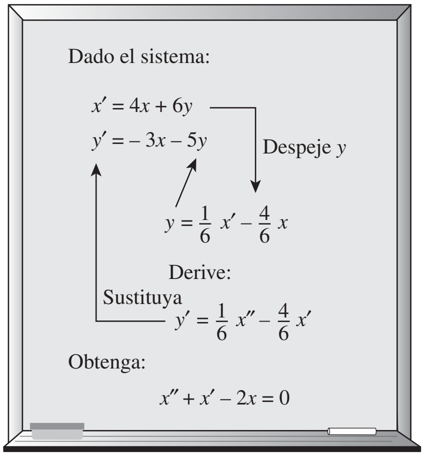


FIGURA 6-11
Cómo transformar un sistema de dos ecuaciones de primer orden en una sola ecuación de segundo orden por el método de eliminación.

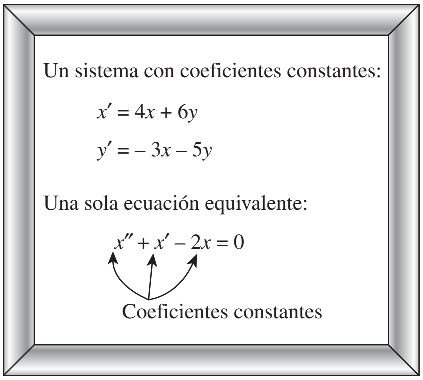


FIGURA 6-12
Ejemplo para ilustrar que, si todas las ecuaciones de un sistema tienen coeficientes constantes, la única ecuación de orden superior que se obtiene por el método de eliminación también tendrá coeficientes constantes.

EJEMPLO 6-7 Dos tanques interconectados

Los tanques cilíndricos que se muestran en la figura 6-13 tienen las áreas de fondo A_1 y A_2. El caudal másico de entrada $q_{mi}(t)$ de la fuente es una función dada del tiempo. La salida descarga a presión atmosférica. Los tubos se modelan como resistencias lineales. Esto significa que el caudal másico a través del tubo es proporcional a la diferencia de presión entre los extremos del tubo, e inversamente proporcional a la resistencia R. El valor de la resistencia R depende parcialmente de las propiedades del fluido y de la longitud y el diámetro del tubo. Es posible encontrar métodos para calcular R en textos sobre mecánica de fluidos.

Desarrolle un modelo de segundo orden de la altura de líquido h_1 para el caso en el que los tubos son idénticos de modo que $R_1 = R_2 = R$ y el segundo

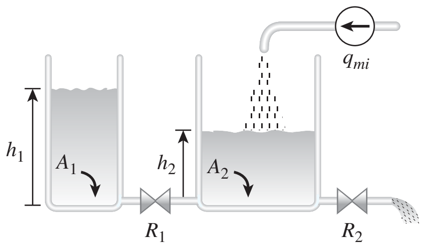


FIGURA 6-13
Dos tanques interconectados.

tanque tiene un área de fondo del triple de la del primero, de modo que $A_1 = A$ y $A_2 = 3A$. Si el flujo de entrada se cierra, ¿cuánto tardarán los tanques en vaciarse? ¿Oscilarán las alturas?

Solución La presión debida a una columna de líquido de altura h es ρgh, donde ρ es la densidad de masa del líquido, que suponemos constante. Aplicando el principio de conservación de masa al tanque 1 obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\rho A_1 h_1) = \rho A_1 \frac{dh_1}{dt} = -\frac{\rho g}{R_1}(h_1 - h_2)$$

Para el tanque 2,

$$\frac{d}{dt}(\rho A_2 h_2) = \rho A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_{mi} + \frac{\rho g}{R_1}(h_1 - h_2) - \frac{\rho g}{R_2} h_2$$

Sustituyendo $R_1 = R_2 = R$, $A_1 = A$ y $A_2 = 3A$ en las dos ecuaciones y definiendo $B = g/RA$ resulta

$$\frac{dh_1}{dt} = -B(h_1 - h_2) \quad \textbf{(a)}$$

$$3\frac{dh_2}{dt} = \frac{q_{mi}}{\rho A} + Bh_1 - 2Bh_2 \quad \textbf{(b)}$$

Estas ecuaciones pueden combinarse en una sola ecuación en términos de h_1 como sigue. Comparando estas ecuaciones con la ecuación 6-20 y usando la ecuación 6-23, obtenemos

$$3\frac{d^2 h_1}{dt^2} + 5B\frac{h_1}{dt} + B^2 h_1 = B\frac{q_{mi}}{\rho A}$$

Por la ecuación 6-24, el polinomio característico es

$$3\lambda^2 + 5B\lambda + B^2 = 0$$

Las raíces son $\lambda = -1.43B$ y $\lambda = -0.232B$. La solución homogénea es

$$h_1(t) = C_1 e^{-1.43Bt} + C_2 e^{-0.232Bt}$$

Las dos constantes pueden evaluarse por las condiciones iniciales $h_t(0)$ y $\dot{h}_1(0)$, que pueden encontrarse por la ecuación (*a*) si se conoce $h_2(0)$. Como las raíces son reales, las alturas de líquido no oscilarán si el caudal de entrada q_{mi} es cero o una constante, por ejemplo. El término $C_1 e^{-1.43Bt}$ disminuirá con mayor rapidez que el segundo término. Como $e^{-t/\tau} \leq 0.02$ para $t \geq 4\tau$, podemos predecir que, si q_{mi} es cero, los tanques estarán casi vacíos para $t > 4(1/0.232B) = 17.24/B = 17.241RA/g$. Entonces, cuanto mayor sea el área de tanque A o la resistencia R, más tiempo tardarán los tanques en vaciarse.

Hacemos las siguientes observaciones importantes en estos ejemplos:

1. Un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes en dos variables dependientes puede expresarse como una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes en cualquiera de las dos variables.

   En general, un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes en n variables dependientes puede expresarse como una ecuación lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes en una de las variables dependientes.

2. La solución general de una sola ecuación lineal de primer orden en una variable dependiente incluye una constante arbitraria y una función; pero la solución general de un sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden en dos variables dependientes incluye dos constantes arbitrarias y dos funciones linealmente independientes.

En general, la solución general de un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden en n variables dependientes incluirá n constantes arbitrarias y n funciones linealmente independientes.

3. *La solución general de cada función incógnita incluye las mismas constantes arbitrarias C_1 y C_2, cuyos valores se determinan por las condiciones iniciales.*
4. La ecuación de segundo orden que proviene de dos ecuaciones de primer orden podrían contener la primera derivada de uno de los términos no homogéneos (R'_1 en la ecuación 6-23). Esto requiere que R_1 tenga un comportamiento suficientemente bueno para resolver la ecuación de segundo orden. Si en vez de esto hubiésemos obtenido la ecuación en términos de y en vez de x, entonces el término R'_2 aparecería en la ecuación.

   En general, reducir n ecuaciones de primer orden a una sola ecuación de orden n podría dar por resultado que la derivada $(n - 1)$ de un término no homogéneo apareciera en la ecuación.

Un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden siempre puede expresarse como una sola ecuación diferencial lineal de orden n y luego resolverse. Por tanto, la teoría de un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden se parece mucho a la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de orden n que se explicó en el capítulo 4.

El método de eliminación es sencillo y fácil de seguir, pero no es práctico para sistemas con más de dos o tres ecuaciones, ya que se vuelve extremadamente tedioso y complicado al aumentar el número de ecuaciones del sistema. El método de valores característicos que se explica más adelante en este capítulo exige un poco de conocimiento previo de álgebra lineal, pero da el mismo polinomio característico de una manera sistemática sin necesidad de ninguna eliminación ni manipulaciones prolongadas, sin que importe el número de ecuaciones del sistema. Sin embargo, está limitado a ecuaciones lineales.

Método de eliminación para sistemas no homogéneos

El método de eliminación también puede aplicarse a sistemas no homogéneos. En tales casos, la ecuación equivalente de orden superior también será no homogénea y, por tanto, necesitaremos encontrar una solución particular para construir la solución general.

EJEMPLO 6-8 Método de eliminación: sistemas no homogéneos

Use el método de eliminación para resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden con las condiciones iniciales específicas:

$$\begin{aligned} x' &= 4x + 6y + 1, \qquad & x(0) &= 1 \\ y' &= -3x - 5y + t, \qquad & y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Solución Este es un sistema de dos ecuaciones lineales no homogéneas de primer orden con coeficientes constantes. Para encontrar su ecuación equivalente lineal de segundo orden con coeficientes constantes con una sola función incógnita, resolvemos la primera ecuación para y y la diferenciamos con respecto a t como

$$y = \frac{1}{6}x' - \frac{4}{6}x - \frac{1}{6} \tag{6-29}$$

y

$$y' = \frac{1}{6}x'' - \frac{4}{6}x' \tag{6-30}$$

Ahora sustituimos estas relaciones en la segunda ecuación diferencial para eliminar y y y' de dicha ecuación. Obtenemos

$$\frac{1}{6}x'' - \frac{4}{6}x' = -3x - 5\left(\frac{1}{6}x' - \frac{4}{6}x - \frac{1}{6}\right) + t$$

o

$$x'' + x' - 2x = 6t + 5 \qquad \textbf{(6-31)}$$

que es una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Su ecuación homogénea asociada es $x'' + x' - 2x = 0$, cuya solución se determinó en el ejemplo anterior como

$$x = C_1e^t + C_2e^{-2t}$$

Al usar el método de coeficientes indeterminados, la forma general de la solución particular correspondiente a los términos no homogéneos es $x = At + B$. Sustituyendo en la ecuación diferencial (ecuación 6-31) e igualando los coeficientes de cada potencia de t en cada lado, obtenemos $A = -3$ y $B = -4$. Por tanto, la solución particular es $x_p = -3t - 4$. Entonces la solución general de la ecuación 6-31 resulta

$$x = C_1e^t + C_2e^{-2t} - 3t - 4$$

La otra función incógnita y se determina sustituyendo las expresiones x y x' en la ecuación 6-29:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{6}x' - \frac{4}{6}x - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6}(C_1e^t - 2C_2e^{-2t} - 3) - \frac{4}{6}(C_1e^t + C_2e^{-2t} - 3t - 4) - \frac{1}{6} \\ &= -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t} + 2t + 2 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general del sistema dado de dos ecuaciones de primer orden es (figura 6-14):

$$x = C_1e^t + C_2e^{-2t} - 3t - 4$$

$$y = -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t} + 2t + 2$$

Las constantes arbitrarias C_1 y C_2 se determinan aplicando las condiciones iniciales:

$$x(0) = 1 \rightarrow C_1 + C_2 - 4 = 1$$

$$y(0) = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}C_1 - C_2 + 2 = 0$$

Resultan $C_1 = 6$ y $C_2 = -1$. Sustituyendo, la solución del sistema dado de dos problemas de valor inicial de primer orden se determina como

$$x = 6e^t - e^{-2t} - 3t - 4$$

$$y = -3e^t + e^{-2t} + 2t + 2$$

Podemos verificar por sustitución directa que estas soluciones satisfacen tanto las ecuaciones diferenciales como las condiciones iniciales.

Este método (en principio) también puede aplicarse a sistemas no lineales; sin embargo, rara vez dará como resultado una solución de forma cerrada para tal sistema.

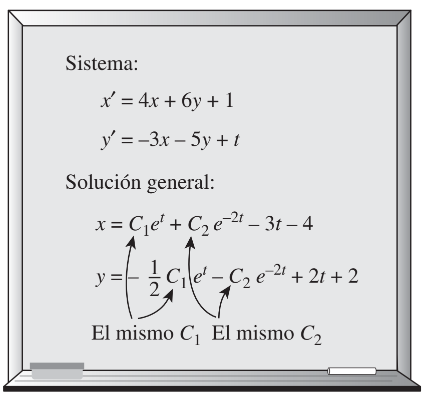


FIGURA 6-14
La solución general de cada función incógnita en un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden incluye las mismas n constantes arbitrarias.

Combinar ecuaciones de esta manera para obtener una sola ecuación de orden superior puede ser fastidioso. En tales casos, el método basado en la transformada de Laplace (que se trata en el capítulo 8) es más fácil de usar.

Repaso de la sección

6-8C ¿En qué se basa el método de eliminación? ¿Cuáles son sus ventajas y sus desventajas?

6-9 ¿Cuál es la principal limitación del método de eliminación? ¿Es aplicable a sistemas no homogéneos? ¿Es aplicable a sistemas no lineales? ¿Es aplicable a sistemas con coeficientes variables?

6-10 Use el método de eliminación para determinar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$x' = -3x + 2y$$
$$y' = 2x - 6y$$

(*Respuesta:* $x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-7t},\ y(t) = \frac{1}{2}C_1e^{-2t} - 2C_2e^{-7t}$.)

6-11 Use el método de eliminación para determinar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$x' = -3x + 2y + 5$$
$$y' = 2x - 6y$$

(*Respuesta:* $x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-7t} + \frac{15}{7},\ y(t) = \frac{1}{2}C_1e^{-2t} - 2C_2e^{-7t} + \frac{5}{7}$.)

6-12 Use el método de eliminación para determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con las condiciones iniciales específicas:

$$x' = -3x + 2y + 5, \qquad x(0) = 3$$
$$y' = 2x - 6y, \qquad y(0) = 0$$

(*Respuesta:* $x(t) = \frac{2}{5}e^{-2t} + \frac{16}{35}e^{-7t} + \frac{15}{7},\ y(t) = \frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{32}{35}e^{-7t} + \frac{5}{7}$.)

6-4 ▪ MÉTODO DE VALORES CARACTERÍSTICOS

Una alternativa al método de eliminación recién descrito es el **método de valores característicos** (también llamado método de determinantes), que proporciona una forma fácil y sistemática de obtener el polinomio característico. Este método también es una excelente manera de introducir los conceptos básicos relativos al potente método de matrices (o método de vectores característicos) que se explica en el siguiente capítulo. El uso de este método también se limita a sistemas lineales con dos o tres ecuaciones de primer orden con coeficientes constantes. Los sistemas lineales con un mayor número de ecuaciones pueden resolverse en forma más eficiente y sistemática mediante el método de matrices.

Considere el sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes:

$$x' = a_1x + b_1y \tag{6-32a}$$

$$y' = a_2x + b_2y \tag{6-32b}$$

donde a_1, b_1, a_2 y b_2 son constantes reales. Siguiendo la explicación de la sección 3-5 respecto a la forma de la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, suponemos que las funciones de solución x y y son de la forma (figura 6-15):

$$x = k_1e^{\lambda t} \tag{6-33a}$$

$$y = k_2e^{\lambda t} \tag{6-33b}$$

donde k_1, k_2 y λ son constantes cuyos valores van a determinarse a partir del requisito de que las soluciones supuestas satisfagan el sistema de ecuaciones diferenciales dado. Sustituyendo las ecuaciones 6-33 en las ecuaciones 6-32 obtenemos

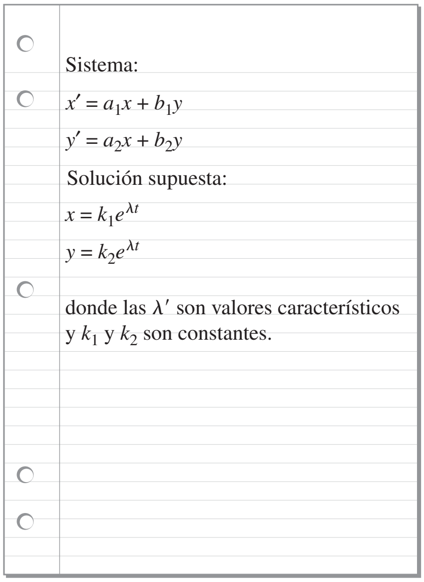


FIGURA 6-15
El método de valores característicos se basa en suponer que la solución de las funciones incógnitas es de la forma de una función exponencial ($k_ne^{\lambda t}$) y luego determinar los valores necesarios de λ, que son los valores característicos.

$$k_1\lambda e^{\lambda t} = a_1k_1e^{\lambda t} + b_1k_2e^{\lambda t} \tag{6-34a}$$

$$k_2\lambda e^{\lambda t} = a_2k_1e^{\lambda t} + b_2k_2e^{\lambda t} \tag{6-34b}$$

Dividiendo ambas ecuaciones entre $e^{\lambda t}$ y reacomodando, obtenemos

$$(a_1 - \lambda)k_1 + b_1k_2 = 0 \tag{6-35a}$$

$$a_2k_1 + (b_2 - \lambda)k_2 = 0 \tag{6-35b}$$

que pueden considerarse como un sistema de dos ecuaciones *algebraicas* lineales homogéneas para los coeficientes desconocidos k_1 y k_2. Una solución obvia de este sistema es $k_1 = k_2 = 0$. Pero descartamos esta como la solución *trivial*, ya que da $x = y = 0$ (en lo que no tenemos ningún interés).

Como quizá recuerde de la teoría de sistemas lineales en álgebra, este sistema lineal homogéneo de ecuaciones algebraicas tendrá una solución no trivial si y solo si su determinante es igual a cero. Es decir,

$$\begin{vmatrix} (a_1 - \lambda) & b_1 \\ a_2 & (b_2 - \lambda) \end{vmatrix} = (a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2b_1 = 0 \tag{6-36}$$

o

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \tag{6-37}$$

Esta ecuación cuadrática en la incógnita A se llama **polinomio característico** del sistema lineal (ecuaciones 6-32). Las dos raíces λ_1 y λ_2 de esta ecuación se llaman **raíces características** o **valores característicos** del sistema dado de ecuaciones.[1]

Observe que el polinomio característico es exactamente el mismo que el que se obtuvo por el método de eliminación (ecuación 6-24), que implica considerables manipulaciones algebraicas. Un examen cuidadoso del determinante en la ecuación 6-36 revela un atajo para la determinación del polinomio característico. Usted resta λ de los elementos de la diagonal principal del determinante de los coeficientes:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

e iguala el determinante a cero (figura 6-16). Esto es análogo a obtener el polinomio característico de una sola ecuación lineal de segundo orden directamente reemplazando y'' por λ^2, y' por λ, y por 1.

Recuerde, del capítulo 3, que la solución general de la ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes depende de si las dos raíces características λ_1 y λ_2 son reales y distintas, reales e iguales o complejas. Este es también el caso para sistemas de ecuaciones lineales, ya que un sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden puede expresarse como una sola ecuación lineal de segundo orden en cualquiera de las dos variables dependientes. Una vez que las raíces características están disponibles, es posible determinar la solución general para x de una manera análoga de la siguiente manera:

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y ambas son reales, entonces $\quad x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$ **(6-38)**

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces $\quad x(t) = (C_1 + C_2t)e^{\lambda_1 t}$ **(6-39)**

Si $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, entonces $\quad x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \operatorname{sen}\beta t + C_2\cos\beta t)$ **(6-40)**

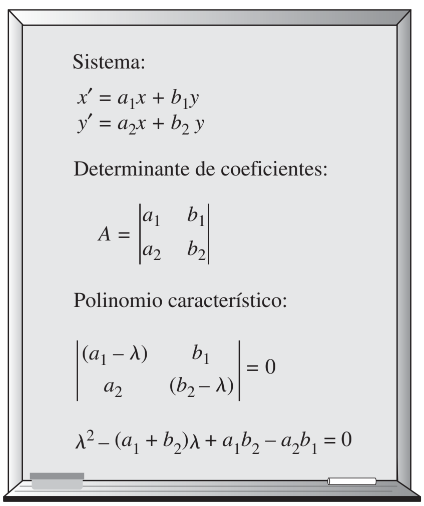


FIGURA 6-16
El polinomio característico de un sistema se obtiene restando λ de los elementos en la diagonal principal del determinante de coeficientes e igualando el determinante a cero.

[1] N. del T. En alemán se llaman *Eigenwert*, que significa precisamente "valor característico"; en inglés se ha extendido el uso del híbrido *eigenvalue*. En español, Collado, J.L., en *Diccionario enciclopédico de términos técnicos,* McGraw-Hill, 2002, da la opción de *eigenvalue* como "valor característico". Me parece más preciso que *eigenvalores* o "autovalores" que otros usan.

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. La otra función incógnita y puede determinarse despejando y de la primera ecuación y sustituyendo en esta las expresiones de x y x' obtenidas de las ecuaciones 6-38, 6-39 o 6-40. Observe que la solución general para y incluirá las mismas dos constantes arbitrarias C_1 y C_2. Ahora se ilustra el procedimiento de resolución mediante un ejemplo.

EJEMPLO 6-9 Método de valores característicos

Use el método de valores característicos para resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden con las condiciones iniciales específicas:

$$x' = 4x + 6y, \quad x(0) = 1$$
$$y' = -3x - 5y, \quad y(0) = 0$$

Solución Este es el sistema considerado en el ejemplo 6-6, y su determinante de coeficientes es

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$$

El polinomio característico se determina restando λ de los elementos de la diagonal principal de este determinante y luego igualando a cero el determinante:

$$\begin{vmatrix} (4-\lambda) & 6 \\ -3 & (-5-\lambda) \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-5-\lambda) - 6(-3) = 0$$

o $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, que es equivalente al polinomio característico obtenido en el ejemplo 6-6 por el método de eliminación. Las raíces de esta ecuación son $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$, que son reales y distintas. Entonces, la solución general (por la ecuación 6-38) de x es

$$x = C_1e^t + C_2e^{-2t}$$

Para determinar la otra función incógnita y, despejamos y de la primera ecuación diferencial y sustituimos las expresiones x y x' obtenidas de la relación anterior en la expresión para y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{6}x' - \frac{4}{6}x \\ &= \frac{1}{6}(C_1e^t - 2C_2e^{-2t}) - \frac{4}{6}(C_1e^t + C_2e^{-2t}) \\ &= -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general del sistema dado de dos ecuaciones de primer orden es

$$x = C_1e^t + C_2e^{-2t}$$
$$y = -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t}$$

que es el mismo resultado obtenido en el ejemplo 6-6.

Las constantes arbitrarias C_1 y C_2 se determinaron en el ejemplo 6-6 como $C_1 = 2$ y $C_2 = -1$ y, por tanto, las soluciones del sistema dado de dos problemas de valor inicial de primer orden se determinan como

$$x = 2e^t - e^{-2t}$$
$$y = -e^t + e^{-2t}$$

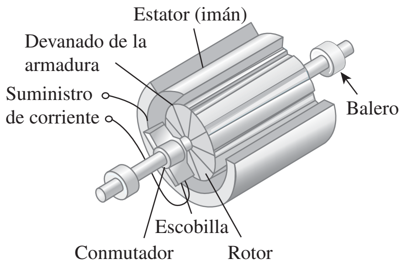


FIGURA 6-17
Vista en corte de un motor de imán permanente.

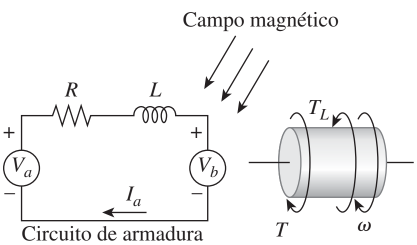


FIGURA 6-18
Diagrama de circuito de un motor de imán permanente.

EJEMPLO 6-10 Motor de imán permanente

Desarrolle un modelo para el motor de imán permanente cuya vista en corte se muestra en la figura 6-17. El voltaje que se aplica al circuito de armadura es V_a, la corriente de armadura es I_a y la velocidad del motor es ω (figura 6-18). El circuito de armadura que se muestra en la figura tiene una resistencia R y una inductancia L. En un motor de imán permanente, el campo magnético lo produce el imán. El subsistema mecánico consiste en la inercia I, que consiste en la inercia de la armadura y en la de cualquier dispositivo que el motor esté haciendo girar (como un ventilador o una bomba).

El momento de torsión externo T_L representa un momento de torsión adicional que actúa sobre la carga. Por ejemplo, si el motor impulsa la rueda de un vehículo, T_L sería el momento de torsión producido por la gravedad cuando el vehículo asciende por una colina.

El motor produce un momento de torsión T que puede comprobarse, por la teoría electromagnética, como proporcional a la corriente de armadura (I_a) como $T = K_T I_a$, donde K_T es la *constante de momento de torsión* del motor. El movimiento de un conductor que lleva corriente en un campo produce voltaje en el conductor que se opone a la corriente. Este voltaje en la armadura se llama *fuerza contraelectromotriz* (de *fuerza electromotriz*, un término antiguo para *voltaje*). Su magnitud es proporcional a la velocidad como $V_b = K_b\omega$, donde K_b es la *constante de fuerza contraelectromotriz* del motor. La fuerza contraelectromotriz es una caída de voltaje en el circuito de armadura; *a*) obtenga el modelo de ecuación diferencial; *b*) obtenga el polinomio característico; *c*) suponga que el voltaje aplicado V_a es una constante y determine el intervalo de valores de parámetros de manera que la velocidad no oscile.

Solución *a*) La ley de voltaje de Kirchhoff da

$$V_a - RI_a - L\frac{dI_a}{dt} - V_b = 0$$

o

$$V_a - RI_a - L\frac{dI_a}{dt} - K_b\omega = 0$$

Por el principio de momento de impulso angular aplicado a la inercia I, tenemos

(*Momento masa de inercia alrededor del eje fijo de rotación*) × (*aceleración angular*) = *suma de los momentos alrededor del eje fijo de rotación*

Esto da

$$I\frac{d\omega}{dt} = T - T_L = K_T I_a - T_L$$

Estas ecuaciones constituyen el modelo del sistema. Para ponerlas en forma estándar, divida entre L e I, respectivamente. Esto da

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{V_a}{L} - \frac{R}{L}I_a - \frac{K_b}{L}\omega \tag{6-41}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{T_L}{I} + \frac{K_T}{I}I_a \tag{6-42}$$

b) El determinante de coeficientes es

$$A = \begin{vmatrix} -R/L & -K_b/L \\ K_T/I & 0 \end{vmatrix}$$

El polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} (-R/L - \lambda) & -K_b/L \\ K_T/I & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

lo cual da $$-\lambda(-R/L - \lambda) + K_T K_b/LI = 0$$

o
$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + K_T K_b / LI = 0$$

Multiplicando por LI obtenemos $LI\lambda^2 + RI\lambda + K_T K_b = 0$.

c) Las raíces características se encuentran mediante la fórmula cuadrática:

$$\lambda = \frac{-RI \pm \sqrt{(RI)^2 - 4LIK_T K_b}}{2LI} \qquad \textbf{(6-43)}$$

Si el voltaje aplicado V_a es una constante, la solución para la velocidad ω consistirá en una constante más los términos que dependen de la naturaleza de las raíces características. De modo que si ambas raíces son reales, los dos términos serán exponenciales y, por tanto, la velocidad no oscilará. Las raíces serán reales si el término debajo de la raíz cuadrada en la ecuación 6-43 es no negativo. Esto será verdad si

$$(RI)^2 - 4LIK_T K_b \geq 0$$

Como $I > 0$, esto se reduce a

$$IR^2 - 4LK_T K_b \geq 0$$

La velocidad del motor no oscilará si esta desigualdad se satisface.

El método de valores característicos también puede aplicarse a sistemas de ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes. El procedimiento de resolución para sistemas no homogéneos se parece mucho a la resolución de una sola ecuación lineal no homogénea. Nuevamente, el primer paso es ignorar todos los términos no homogéneos y determinar la solución homogénea como se acaba de describir. El siguiente paso es determinar una solución particular casi de la misma manera en que lo hicimos en el capítulo 3 para ecuaciones lineales de segundo orden. El paso final es construir la solución general combinando las soluciones homogéneas y particulares por superposición.

Tanto el método de coeficientes indeterminados como el de variación de parámetros pueden usarse para determinar la solución particular. El método de coeficientes indeterminados es sencillo y fácil de aplicar, pero está limitado a términos no homogéneos que incluyan productos de polinomios, funciones exponenciales y funciones de seno y coseno. La diferencia en la selección de la forma general de las soluciones particulares con respecto al caso de sistemas lineales es que ahora debemos considerar los términos no homogéneos en todas las ecuaciones en el sistema y no solo los términos no homogéneos de una sola ecuación (figura 6-19).

Sistema:

$x' = 4x + 6y + 1$

$y' = -3x - 5x + t$

Término no homogéneo: t y 1

Forma de la solución particular:

$x_p = A_1 t + B_1$

$y_p = A_2 t + B_2$

FIGURA 6-19
Al aplicar el método de coeficientes indeterminados a *sistemas* para determinar la solución particular, debemos considerar *todos* los términos no homogéneos en *todas* las ecuaciones.

EJEMPLO 6-11 Método de valores característicos: Sistemas no homogéneos

Use el método de valores característicos para resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden con las condiciones iniciales específicas:

$$x' = 4x + 6y + 1, \quad x(0) = 1$$
$$y' = -3x - 5y + t, \quad y(0) = 0$$

Solución Este es un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes. Su sistema homogéneo asociado es

$$x' = 4x + 6y$$
$$y' = -3x - 5y$$

cuya solución general se determinó en el ejemplo anterior como

$$x_h = C_1e^t + C_2e^{-2t}$$
$$y_h = -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t}$$

Los términos no homogéneos en el sistema son t y 1, y la forma general de la solución particular correspondiente a estos términos no homogéneos es

$$x_p = A_1t + B_1, \quad y_p = A_2t + B_2$$

Sustituyendo en las ecuaciones diferenciales dadas, tenemos

$$A_1 = 4(A_1t + B_1) + 6(A_2t + B_2) + 1$$

y

$$A_2 = -3(A_1t + B_1) - 5(A_2t + B_2) + t$$

Igualando los coeficientes de cada potencia de t en cada lado obtenemos cuatro ecuaciones para los coeficientes indeterminados:

$$4A_1 + 6A_2 = 0$$
$$A_1 - 4B_1 - 6B_2 = 1$$
$$3A_1 + 5A_2 = 1$$
$$A_2 + 3B_1 + 5B_2 = 0$$

La primera ecuación y la tercera incluyen solo dos incógnitas, A_1 y A_2, y la solución de ambas es $A_1 = -3$ y $A_2 = 2$. Entonces las otras dos ecuaciones se resuelven para obtener $B_1 = -4$ y $B_2 = 2$. Por tanto, las soluciones particulares son

$$x_p = -3t - 4$$
$$y_p = 2t + 2$$

Entonces la solución general del sistema dado de dos ecuaciones de primer orden resulta

$$x = C_1e^t + C_2e^{-2t} - 3t - 4$$

y

$$y = -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t} + 2t + 2$$

Las constantes arbitrarias se determinan aplicando las condiciones iniciales $C_1 = 6$ y $C_2 = -1$. Sustituyendo, la solución del sistema dado de dos problemas de valor inicial de primer orden se determina como

$$x = 6e^t - e^{-2t} - 3t - 4$$

y

$$y = -3e^t + e^{-2t} + 2t + 2$$

que es idéntica al resultado obtenido en el ejemplo 6-8 por el método de eliminación.

En este ejemplo usted observará que la forma general de la solución particular para ambas funciones incógnitas es la misma. La diferencia está solamente en los valores de los coeficientes constantes.

Términos no homogéneos que son soluciones de la ecuación homogénea relacionada

Cuando un término no homogéneo resulta ser una de las soluciones homogéneas, la forma supuesta de la solución particular para un sistema de ecuaciones será diferente de la que sería para una sola ecuación. Usted recordará que para ecuaciones individuales supondríamos que la solución particular sería de la forma t^kx_p en los casos donde x_p es la forma normal de la solución particular (es decir, la forma de la solución particular correspondiente a ese término no homogéneo, si no fuera una solución homogénea) y k es el entero positivo más pequeño que elimina cualquier duplicación entre las soluciones homogénea y particular.

Cuando se trata de un sistema de ecuaciones, no basta con multiplicar las soluciones particulares por t^k. En vez de esto, necesitamos multiplicarlas por un polinomio:

$$P_k(t) = A_0t^k + A_1t^{k-1} + \cdots + A_0 \tag{6-44}$$

donde las A son constantes (figura 6-20). La única excepción es la solución particular de la variable dependiente, cuya solución general homogénea se toma como base con constantes arbitrarias C_1 y C_2. Estas pueden absorber cualquier solución homogénea adicional que surja como parte de la solución particular. Pero las soluciones homogéneas para todas las demás variables dependientes incluyen múltiplos fijos de las constantes arbitrarias. Entonces no pueden modificarse para absorber las soluciones homogéneas que surjan como parte de sus soluciones particulares; por tanto, necesitamos considerarlas por separado. Por supuesto, podemos combinarlas después con las soluciones homogéneas. El siguiente ejemplo ilustra esto.

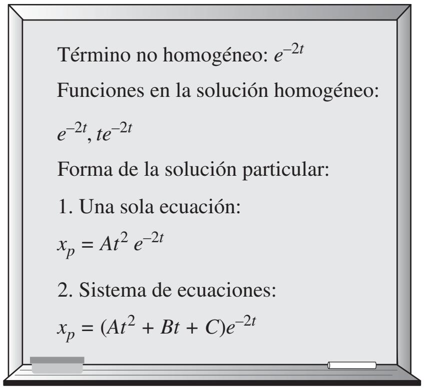


FIGURA 6-20
Cuando un término no homogéneo aparece en la solución homogénea de un *sistema* de ecuaciones, la forma básica de la solución particular correspondiente a ese término debe multiplicarse por un polinomio de grado k, donde k es el menor entero posible que elimine la duplicación entre las soluciones homogénea y particular.

EJEMPLO 6-12 Método de valores característicos: Sistemas con términos asociados no homogéneos

Use el método de valores característicos para resolver el sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$x' = 4x + 6y + 1$$
$$y' = -3x - 5y - e^{-2t}$$

Solución Este es un sistema de dos ecuaciones lineales no homogéneas de primer orden con coeficientes constantes. Su sistema homogéneo asociado es

$$x' = 4x + 6y$$
$$y' = -3x - 5y$$

cuya solución general se determinó en el ejemplo anterior como

$$x_h = C_1e^t + C_2e^{-2t}$$
$$y_h = -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t}$$

Los términos no homogéneos en el sistema son e^{-2t} y 1. La solución particular que corresponde a la constante 1 es simplemente una constante. Sin embargo, la solución particular correspondiente a e^{-2t} sería un múltiplo constante de te^{-2t}, ya que e^{-2t} es una solución homogénea. Sin embargo, para sistemas debemos incluir también un múltiplo constante de e^{-2t} como parte de la solución particular; por tanto, las formas propias de las soluciones particulares en este caso son

$$x_p = A_1e^{-2t} + B_1te^{-2t} + D_1$$

y

$$y_p = A_2e^{-2t} + B_2te^{-2t} + D_2$$

Sin embargo, podemos tomar $A_1 = 0$ en x_p sin pérdida de generalidad, ya que la solución homogénea x_h se toma como la solución base (solución con coeficientes completamente arbitrarios), y las constantes arbitrarias en la relación x_h pueden absorber cualesquiera términos adicionales e^{-2t} que puedan surgir como parte de la solución particular.[2] Por tanto, consideramos las soluciones particulares como

[2] No podemos considerar que *tanto* A_1 *como* A_2 sean cero, porque el término e^{-2t} debe conservarse en una de las soluciones particulares, ya sea en x_p o en y_p. Trate de igualar $A_1 = A_2 = 0$ y vea qué sucede.

$$x_p = B_1te^{-2t} + D_1$$

y $$y_p = A_2e^{-2t} + B_2te^{-2t} + D_2$$

Sustituyendo en las ecuaciones diferenciales dadas, obtenemos

$$B_1e^{-2t} - 2B_1te^{-2t} = 4(B_1te^{-2t} + D_1) + 6(A_2e^{-2t} + B_2te^{-2t} + D_2) + 1$$
$$-2A_2e^{-2t} + B_2e^{-2t} - 2B_2te^{-2t} = -3(B_1te^{-2t} + D_1)$$
$$-5(A_2e^{-2t} + B_2te^{-2t} + D_2) - e^{-2t}$$

Igualando los coeficientes de términos similares en cada lado obtenemos las siguientes seis ecuaciones para la determinación de los cinco coeficientes indeterminados:

$$4D_1 + 6D_2 + 1 = 0$$
$$-3D_1 - 5D_2 = 0$$
$$B_1 = 6A_2$$
$$-2A_2 + B_2 = -5A_2 - 1$$
$$-2B_1 = 4B_1 + 6B_2$$
$$-2B_2 = -3B_1 - 5B_2$$

Usted puede verificar con facilidad que las dos últimas ecuaciones son idénticas. Las primeras dos ecuaciones incluyen dos de las incógnitas (solo D_1 y D_2), y la solución de ambas ecuaciones es $D_1 = -2.5$ y $D_2 = 1.5$. Luego se resuelven las demás ecuaciones para obtener $A_2 = 1/3$, $B_1 = 2$ y $B_2 = -2$. Por tanto, las soluciones particulares son

$$x_p = 2te^{-2t} - \frac{5}{2}$$

y $$y_p = -\frac{1}{3}e^{-2t} - 2te^{-2t} + \frac{3}{2}$$

Entonces la solución general del sistema dado de las dos primeras ecuaciones resulta

$$x = C_1e^t + C_2e^{-2t} + 2te^{-2t} - \frac{5}{2}$$

y $$y = -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-2t} - 2te^{-2t} + \frac{3}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}C_1e^t - \left(C_2 + \frac{1}{3}\right)e^{-2t} - 2te^{-2t} + \frac{3}{2}$$

Estas soluciones pueden verificarse sustituyéndolas directamente en cada una de las ecuaciones del sistema dado.

Modos

Los sistemas que tienen grados múltiples de libertad (tales como las masas múltiples conectadas por elementos elásticos o amortiguadores) pueden exhibir un comportamiento complicado. Su respuesta libre es la suma de ciertas pautas de comportamiento que se llaman **modos**. Conocer estos modos nos permite entender mejor la respuesta de dichos sistemas.

EJEMPLO 6-13 Modos de un sistema no vibracional

Determine los modos del sistema:

$$x' = 4x + 6y$$
$$y' = -3x - 5y$$

Solución Generalizando los resultados del ejemplo 6-6, la solución puede expresarse como

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{-2t} = \frac{2}{3}[x(0) + y(0)]e^t + \left[\frac{1}{3}x(0) - \frac{2}{3}y(0)\right]e^{-2t}$$

y
$$y(t) = \frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t} = \frac{1}{3}[x(0) + y(0)]e^t - \left[\frac{1}{3}x(0) - \frac{2}{3}y(0)\right]e^{-2t}$$

Entonces, podemos ver que si las condiciones iniciales son tales que $C_1 = 0$ (es decir, si $x(0) = -y(0)$), entonces el término e^t no aparecerá en la solución, y $x(t) = -y(t) = C_2e^{-2t}$ es la solución. La solución se llama *modo* del sistema de ecuaciones. Observe que tiende a cero cuando $t \to \infty$.

De la misma manera, si las condiciones iniciales son tales que $C_2 = 0$ (es decir, si $x(0) = 2y(0)$), entonces el término e^{-2t} no aparecerá en la solución y $x(t) = 2y(t) = C_1e^t$ es la solución. Esta solución también es un modo del sistema de ecuaciones. Observe que tiende a infinito cuando $t \to \infty$.

Entonces, la solución general consiste en la suma de dos términos: los modos. Si las condiciones iniciales apenas son correctas, entonces solo aparecerá un modo en la solución. Por ejemplo, el modo correspondiente a e^t es inestable porque se volverá infinita. De manera que si buscamos un conjunto de condiciones iniciales que garantice que la solución permanezca finita, cualquier conjunto de condiciones iniciales tal que $x(0) = -y(0)$ dará una solución finita. La solución se volverá infinita para cualquier otro conjunto de condiciones iniciales.

Los modos son muy útiles cuando se analizan sistemas vibratorios. Comprobaremos que estos modos se encuentran más fácilmente si usamos las ecuaciones originales de segundo orden en vez de convertirlas en un conjunto de ecuaciones de primer orden.

Considere un sistema no amortiguado de dos masas como el que se muestra en la figura 6-21, donde x_1 y x_2 son los desplazamientos de las masas. Si despreciamos cualquier fricción entre las masas y la superficie, las ecuaciones de movimientos para el sistema son

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2)$$

y
$$m_1\ddot{x}_2 = -k_3x_2 + k_2(x_1 - x_2)$$

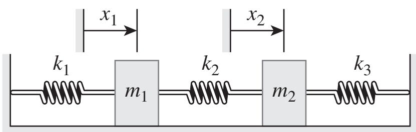


FIGURA 6-21
Sistema no amortiguado de dos masas.

Podríamos convertir este sistema de ecuaciones de segundo orden en un sistema equivalente de cuatro ecuaciones de primer orden. Luego, mediante el método de valores característicos podríamos sustituir $x_1(t) = A_1e^{\lambda t}$ y $x_2(t) = A_2e^{\lambda t}$ en las cuatro ecuaciones. El determinante resultante sería de 4 × 4, que sería tedioso de reducir para obtener el polinomio característico.

En vez de esto, sustituya $x_1(t) = A_1e^{\lambda t}$ y $x_2(t) = A_2e^{\lambda t}$ en las ecuaciones diferenciales anteriores y cancele los términos exponenciales para obtener

$$m_1\lambda^2A_1 = -k_1A_1 - k_2(A_1 - A_2)$$

y
$$m_2\lambda^2A_2 = -k_3A_2 + k_2(A_1 - A_2)$$

Agrupe los coeficientes de A_1 y A_2:

$$(m_1\lambda^2 + k_1 + k_2)A_1 - k_2A_2 = 0 \qquad \textbf{(6-45)}$$

y
$$-k_2A_1 + (m_2\lambda^2 + k_2 + k_3)A_2 = 0 \qquad \textbf{(6-46)}$$

Para tener soluciones diferentes de cero para A_1 y A_2, el determinante de estas ecuaciones debe ser cero. Entonces,

$$\begin{vmatrix} (m_1\lambda^2 + k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (m_2\lambda^2 + k_2 + k_3) \end{vmatrix} = 0$$

Expandiendo este determinante obtenemos

$$(m_1\lambda^2 + k_1 + k_2)(m_2\lambda^2 + k_2 + k_3) + k_2^2 = 0 \qquad \textbf{(6-47)}$$

Cuando se trata de modelos de sistemas vibratorios que no contienen fuerzas amortiguadoras es posible comprobar que las raíces características siempre son puramente imaginarias, sin parte real. Entonces, las raíces características tendrán la forma $\lambda = \pm ib_1$ y $\lambda = \pm ib_2$, donde b_1 y b_2 son las frecuencias en radianes de la oscilación. La solución homogénea para x_1 tiene la forma

$$x_1(t) = A_{11}e^{ib_1t} + A_{12}e^{-ib_1t} + A_{13}e^{ib_2t} + A_{14}e^{-ib_2t}$$

donde A_{11} y A_{12} son complejos conjugados, como también lo son A_{13} y A_{14}. Entonces, las partes imaginarias en la expresión para $x_1(t)$ se cancelarán, dejando que $x_1(t)$ sea real. Esta expresión puede expresarse en la forma

$$x_1(t) = B_1 \operatorname{sen}(b_1t + \varphi_1) + B_2 \operatorname{sen}(b_2t + \varphi_2) \qquad \textbf{(6-48)}$$

De modo similar, la respuesta de x_2 tiene la forma

$$x_2(t) = r_1B_1 \operatorname{sen}(b_1t + \varphi_3) + r_2B_2 \operatorname{sen}(b_2t + \varphi_4) \qquad \textbf{(6-49)}$$

donde r_1 y r_2 se llaman **razones de modos** para el primero y segundo modos. El primer modo es un movimiento en el que $x_2(t) = r_1x_1(t)$. En el segundo modo, $x_2(t) = r_2x_1(t)$. El desplazamiento en cada modo es sinusoidal, con una amplitud fija. Por la ecuación 6-48 y la ecuación 6-49, vemos que el movimiento completo en general es una combinación lineal de ambos modos.

La velocidad en cada modo es cosinusoidal, y se encuentra fácilmente a partir de los desplazamientos; por ejemplo, si la velocidad de la primera masa es $v_1 = x_1'$, entonces, por la ecuación 6-48,

$$v_1 = b_1B_1 \cos(b_1t + \varphi_1) + b_2B_2 \cos(b_2t + \varphi_2)$$

Aun cuando este es un sistema de cuarto orden, necesitamos ocuparnos solo de dos modos: los que tienen que ver con los desplazamientos; los otros dos describen las velocidades, que se encuentran fácilmente en un sistema vibratorio no amortiguado, como ya se mostró.

Cuando no hay amortiguación en el modelo es más fácil realizar el análisis de modos usando el modelo reducido de segundo orden para cada masa en el sistema. El modelo no amortiguado puede acomodarse de tal manera que las razones de modos sean reales, sean razones solo de desplazamientos y por tanto, sean más fáciles de interpretar. Esta es una razón por la que la amortiguación se desprecia a menudo al hacer un análisis de modos de un sistema vibratorio. Si la amortiguación es ligera, las raíces y los modos característicos serán casi los mismos que las del sistema no amortiguado; incluso si la amortiguación no es pequeña, la comprensión que se gana mediante el análisis sin amortiguación a menudo es bastante útil para propósitos de diseño. Si la amortiguación debe considerarse en el análisis de modos, la forma de variables de estado es más fácil de usar.

EJEMPLO 6-14 Modos de dos masas en translación

Encuentre e interprete las razones de modos para el sistema que se muestra en la figura 6-21 para el caso $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_3 = k$ y $k_2 = 2k$.

Solución Usando $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_3 = k$ y $k_2 = 2k$, obtenemos, a partir de las ecuaciones 6-45, 6-46 y 6-47:

$$(m\lambda^2 + 3k)A_1 - 2kA_2 = 0 \qquad \textbf{(6-50)}$$

$$-2kA_1 + (m\lambda^2 + 3k)A_2 = 0 \qquad \textbf{(6-51)}$$

y $(m\lambda^2 + 3k)^2 - 4k^2 = 0$. Esta puede simplificarse a $m\lambda^4 + 6km\lambda^2 + 5k^2 = 0$ o $\lambda^4 + 6\alpha\lambda^2 + 5\alpha^2 = 0$, donde $\alpha = k/m$.

Este polinomio tiene cuatro raíces porque es de cuarto orden. De este podemos despejar λ^2 usando la fórmula cuadrática porque es cuadrática en λ^2 (no hay ningún término de λ ni de λ^3). Para ver por qué esto es verdad, sea $u = \lambda^2$. Entonces la ecuación anterior se vuelve $u^2 + 6\alpha u + 5\alpha^2 = 0$, la cual tiene las soluciones $u = -\alpha$ y $u = -5\alpha$. Entonces, $\lambda = \pm i\sqrt{\alpha}$ y $\lambda = \pm i\sqrt{5\alpha}$. Las dos frecuencias de modos son, por tanto, $\omega_1 = \sqrt{\alpha}$ y $\omega_2 = \sqrt{5\alpha}$.

La razón de modos puede encontrarse a partir de cualquiera de las ecuaciones 6-50 o 6-51. Eligiendo la primera, obtenemos

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2\alpha}{\lambda^2 + 3\alpha} \tag{6-52}$$

La razón de modos A_1/A_2 puede considerarse como la razón entre las amplitudes de x_1 y x_2 en ese modo.

Para el primer modo, la razón de modos puede encontrarse sustituyendo $\lambda^2 = -\alpha$ para obtener $A_1/A_2 = 1$. Entonces, en el modo 1, las masas se mueven en la misma dirección con la misma amplitud. Esta oscilación tiene una frecuencia de $\omega_1 = \sqrt{\alpha} = \sqrt{k/m}$.

Para el segundo modo, sustituya $\lambda^2 = -5\alpha$ en la ecuación 6-52 para obtener $A_1/A_2 = -1$. Entonces, en el modo 2, las masas se mueven en direcciones *opuestas*, pero con la misma amplitud. Esta oscilación tiene una frecuencia más alta de $\omega_2 = \sqrt{5\alpha} = \sqrt{5k/m}$.

El movimiento específico depende de las condiciones iniciales, que en general son una combinación de ambos modos. Si las masas se desplazan inicialmente una distancia igual en la misma dirección, y entonces se liberan, únicamente se estimulará el primer modo. Por otra parte, solo se estimulará el segundo modo si las masas se desplazan inicialmente una distancia igual pero en direcciones opuestas.

Para el sistema que se trató en el ejemplo 6-14, los modos eran *simétricos* porque el sistema lo es alrededor de su punto medio; es decir, las masas son iguales y las rigideces son iguales. En general, no es el caso.

EJEMPLO 6-15 **Modos no simétricos**

Encuentre e interprete las razones de modos para el sistema que se muestra en la figura 6-21 para el caso $m_1 = m$, $m_2 = 3m$, $k_1 = k$ y $k_2 = k_3 = 2k$.

Solución Para este caso, la ecuación 6-47 se vuelve $3u^2 + 13\alpha u + 8\alpha^2 = 0$, donde $u = \lambda^2$ y $\alpha = k/m$. Por la fórmula cuadrática, obtenemos $u = \lambda^2 = -0.743\alpha$ y $u = \lambda^2 = -3.591\alpha$. Entonces, las dos frecuencias de modos son $\omega_1 = \sqrt{0.743\alpha} = 0.862\sqrt{k/m}$ y $\omega_2 = \sqrt{3.591\alpha} = 1.89\sqrt{k/m}$. Por la ecuación 6-45, la razón de modos para el modo 1 se calcula sustituyendo $\lambda^2 = -0.743\alpha$ como

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2\alpha}{\lambda^2 + 3\alpha} = 0.866$$

Entonces, en el modo 1, las masas se mueven en la misma dirección con la amplitud de la masa m_1 igual a 0.886 veces la amplitud de la masa m_2. Esta oscilación tiene una frecuencia en radianes de $\omega_1 = 0.862\sqrt{k/m}$. Sustituyendo $\lambda^2 = -3.591\alpha$ en la ecuación 6-52, obtenemos $A_1/A_2 = -3.39$. Entonces, en el modo 2, las masas se mueven en la dirección *opuesta* con la amplitud de la masa m_1 igual a 3.39 veces la amplitud de la masa m_2. Esta oscilación tiene una frecuencia más alta de $\omega_2 = 1.89\sqrt{k/m}$.

Para estimular el primer modo, desplace la masa m_1 0.886 veces el desplazamiento inicial de la masa m_2, en la misma dirección. Para estimular el segundo modo, desplace la masa m_1 3.39 veces el desplazamiento inicial de la masa m_2, pero en dirección opuesta.

Las razones de modos son importantes en el diseño de construcción, por ejemplo, porque indican la cantidad de movimiento relativo de los pisos y, por tanto, la cantidad de esfuerzo sobre las columnas de soporte. Los datos sobre el movimiento del suelo durante un terremoto pueden analizarse para determinar si el movimiento contiene frecuencias cercanas a las frecuencias de modos de un edificio; de ser así, el edificio puede experimentar grandes movimientos durante un sismo. De manera que es importante poder calcular las frecuencias de modos cuando el edificio se diseña.

Repaso de sección

6-13C ¿Cómo se compara el método de los valores característicos con el método de eliminación? ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas de cada uno?

6-14C ¿Cuál es la limitación principal del método de valores característicos? ¿Es aplicable a sistemas no homogéneos? ¿Es aplicable a sistemas no lineales? ¿Es aplicable a sistemas con coeficientes variables?

6-15 Use el método de valores característicos para determinar la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden:

a) $x' = 3x - y$, $y' = x + y$ *b*) $x' = 3x - y + t$, $y' = x + y - 2$

(*Respuestas: a*) $x(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t}$ y $y(t) = C_1e^{2t} + C_2(t-1)e^{2t}$
b) $x(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}$ y $y(t) = C_1e^{2t} + C_2(t-1)e^{2t} + \frac{1}{4}t + \frac{7}{4}$.)

6-16 Use el método de valores característicos para determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con las condiciones iniciales específicas:

$$x' = 2x - 6y + 1,\ x(0) = 1$$
$$y' = 4x + 2y + t,\ \ y(0) = 0$$

(*Respuestas:* $x(t) = \frac{33\sqrt{6}}{192}e^{2t}\operatorname{sen} 2\sqrt{6}t + \frac{54}{49}e^{2t}\cos 2\sqrt{6}t - \frac{3}{14}t - \frac{5}{49}$ y

$$y(t) = -\frac{33}{196}e^{2t}\cos 2\sqrt{6}t + \frac{18\sqrt{6}}{49}e^{2t}\operatorname{sen} 2\sqrt{6}t - \frac{1}{14}t + \frac{33}{196}.)$$

6-5 ▪ MÉTODOS DE COMPUTADORA

Las computadoras pueden facilitar la aplicación de los métodos de este capítulo.

Método de valores característicos. Una ventaja del método de valores característicos es que el polinomio característico se obtiene junto con la solución. Como vimos en varios ejemplos en capítulos anteriores, esta ecuación puede dar rápidamente información útil acerca de la solución sin realmente obtenerla. El método de valores característicos requiere la evaluación simbólica de un determinante. Esto puede hacerse en una computadora usando los métodos de determinantes descritos en el capítulo 4, sección 4-9.

Resolución directa de sistemas de ecuaciones. Si usted necesita la solución, muchos sistemas de ecuaciones pueden resolverse en forma cerrada en una computadora. Por ejemplo, considere el sistema dado en el ejemplo 6-13.

$$x' = 4x + 6y + 1,\ y' = -3x - 5y - e^{-2t}$$

donde t es la variable independiente. La solución para condiciones iniciales arbitrarias es

TABLA 6-1

Solución por computadora para el sistema

$$x' = 4x + 6y + 1, y' = -3x - 5y - e^{-2t}$$

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
[x,y]=dsolve('Dx=4*x+6*y+1','Dy=-3*x-5*y-exp(-2*t)')
```

MuPAD

```
eqns:={x'(t)=4*x(t)+6*y(t)+1,y'(t)=-3*x(t)-5*y(t)-exp(-2*t)}
ode::solve(eqns, {x(t),y(t)})
```

Maple

```
eqns:=x'(t)=4*x(t)+6*y(t)+1,y'(t)=-3*x(t)-5*y(t)-exp(-2*t)
dsolve([eqns])
```

Mathematica

```
DSolve[{z'[x] == 4*z[x]+6*y[x]+1,
y'[x] == -3*z[x]-5*y[x] - Exp[-2*x]},{z,y},x]
```

$$x = C_1e^t + C_2e^{-2t} + 2te^{-2t} - 2.5$$

y $$y = -\frac{1}{2}C_1e^t - C_2e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-2t} - 2te^{-2t} + 1.5$$

La tabla 6-1 muestra cómo obtener esta solución usando diversos programas. Si usted usa dos o más programas diferentes para resolver estas ecuaciones, observará que pueden acomodar en forma diferente los dos coeficientes indeterminados.

La tabla 6-2 muestra cómo obtener la solución para las condiciones iniciales, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. La solución es

$$x(t) = \frac{10}{3}e^t + \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{5}{2} + 2te^{-2t}$$

y $$y(t) = -\frac{5}{3}e^t + \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{3}{2} - 2te^{-2t}$$

TABLA 6-2

Solución por computadora para el sistema

$$x' = 4x + 6y + 1, y' = -3x - 5y - e^{-2t}$$
$$x(0) = 1, y(0) = 0$$

MATLAB

```
[x,y]=dsolve('Dx=4*x+6*y+1','Dy=-3*x-5*y-exp(-2*t)',
 'x(0)=1','y(0)=0')
```

MuPAD

```
eqns:={x'(t)=4*x(t)+6*y(t)+1,y'(t)=-3*x(t)-5*y(t)
 -exp(-2*t),x(0)=1,y(0)=0}
ode::solve(eqns, {x(t),y(t)})
```

Maple

```
eqn:= x'(t)=4*x(t)+6*y(t)+1,y'(t)=-3*x(t)-5*y(t)-exp(-2*t)
ics:= x(0)=1, y(0)=0
dsolve([eqn,ics])
```

Mathematica

```
DSolve[{z'[x]==4*z[x]+6*y[x]+1,z[0]==1,
y'[x]==-3*z[x]-5*y[x]-Exp[-2*x],y[0]==0},{z,y},x]
```

6-6 ▪ RESUMEN

Los sistemas de ecuaciones diferenciales se presentan naturalmente en el análisis de muchos problemas prácticos que incluyen dos o más sistemas físicamente acoplados. Las variables dependientes en tales sistemas son interdependientes y necesitan determinarse simultáneamente. Los sistemas de ecuaciones diferenciales incluyen las derivadas de dos o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, usualmente el tiempo t.

Forma estándar. Las ecuaciones diferenciales que constituyen un sistema pueden ser de órdenes diferentes. Pero para uniformar el manejo de sistemas de ecuaciones diferenciales, es práctica común transformar tales sistemas en un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden. Cualquier ecuación diferencial de orden n siempre puede transformarse en un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden.

Clasificación de sistemas. Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales es *lineal* si cada ecuación individual en el sistema lo es; que un sistema es *no lineal* aun cuando una sola ecuación tenga un solo término no lineal; que un sistema lineal de ecuaciones diferenciales es *homogéneo* si cada ecuación individual en el sistema es homogénea; y que un sistema es *no homogéneo* aun cuando una sola ecuación incluya un solo término no homogéneo.

Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales tiene *coeficientes constantes* si cada ecuación del sistema en la forma estándar tiene coeficientes constantes; y que un sistema tiene *coeficientes variables* aun cuando solo una ecuación tenga un coeficiente variable (una función de la variable independiente).

Procedimientos de resolución para sistemas lineales. Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales pueden resolverse usando un procedimiento sistemático, pero incluso los sistemas lineales provocarán dificultad en su resolución si incluyen coeficientes variables, ya que las soluciones en tales casos suelen incluir series infinitas. Por tanto, en este capítulo se han enfatizado los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

El método de eliminación. Hay varios métodos disponibles para resolver sistemas lineales; el *método de eliminación* es el más sencillo y elemental para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. Se basa en convertir un sistema de n ecuaciones de primer orden en una sola ecuación de orden n con *una sola* variable dependiente mediante la eliminación de todas las demás variables, una por una. Entonces, la ecuación de orden n se resuelve usando las técnicas explicadas en los capítulos anteriores. Este método es análogo a resolver un sistema de ecuaciones algebraicas eliminando todas las incógnitas menos una.

El método de valores característicos. Una alternativa del método de eliminación es el *método de valores característicos* (también llamado *método de determinantes*), que proporciona una manera fácil y sistemática de obtener el polinomio característico de sistemas lineales con coeficientes constantes. En este método, el polinomio característico se obtiene restando λ de los elementos de la diagonal principal del determinante de coeficientes y luego igualando a cero el determinante. Las raíces de este polinomio se llaman *raíces características* o *valores característicos*. Este método da el mismo polinomio característico de manera sistemática, sin necesidad de ninguna eliminación ni manipulaciones prolongadas, sin importar el número de ecuaciones en el sistema. Se parece mucho a la resolución de una sola ecuación diferencial con coeficientes constantes.

Modos de sistema. El método de valores característicos puede usarse para ilustrar el concepto de modos, que son las formas básicas de solución de un conjunto de ecuaciones. Un conjunto de dos ecuaciones tendrá dos modos, y así sucesivamente. Para un conjunto específico de condiciones iniciales, solo aparecerá un modo en la solución; para conjuntos con valores característicos reales, todos los modos tendrán comportamiento exponencial. Para conjuntos que tengan al menos algunos valores característicos complejos, por lo menos algunos de los modos serán oscilatorios.

Tanto el método de eliminación como el de valores característicos son sencillos y fáciles de seguir, pero no son prácticos para sistemas con más de dos o tres ecuaciones porque se vuelven tediosos y complicados al aumentar el número de ecuaciones del sistema. Tales sistemas grandes pueden resolverse en forma más eficiente y sistemática mediante el *método de vectores característicos*, que se presentará en el capítulo 7.

PROBLEMAS

6-1 Descripción general de sistemas de ecuaciones diferenciales

6-17C ¿En qué se distinguen los sistemas de ecuaciones diferenciales de los sistemas de ecuaciones algebraicas?

6-18C ¿En qué condiciones es posible transformar una ecuación diferencial de orden n en un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden? ¿Cuál es el procedimiento para expresar una ecuación diferencial de orden n como un sistema de n ecuaciones de primer orden?

6-19C ¿En qué se distingue un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de un sistema con coeficientes variables?

Reduzca las siguientes ecuaciones diferenciales a un sistema de ecuaciones de primer orden (x es la variable dependiente y t es la variable independiente):

6-20 *a*) $t^3x''' + tx' + x = 0$
b) $x''' + tx' - 3x = \operatorname{sen} 2t$

6-21 *a*) $x''' + 2x^2x' + 2x = te^{-3t}$
b) $x'' + 5x' - kx = 0$

6-22 *a*) $x''' - 3x' + tx = 0$
b) $x''' + x' = t^2 \cos t$

6-23 *a*) $x^{(iv)} - 5x' + \cos x = t + 1$
b) $x^{(iv)} = 0$

6-24 *a)* $x^{(iv)} + 2t^2x' + 5x = 0$

b) $x^{(iv)} + e^tx = \dfrac{1}{t}$

6-25 *a)* $x'' + e^xx' - 2x = 6$

b) $x''' - 2x' + x = t^3\cos 2t$

6-26 *a)* $x^{(v)} + \dfrac{1}{x} = 1$

b) $x^{(iv)} - 8x' - e^{\ln x} = 0$

Reduzca los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales a sistemas de ecuaciones de primer orden (t es la variable independiente):

6-27 $x''' = xy$
$(t-1)^3y'' = 2txy' - y + e^{-t}$

6-28 $x''' = ty' - 3y + x^2e^{3t}, x(-1) = 1, x'(-1) = 0,$
y $x''(-1) = 4$
$y'' = 6xy - 2, y(-1) = -2, y'(-1) = 0$

6-29 $x''' = x + y' + z'' - 3t, y'' = t^2y - xz$ y
$z'' = xy - yz - 1$

6-30 $x'' = 4(y - z) + tz' - \cos 2t,$
$x(0) = 0$, y $x'(0) = -1$
$y'' = -3xy' - tz, y(0) = 0$ y $y'(0) = 7$
$z'' = x^2 - 3xz, z(0) = 0$ y $z'(0) = 2$

Determine si los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales son a) *lineales o no lineales,* b) *homogéneos o no homogéneos y* c) *tienen coeficientes constantes o variables:*

6-31 $x''' = x + y$
$y'' = 2txy' - y + e^{-t} - 1$

6-32 $x^{(iv)} = 2(x - y) + y' - 3x'$
$y'' = x + y$

6-33 $x''' = x + y' + z''$
$y'' = t^2y - xz$
$z'' = xy - yz - 1$

6-34 $x'' = 4(y - x) + z'$
$y'' = -3x + y' - z$
$z''x + y + z$

6-35 $x''' = 4(y - x) + z'$
$y' = 3x + y - z + 3$
$z'' = 2x - 3z$

6-36 $x' = 2(x + z) - 3xy + e^t$
$y' = -x + y - z$
$z' = x - 3z + 1$

6-37 $x' = 3x - z$
$y' = tx + y - 3z$
$z' = t^2(x - z) + 1$

6-2 Origen de sistemas de ecuaciones diferenciales

6-38 Considere dos masas m_1 y m_2 y tres resortes lineales con constantes de resorte k_1, k_2 y k_3 conectados en serie, como se muestra en la figura P6-38. Inicialmente, ambas masas están sin movimiento y en sus posiciones de equilibrio. En consecuencia, los resortes no están ni estirados ni comprimidos en $t = 0$. Ahora se aplica una fuerza periódica $F(t)$ a m_2 para que ambas masas tengan movimiento. Haciendo que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representen las posiciones de las dos masas relativas a sus posiciones de equilibrio, y despreciando cualquier fricción, obtenga la ecuación diferencial que rige el movimiento de las dos masas.

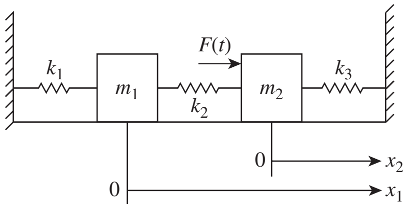


FIGURA P6-38

6-39 Considere tres masas m_1, m_2 y m_3 y tres resortes lineales con constantes de resorte k_1, k_2 y k_3 conectados en serie, como se muestra en la figura P6-39. Inicialmente, las tres masas están sin movimiento y en sus posiciones de equilibrio. En consecuencia, los resortes no están ni estirados ni comprimidos en $t = 0$. Ahora se aplica la fuerza periódica $F(t)$ a m_3 para que las tres masas tengan movimiento. Haciendo que $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ representen las posiciones de las masas relativas a su posición de equilibrio y despreciando cualquier fricción, obtenga las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de las masas.

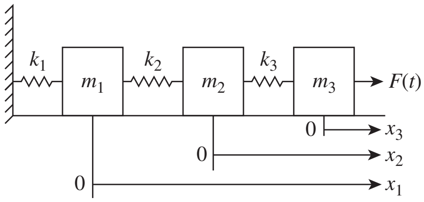


FIGURA P6-39

6-40 Considere dos masas m_1 y m_2 y dos resortes lineales con constantes de resorte k_1 y k_2 conectados en serie, como se muestra en la figura P6-40. La segunda masa también está conectada a un amortiguador cuyo coeficiente de amortiguación es c. Inicialmente, ambas masas están sin movimiento y en sus posiciones de equilibrio. En consecuencia, los resortes no están ni estirados ni comprimidos en $t = 0$. Ahora se aplica una fuerza periódica $F(t)$ a m_1 para que ambas masas tengan movimiento. Haciendo que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representen las posiciones de las dos masas relativas a sus posiciones de equilibrio, obtenga las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de las dos masas.

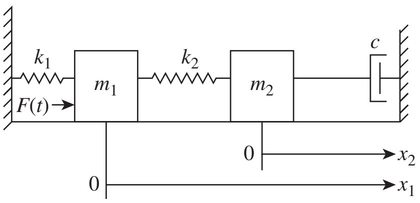


FIGURA P6-40

6-41 Considere el circuito eléctrico que se muestra en la figura P6-41. Consiste en dos lazos cerrados. Tomando las direcciones indicadas de las corrientes como positivas, obtenga las ecuaciones diferenciales que rigen las corrientes I_1 e I_2 que fluyen a través del resistor R y del inductor L, respectivamente.

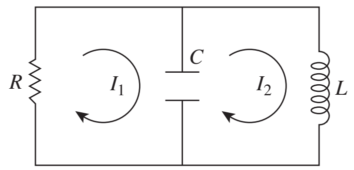


FIGURA P6-41

6-42 El circuito eléctrico que se muestra en la figura P6-42 consiste en dos lazos cerrados. Tomando las direcciones indicadas de las corrientes como positivas, obtenga las ecuaciones diferenciales que rigen las corrientes I_1 e I_2 que fluyen a través del capacitor C y del inductor I_2, respectivamente.

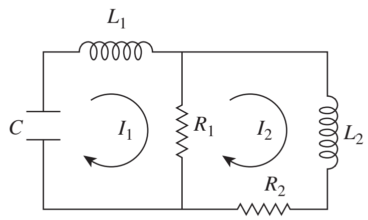


FIGURA P6-42

6-43 El circuito eléctrico que se muestra en la figura P6-43 consiste en tres lazos cerrados. Tomando las direcciones indicadas de las corrientes como positivas, obtenga las ecuaciones diferenciales que rigen las corrientes I_1, I_2 e I_3 que fluyen a través de los resistores R_1, R_2 y R_3, respectivamente.

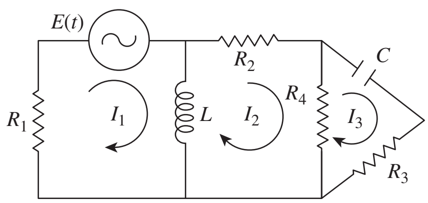


FIGURA P6-43

6-44 Dos tanques de salmuera, cada uno de los cuales contiene 1 000 L (litros) de salmuera, están conectados como se muestra en la figura P6-44. En cualquier tiempo t, el primer tanque y el segundo contienen $x_1(t)$ y $x_2(t)$ kg de sal, respectivamente. La concentración de la salmuera en cada tanque se mantiene uniforme mediante agitación continua. Entra agua al primer tanque a razón de 50 L/min, y la salmuera se descarga del segundo tanque con el mismo caudal.

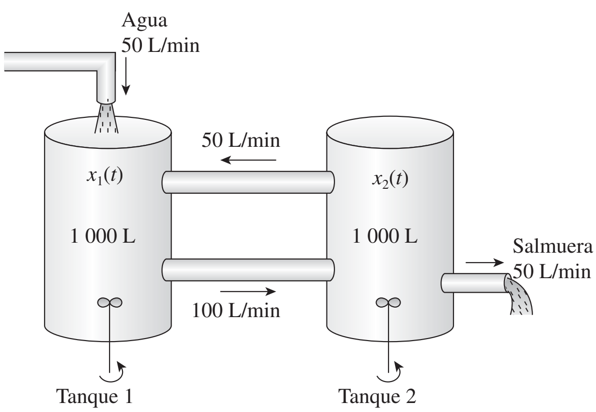


FIGURA P6-44

La salmuera se bombea del primer tanque al segundo a razón de 100 L/min, y del segundo tanque al primero a razón de 50 L/min. Obtenga las ecuaciones diferenciales que rigen el contenido de sal en cada tanque en función del tiempo: $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

6-45 Repita el problema 6-44 suponiendo que, en vez de agua, al primer tanque entra salmuera que contiene 0.05 kg de sal por litro, a razón de 50 L/min.

6-3 Método de eliminación

6-46C Considere un sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes. ¿La sola ecuación diferencial equivalente de tercer orden que se obtiene por el método de eliminación es necesariamente lineal y homogénea con coeficientes constantes?

Use el método de eliminación para determinar la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden:

6-47 *a)* $x' = x - y$, $y' = -x + 4y$ *b)* $x' = x - y - t + 1$, $y' = -x + 4y + te^t$

6-48 *a)* $x' = x - y$, $y' = -3x - 2y$ *b)* $x' = x - y - t^2 - 1$, $y' = -3x - 2y + 3t$

6-49 *a)* $x' = 2x + 4y$, $y' = -x + 2y$ *b)* $x' = 2x + 4y - 5t^2e^{3t}$, $y' = -x + 2y$

6-50 *a)* $x' = 7x + y$, $y' = -x - 3y$ *b)* $x' = 7x + y - 1$, $y' = -x - 3y + 1$

6-51 *a)* $x' = 2x + y$, $y' = x - 2y$ *b)* $x' = 2x + y + 1$, $y' = x - 2y + 3t^2$

6-52 *a)* $x' = -x + 2y$, $y' = 3x + y$ *b)* $x' = -x + 2y + 3\operatorname{sen} 2t$, $y' = 3x + y - 2$

6-53 *a)* $x' = 4x - 2y$, $y' = 2x - 4y$ *b)* $x' = 4x - 2y + t^2 - 3$, $y' = 2x - 4y - 5t$

6-54 *a)* $x' = 5x - y$, $y' = x + 2y$ *b)* $x' = 5x - y + te^{2t}$, $y' = x + 2y - 1$

6-55 *a)* $x' = x - 5y$, $y' = x + y$ *b)* $x' = x - 5y + 3$, $y' = x + y - 3$

6-56 *a)* $x' = -5x + 6y$, $y' = 2x + 7y$ *b)* $x' = -5x + 6y + 1$, $y' = 2x + 7y + t^2$

6-57 *a)* $x' = 4y$, $y' = x$ *b)* $x' = 4y + 1$, $y' = x - 3 + e^t$

6-58 *a)* $x' = x - 3y$, $y' = -z + 2y$, $z' = x - y$ *b)* $x' = x - 3y$, $y' = -z + 2y - 2e^t$, $z' = x - y - 1$

6-59 *a)* $x' = -3x + y - 2z$, $y' = x - z + 2y$, $z' = y + 3z$
b) $x' = -3x + y - 2z + t^2$, $y' = x - z + 2y - 3t$, $z' = y + 3z + 2$

Use el método de eliminación para determinar la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden:

6-60 *a*) $x' = -\frac{3}{t}x + \frac{8}{t^2}y - 5$ $\quad$ *b*) $x' = \frac{2}{t^2}y + \frac{1}{t}$

$y' = x + \ln t$ $\quad$ $y' = x + t^2$

6-61 *a*) $x' = \frac{6}{t^2}y$ $\quad$ *b*) $x' = -\frac{2}{t^2}x + 4$

$y' = -3x + 5$ $\quad$ $y' = x + 1$

6-62 *a*) $x' = \frac{4}{t}x + \frac{3}{t^3}y$ $\quad$ *b*) $x' = -\frac{2}{t}x - \frac{1}{t^3}y + \frac{4}{t^2}z$

$y' = 2z$ $\quad$ $y' = 2z + 1$

$z' = 3x + \frac{\ln t}{t}$ $\quad$ $z' = 3x - t + 1$

Use el método de eliminación para determinar la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden con las condiciones iniciales específicas:

6-63 $x' = 2x - y + t,\ x(0) = 1$
$y' = -x + 4y, y(0) = 1$

6-64 $x' = 2x - y - t, x(0) = 1$
$y' = -x + 4y, y(0) = 1$

6-65 $x' = x - 4y + 1, x(0) = 2$
$y' = 5x - 2y, y(0) = -3$

6-66 $x' = 2x + 4y + t, x(1) = 0$
$y' = x - 3y - 1, y(0) = 2$

6-67 $x' = x + y, x(2) = 0$
$y' = -2x - 2y, y(2) = 0$

6-68 Considere el sistema de las dos ecuaciones de primer orden que describen los dos tanques conectados del ejemplo 6-7. Suponga que las resistencias son desiguales: $R_1 = R$ y $R_2 = 2R$, y que las áreas son iguales: $A_1 = A_2 = A$. Obtenga la única ecuación de segundo orden en términos de la altura $h_1(t)$. Si se cierra el flujo de entrada, estime cuánto tardarán los tanques en vaciarse. ¿Oscilarán las alturas?

6-69 Considere el sistema de dos ecuaciones de primer orden que describe los dos tanques conectados del ejemplo 6-7. Obtenga la sola ecuación de segundo orden en términos de la altura $h_2(t)$. Explique la solución de esta ecuación si el caudal de entrada q_{mi} es discontinuo. Este sería el caso en la situación en la que el flujo se cierra repentinamente.

6-4 Método de valores característicos

6-70C En el método de valores característicos, ¿cómo se determinan los valores característicos de un sistema dado? ¿Cómo se determina la solución particular correspondiente a los términos no homogéneos en este método?

6-71C En el método de valores característicos, ¿como se determina la solución particular correspondiente a un término no homogéneo cuando el término no homogéneo aparece en la solución de la ecuación homogénea asociada?

Use el método de valores característicos para determinar la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden:

6-72 *a*) $x' = 2x - y$, $y' = -x + 4y$ $\quad$ *b*) $x' = 2x - y - t + 1$, $y' = -x + 4y + te^t$

6-73 *a*) $x' = x - y$, $y' = -3x - y$ $\quad$ *b*) $x' = x - y + t^2 - 1$, $y' = -3x - y + 3t$

6-74 *a*) $x' = 2x + 4y$, $y' = -x + 2y$ $\quad$ *b*) $x' = 2x + 4y - 5t^2e^{3t}$, $y' = -x + 2y$

6-75 *a*) $x' = 7x + y$, $y' = -x - 3y$ $\quad$ *b*) $x' = 7x + y - 1$, $y' = -x - 3y + 1$

6-76 *a*) $x' = 2x + y$, $y' = x - 2y$ $\quad$ *b*) $x' = 2x + y + 1$, $y' = x - 2y + 3t^2$

6-77 *a*) $x' = -x + 2y$, $y' = 3x + y$ $\quad$ *b*) $x' = -x + 2y + 3\,\text{sen}\,2t$, $y' = 3x + y - 2$

6-78 *a*) $x' = 4x - 2y$, $y' = 2x - 4y$ $\quad$ *b*) $x' = 4x - 2y + t^2 - 3$, $y' = 2x - 4y - 5t$

6-79 *a*) $x' = 6x - y$, $y' = x + 2y$ $\quad$ *b*) $x' = 6x - y + te^{2t}$, $y' = x + 2y - 1$

6-80 *a*) $x' = x - 5y$, $y' = x + y$ $\quad$ *b*) $x' = x - 5y + 3$, $y' = x + y - 3$

6-81 *a*) $x' = -5x + 6y$, $y' = 2x + 7y$ $\quad$ *b*) $x' = -5x + 6y + 1$, $y' = 2x + 7y + t^2$

6-82 *a*) $x' = 4y$, $y' = x$ $\quad$ *b*) $x' = 4y + 1$, $y' = x - 3 + e^t$

Use el método de valores característicos para determinar la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden con las condiciones iniciales específicas:

6-83 $x' = 2x - y + t,\ x(0) = 1$
$y' = -x + 4y, y(0) = 1$

6-84 $x' = 2x - 4y + 1, x(0) = 2$
$y' = 5x - 2y, y(0) = -3$

6-85 $x' = 2x + 4y + t, x(1) = 0$
$y' = x - y - 1, y(0) = 2$

6-86 $x' = 3x + y - 1, x(0) = 0$
$y' = -4x - y + 3e^{2t}, y(0) = 1$

6-87 Para el modelo de motor CΔ desarrollado en el ejemplo 6-10, obtenga la sola ecuación diferencial de segundo orden para *a*) la velocidad ω y *b*) la corriente I_a.

6-88 Para el modelo de motor CΔ desarrollado en el ejemplo 6-10, use los siguientes valores de parámetros y resuelva el sistema simultáneamente para determinar tanto la velocidad $\omega(t)$ como la corriente $I_a(t)$. Suponga que las condiciones iniciales son cero.

$K_T = K_b = 0.05\ \text{N}\cdot\text{m/A}\quad R = 0.5\Omega\quad L = 2\times10^{-3}\,\text{H}$

$I = 9\times10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\quad V_a = 10\,V\quad T_L = 0$

6-89 Para el sistema de dos masas que se muestra en la figura 6-21, suponga que hay una fuerza externa $F_1(t)$ que se aplica a la masa 1 y $F_2(t)$ que se aplica a la masa 2. ¿Cómo afectan estas fuerzas las frecuencias de modos y las razones de modos?

6-90 Para el sistema de dos masas que se muestra en la figura 6-21, encuentre las frecuencias de modos y las razones de modos para el caso en que $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_3 = k$ y $k_2 = 4k$.

6-91 Para el sistema de dos masas que se muestra en la figura 6-21, encuentre las frecuencias de modos y las razones de modos para el caso en que $m_1 = m$, $m_2 = 3m$ y $k_1 = k_2 = k_3 = k$.

6-92 Las ecuaciones de movimiento del modelo de edificio de dos pisos que se muestra en la figura P6-92 se obtuvieron en el capítulo 4. Estas ecuaciones son

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_2(x_1 - x_2) + k_1(y - x_1)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2)$$

Es posible analizar los datos sobre el movimiento del suelo durante un terremoto para determinar si el movimiento contiene frecuencias cercanas a las frecuencias de modos del edificio. De ser así, el edificio puede experimentar grandes movimientos durante un temblor; de modo que es importante calcular las frecuencias de modos cuando el edificio se diseña. Las relaciones de modos también son importantes porque indican la cantidad de movimiento relativo de los pisos y, por tanto, la cantidad de esfuerzo sobre las columnas de apoyo.

Obtenga las frecuencias de modos y las razones de modos para el caso en que $m_1 = m_2 = m$ y $k_1 = k_2 = k$.

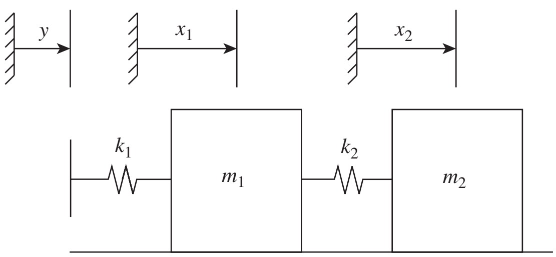


FIGURA P6-92

6-5 Métodos de computadora

6-93 Use una computadora para obtener la solución simbólica del siguiente conjunto de ecuaciones, que son las ecuaciones para el mezclado de salmuera que se obtuvieron en el ejemplo 6-1, para condiciones arbitrarias.

$$\frac{dx_1}{dt} = 1.5 - 50\frac{x_1}{1\,000} + 35\frac{x_2}{1\,000} \quad \textbf{(6-18}\textbf{\textit{a}}\textbf{)}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -50\frac{x_1}{1\,000} - 55\frac{x_2}{1\,000} \quad \textbf{(6-18}\textbf{\textit{b}}\textbf{)}$$

Use una computadora para obtener la solución simbólica de los siguientes problemas:

6-94 *a*) $x' = 3x - y$, $y' = x + y$ *b*) $x' = 3x - y + t$, $y' = x + y - 2$

6-95 *a*) $x' = x - y$, $y' = -x + 4y$ *b*) $x' = x - y - t + 1$, $y' = -x + 4y + te^t$

6-96 *a*) $x' = x - y$, $y' = -3x - 2y$ *b*) $x' = x - y + t^2 - 1$, $y' = -3x - 2y + 3t$

Use una computadora para obtener la solución simbólica de los siguientes problemas para las condiciones iniciales específicas:

6-97 $x' = x - 6y + 1,\ x(0) = 1$
$y' = 4x + 2y + t,\ y(0) = 0$

6-98 $x' = 2x - y + t,\ x(0) = 1$
$y' = -x + 4y,\ y(0) = 1$

6-99 $x' = x - 4y + 1,\ x(0) = 2$
$y' = 5x - 2y,\ y(0) = -3$

6-100 $x' = 3x + y - 1,\ x(0) = 0$
$y' = -4x - y + 3e^{2t},\ y(0) = 1$

Problemas de repaso

Para los siguientes problemas, use el método que usted elija para obtener la solución analítica para condiciones iniciales arbitrarias:

6-101 $x' = 5x - 3y$
$y' = 2y - z$
$z' = x - y$

6-102 $x' = 5x - 3y$
$y' = 2y - z - 2e^t$
$z' = x - y - 1$

6-103 $x' = -3x + y - 2z$
$y' = x + 2y + 9z$
$z' = -3y + 3z$

6-104 $x' = -3x + y - 2z + t$
$y' = x + 2y + 9z - 3t$
$z' = -3y + 3z + 2$

CAPÍTULO

7

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES: MÉTODO DE MATRICES

Después de repasar las propiedades básicas de las matrices y algunos temas importantes del álgebra lineal, introducimos el *método de matrices* (o *método de vectores característicos*), que es el procedimiento más general y sistemático para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Otros dos métodos de resolución (el *método de la transformada de Laplace* y los *métodos numéricos*) se explican en los siguientes capítulos.

Luego mostramos cómo es posible expresar modelos de sistemas físicos en formas matriciales estándar y presentamos la teoría básica del método de matrices aplicado a ecuaciones lineales homogéneas y, a continuación, a ecuaciones lineales no homogéneas; después explicamos formas especiales de matrices, llamadas formas canónicas y la matriz de transición. Esto es útil para entender la dinámica de los procesos. Finalmente, ilustramos los potentes programas de cómputo disponibles para implementar los métodos que se explican en este capítulo.

OBJETIVOS

Al terminar este capítulo usted deberá ser capaz de:

1. Realizar operaciones matriciales básicas.
2. Transformar una ecuación diferencial de orden *n* en un conjunto de ecuaciones de primer orden *n*.
3. Expresar un conjunto de ecuaciones lineales de primer orden *n* con coeficientes constantes en forma matricial.
4. Resolver un conjunto de ecuaciones de primer orden *n* con coeficientes constantes en forma matricial usando el método de vectores característicos.
5. Expresar un conjunto de ecuaciones lineales de primer orden *n* con coeficientes constantes en la forma canónica de Jordan, dados los valores característicos y los vectores característicos del sistema.
6. Usar un software para obtener valores característicos y vectores característicos, y la solución numérica de un conjunto de ecuaciones de primer orden *n* con coeficientes constantes.

7-1 ▪ REPASO DE MATRICES*

Tanto el método de eliminación como el de valores característicos que se explicó en el capítulo 6 bastan para resolver pequeños sistemas lineales con dos o tres ecuaciones diferenciales; pero tales métodos resultan torpes e imprácticos para sistemas más grandes. Los sistemas grandes de ecuaciones diferenciales se estudian mejor y se describen de manera más conveniente mediante la notación matricial. Usted recordará, del álgebra, que este también es el caso para sistemas de ecuaciones algebraicas (figura 7-1). Por tanto, en esta sección repasaremos brevemente las matrices y explicaremos sus propiedades hasta el grado necesario para nuestro estudio de sistemas lineales de manera sistemática.

Sistema de ecuaciones algebraicas:

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 5$$
$$5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -5$$
$$x_1 + 7x_2 - x_3 = 12$$

Sistema en forma de matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 5 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

o **Ax = b**

FIGURA 7-1
Los sistemas grandes de ecuaciones algebraicas se representan mejor en forma de matrices.

La representación en matrices no solo permite desarrollar teoremas generales válidos para cualquier número de ecuaciones, sino además, la notación matricial se usa para comunicarse con los potentes programas de computadora que pueden resolver ecuaciones de cualquier orden. Introduciremos estos métodos en este capítulo.

Una **matriz** de $m \times n$ (se lee "matriz de m por n") se define como un arreglo rectangular de números o elementos dispuestos en m renglones y n columnas, como (figura 7-2):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{7-1}$$

Primer renglón

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -6 & 9 \\ 1 & 7 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

Tercera columna

FIGURA 7-2
Matriz de 3 × 4.

Las matrices se representan con letras mayúsculas en negrita, como **A**. Los elementos de una matriz pueden ser constantes reales (escalares), números complejos o incluso funciones. El elemento de una matriz **A** de $m \times n$ en el renglón i y en la columna j se representa como a_{ij}, donde $i = 1, 2, ..., m$ y $j = 1, 2, ..., n$. Observe que el primer subíndice indica el número de renglón y el segundo indica el número de columna del elemento. Por ejemplo, a_{32} representa el elemento de la matriz en el tercer renglón y la segunda columna. A veces conviene representar la matriz **A** como $\mathbf{A} = (a_{ij})$ al manipular sus elementos.

En este capítulo trataremos principalmente de las siguientes clases especiales de matrices:

1. **Matriz cuadrada.** Una matriz que tiene el mismo número de renglones que de columnas se llama **matriz cuadrada**. Una matriz cuadrada que tiene n renglones y n columnas se llama *matriz cuadrada de orden n*, o bien, matriz de $n \times n$. La línea imaginaria que pasa por los elementos $a_{11}, a_{22},... a_{nn}$ se llama **diagonal principal** de una matriz cuadrada (figura 7-3).

Diagonal principal

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 5 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

FIGURA 7-3
Matriz cuadrada de 3 × 3 y su diagonal principal.

2. **Vector.** Una matriz que consiste en una sola columna se llama **vector de columna**, o simplemente **vector**. Entonces, el número de elementos de un vector es igual a su número de renglones. Los vectores ordinariamente se representan con minúsculas negritas tales como **b**. Un vector de orden n puede visualizarse como una matriz de $n \times 1$, que tiene n renglones y una sola columna y puede expresarse como

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{7-2}$$

* Esta sección tiene el propósito de refrescar la memoria del lector. Si se desea, puede omitirse.

Del mismo modo, una matriz que consiste en un solo renglón se llama **vector renglón**. Un vector renglón puede visualizarse como una matriz de $1 \times n$.

Una matriz de $m \times n$ puede visualizarse como n vectores de columna de orden m (o como m vectores renglón de orden n) colocados juntos. Observe que un vector es un caso especial de una matriz (figura 7-4).

Tres vectores de 3×1:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de 3×3 que forman:

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 5 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

FIGURA 7-4
Una matriz de 3×3 puede visualizarse como tres vectores de tercer orden colocados uno al lado del otro.

3. **Matriz cero.** Una matriz se llama **matriz cero** si cada uno de sus elementos es cero. Se representa por un **0** (en negrita), y se expresa como

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{7-3}$$

4. **Matriz simétrica.** Una matriz que tiene simetría con respecto a su diagonal principal se llama **matriz simétrica**. Por tanto, $a_{ij} = a_{ji}$ para matrices simétricas. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 5 & 3 & 4 \\ -9 & 4 & 2 \end{pmatrix} \tag{7-4}$$

es una matriz simétrica de 3×3.

5. **Matriz triangular superior e inferior.** Una matriz que tiene todos sus elementos cero debajo de su diagonal principal se llama **matriz triangular superior**. Del mismo modo, una matriz que tiene todos sus elementos cero arriba de su diagonal principal se llama **matriz triangular inferior**. Por ejemplo,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \tag{7-5}$$

son matrices triangulares superior e inferior, respectivamente.

6. **Matriz diagonal.** Una matriz cuadrada con todos sus elementos cero debajo y arriba de la diagonal principal se llama **matriz diagonal**. Por tanto, $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$ para matrices diagonales. Por ejemplo,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

es una matriz diagonal de 3×3. A veces conviene representar una matriz diagonal listando solo sus elementos diagonales como $\mathbf{D} = \text{diag}\,(2, -7, -4)$. Observe que la matriz diagonal es un caso especial de una matriz simétrica.

7. **Matriz identidad.** Una matriz diagonal con 1 (unos) en la diagonal principal se llama **matriz identidad**, y se representa como **I**. En otras palabras, una matriz identidad de orden n es una matriz cuadrada de $n \times n$ cuyos elementos son 1 en la diagonal principal y cero en cualquier otro sitio. Por ejemplo.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz identidad de 3×3. La matriz identidad es la matriz equivalente al número 1, ya que el producto de una matriz por la matriz identidad es la misma matriz.

Propiedades de las matrices

La notación matricial nos permite representar un gran número de datos mediante un solo símbolo; así, resulta muy cómodo representar grandes sistemas algebraicos o ecuaciones diferenciales en forma bastante compacta. Un sistema grande de ecuaciones puede manipularse fácilmente en forma sistemática cuando se expresa en forma de matrices. Existen reglas definidas para la manipulación de matrices, y a continuación expresamos las fundamentales.

Igualdad. Se dice que dos matrices son del mismo **tamaño** si tienen el mismo número de renglones y el mismo número de columnas. Por ejemplo, cualquier par de matrices de 3×5 son del mismo tamaño. Se dice que dos matrices **A** y **B** del mismo tamaño son iguales entre sí si

$$a_{ij} = b_{ij} \tag{7-6}$$

para cada i y j (figura 7-5). Esto se expresa como $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

entonces $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ solo si $a_{11} = 3$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = -1$ y $a_{22} = 6$. Por tanto, por ejemplo, una ecuación matricial que tenga dos matrices de 5×6 es equivalente a 30 ecuaciones escalares. Observe que no podemos hablar acerca de la igualdad de dos matrices si no son del mismo tamaño (es decir, si tienen diferentes números de renglones o de columnas). Por ejemplo, las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

no son iguales, ya que tienen el mismo número de renglones pero diferente número de columnas (incluso cuando los elementos en que difieren sean cero).

Matriz de 2×3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Otra matriz de 2×3:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 5 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

FIGURA 7-5
Dos matrices del mismo tamaño pero desiguales.

Suma. Dos matrices de $m \times n$ se suman al añadir sus elementos respectivos como

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \tag{7-7}$$

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-3) & 4 + 8 \\ -1 + 2 & 6 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Observe que dos matrices deben ser del mismo tamaño para sumarse y que la suma de dos matrices de $m \times n$ también es una matriz de $m \times n$.

Es posible verificar que la suma de matrices es conmutativa y asociativa. Es decir,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{7-8a}$$

y

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \tag{7-8b}$$

Asimismo, la suma de cualquier matriz **A** con la matriz cero del mismo tamaño es equivalente a la misma matriz. Es decir, $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$.

Multiplicación por un escalar. Una matriz **A** se multiplica por un escalar k multiplicando *cada uno* de sus elementos por dicho escalar (figura 7-6), como

$$k\mathbf{A} = k(a_{ij}) = (ka_{ij}) \tag{7-9}$$

Por ejemplo,

$$3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2 & 3\times(-1) \\ 3\times 4 & 3\times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 21 \end{pmatrix}$$

Observe que el tamaño de la matriz no cambia como resultado de la multiplicación por un escalar. Es posible verificar que este proceso es conmutativo y distributivo. Es decir,

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k \tag{7-10a}$$

y

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} \tag{7-10b}$$

$$(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{B} \tag{7-10c}$$

Asimismo, el producto de cualquier matriz **A** de $m \times n$ por cero es una matriz cero de $m \times n$. Es decir, $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 14 & -6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

FIGURA 7-6
Un factor escalar que es común a todos los elementos de una matriz puede obtenerse como un factor escalar de dicha matriz.

Resta. La diferencia $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ de dos matrices **A** y **B** de $m \times n$ se define como la suma de la matriz **A** con el negativo de la matriz **B**. Es decir,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \tag{7-11}$$

o $(a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 2-6 \\ -3-0 & 6-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices. El producto de una matriz **A** de $m \times n$ y una matriz **B** de $n \times r$ es una matriz **C** de $m \times r$, cuyos elementos se determinan por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{1n} \tag{7-12}$$

para cualquier i y j. Es decir, los elementos de la matriz **C** en el renglón i y la columna j se determinan multiplicando cada elemento de **A** en el renglón i por el correspondiente elemento de **B** en la columna j y sumando los resultados de estos productos, como se ilustra en la figura 7-7. Entonces, la multiplicación de las dos matrices **A** y **B** es un proceso bastante prolongado, ya que para determinar cada elemento de la matriz resultante **C** se necesitan n productos y $n - 1$ sumas.

Por ejemplo, considere una matriz **A** de 3×3 y una matriz (un vector columna) **x** dadas como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

El producto **Ax** de estas dos matrices es

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 \end{pmatrix}$$

Dos matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Su producto:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3 + 5\times 2 & 2\times 4 + 5\times 5 \\ 1\times 3 + 0\times 2 & 1\times 4 + 0\times 5 \\ -3\times 3 + 4\times 2 & -3\times 4 + 4\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 33 \\ 3 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

FIGURA 7-7
Multiplicación de una matriz de 3×2 por una matriz de 2×2.

que es una matriz de 3×1, como se esperaba. Este ejemplo muestra que la definición de la multiplicación de matrices está motivada por el deseo de representar el lado izquierdo de un sistema de ecuaciones como el producto de una matriz cuyos elementos son los coeficientes de las incógnitas y un vector cuyos elementos son las incógnitas. Para **A** y **x** antes dadas, la sencilla ecuación matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ es equivalente al sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, los sistemas de ecuaciones algebraicas se pueden expresar y estudiar de manera conveniente usando notación matricial y la multiplicación de matrices, como se definió antes.

Es posible comprobar que la multiplicación de matrices es asociativa y distributiva, pero no es siempre conmutativa; es decir,

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \tag{7-13a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \tag{7-13b}$$

pero

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \tag{7-13c}$$

He aquí una manera simple de verificar la validez de la multiplicación de matrices. Suponga que **A** es $n \times m$ y **B** es $p \times q$. Entonces el producto **AB** es $(n \times m)(p \times q) = n \times q$ solo si $m = p$. De modo que el número de columnas de **A** y el número de renglones de **B** (aquí m y p) deben ser iguales. El tamaño del resultado está dado por el producto del número de renglones de **A** y el número de columnas de **B**, en este caso $n \times q$.

Por otra parte, el producto **BA** es $(p \times q)(n \times m) = p \times m$ solo si $q = n$. De modo que ambas magnitudes internas (en este caso q y n) deben ser iguales. El tamaño de la matriz resultante está dado por el producto de las dos magnitudes externas, en este caso $p \times m$. El resultado de este análisis muestra que los productos **AB** y **BA** existen si y solo si **A** es $n \times m$ y **B** es $m \times n$. El producto **AB** es cuadrado y es $n \times n$; el producto **BA** también lo es, pero de un tamaño diferente, $m \times m$.

EJEMPLO 7-1 Multiplicación de matrices

Determine los productos **AB** y **BA** para las dos matrices de 3×3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución Tanto **A** como **B** son matrices de 3×3. Entonces, sus productos **AB** y **BA** también serán matrices de 3×3. Por la definición de multiplicación de matrices, tenemos

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2+0-18 & -1+0-9 & 4+0+0 \\ 4+0+6 & -2+6+3 & 8-30+0 \\ 0+0+12 & 0-4+6 & 0+20+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -10 & 4 \\ 10 & 7 & -22 \\ 12 & 2 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2-2+0 & 0+6+16 & -6-1+8 \\ 0-2+0 & 0+6+20 & 0-1+10 \\ 6+6+0 & 0-18+0 & -18+3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 22 & 1 \\ -2 & 26 & 9 \\ 12 & -18 & -15 \end{pmatrix}$$

Observe que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Es fácil verificar que si **A** es una matriz cuadrada de orden n y si **I** es una matriz de identidad, entonces (figura 7-8)

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \tag{7-14}$$

En las manipulaciones con matrices, siempre se supone que la matriz **I** es del mismo orden que la matriz **A**.

Transpuesta. La transpuesta de una matriz **A** de $m \times n$ es la matriz $n \times m$ representada por el símbolo especial $\mathbf{A}^T$, donde la matriz transpuesta se obtiene de **A** intercambiando sus renglones y sus columnas. Por tanto, si $\mathbf{A} = (a_{ij})$, entonces

$$\mathbf{A}^T = (a_{ji}) \tag{7-15}$$

Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Observe que los elementos en la diagonal principal de la matriz (1, 5 y 9 en este caso) permanecen sin cambio durante el proceso de transposición. La transpuesta de una matriz cuadrada puede obtenerse imaginando que hay un espejo de dos lados en la diagonal principal, y moviendo los elementos a la ubicación de sus imágenes.

El concepto de *matriz transpuesta* también nos permite representar convenientemente vectores columna como vectores renglón para ahorrar espacio. Por ejemplo, el vector

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

es equivalente a $\mathbf{b} = (1 \quad 2 \quad 3)^T$. Es decir, un vector columna de $n \times 1$ puede representarse como la transpuesta de un vector renglón de $1 \times n$.

Producto escalar de vectores. El **producto escalar** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (llamado también producto de punto o producto interno) de un vector renglón **a** y un vector columna **b** que tienen el mismo número de elementos es un número escalar cuyo valor se determina por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 \quad a_2 \ldots a_n)(b_1 \quad b_2 \ldots b_n)^T = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{7-16}$$

Por ejemplo, si $\mathbf{a} = (1 \quad -2 \quad 5)$ y $\mathbf{b}^T = (2 \quad 0 \quad 6)$, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1 \quad -2 \quad 5)(2 \quad 0 \quad 6)^T = 2 + 0 + 30 = 32$$

Matriz 2×2:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Matriz de identidad:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Su producto:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{I} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \times 1 + b \times 0 & a \times 0 + b \times 1 \\ c \times 1 + d \times 0 & c \times 0 + d \times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{A}$$

FIGURA 7-8
Demostración de que el producto de una matriz cuadrada y de una matriz de identidad es igual a la matriz misma.

que es una cantidad escalar. Observe que el producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es equivalente al producto escalar de dos vectores **a** y **b** en un dominio de dimensión n.

Determinantes. El determinante de una matriz cuadrada **A** de $n \times n$ es un determinante $n \times n$ que se simboliza como $|\mathbf{A}|$ o det **A**, cuyos elementos son idénticos a los elementos correspondientes de la matriz **A**. A diferencia de las matrices, los determinantes pueden representarse por un número cuyo valor se obtiene mediante la reducción del orden del determinante expandiéndolo a lo largo de sus renglones y columnas. El determinante de una matriz **A** de 2×2 es

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{7-17}$$

Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

entonces $\qquad \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 6 \times (-1) = 16$

Por tanto, el valor del determinante de la matriz **A** dada es 16.

El determinante de una matriz de 3×3 puede evaluarse expandiendo su determinante a lo largo del primer renglón:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned} \tag{7-18}$$

Los determinantes de orden superior pueden evaluarse extendiendo este procedimiento. Observe que la expansión de un determinante de orden n da n determinantes de orden $n - 1$. El proceso de expansión puede realizarse a lo largo de cualquiera de los renglones o columnas del determinante. Por ejemplo, si M_{ij} representa el determinante de $(n - 1) \times (n - 1)$ obtenido al suprimir su renglón i y su columna j, la expansión del determinante a lo largo del renglón i puede expresarse como

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \tag{7-19}$$

Este proceso puede extenderse hasta que todas las M_{ij} se conviertan en determinantes de segundo orden, cuyos valores pueden calcularse con la ecuación 7-18.

Un método corto para evaluar el determinante de una matriz de 3×3 es escribir las primeras dos columnas de la matriz a su derecha y trazar tres líneas continuas y tres líneas punteadas en direcciones diagonales de modo que cada línea pase por tres elementos, como se muestra en la figura 7-9. Luego det **A** se determina sumando los productos de los elementos en las líneas continuas y restando los de las líneas punteadas, lo cual da directamente la ecuación 7-19.

El determinante de una matriz puede evaluarse con mínimo esfuerzo realizando el proceso de expansión a lo largo de un renglón o una columna que contenga el

Matriz 3 × 3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Extendiéndola a la derecha mediante la adición de las dos primeras columnas:

$$\begin{array}{ccccc} (+) & (+) & (+) & (-) & (-) & (-) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Su determinante:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = {} & a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} \\ & + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22}\, a_{13} \\ & - a_{32}\, a_{23}\, a_{11} - a_{33}\, a_{21}\, a_{12} \end{aligned}$$

FIGURA 7-9
Método corto para evaluar el determinante de una matriz de 3×3.

mayor número de elementos cero. Por ejemplo, la manera más rápida de evaluar el siguiente determinante

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

es expandirlo a lo largo del segundo renglón para obtener

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= -0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -0 + 0 - 3(1 \times 5 - 2 \times 7) = 27 \end{aligned}$$

Observe que $\det \mathbf{A} = 0$ si la matriz **A** tiene un renglón o una columna con todos sus elementos cero.

La inversa de una matriz. La matriz cuadrada de $n \times n$ que, cuando se multiplica por una matriz cuadrada **A** de $n \times n$, resulta en la matriz de identidad **I** se llama **inversa** de **A**, y se representa como $\mathbf{A}^{-1}$. Es posible demostrar que este proceso de multiplicación es excepcionalmente conmutativo y puede expresarse como

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{7-20}$$

La inversa de una matriz es análoga al valor recíproco de un número, por lo que la inversa de una matriz **A** puede existir o no. Si $\mathbf{A}^{-1}$ existe, entonces se dice que la matriz **A** es **no singular**. En caso contrario, se dice que es **singular**. Es posible comprobar que la inversa de $\mathbf{A}^{-1}$ existe si y solo si el determinante de **A** no es cero. Por tanto, la matriz **A** es no singular si $\det \mathbf{A} \neq 0$ y en caso contrario es singular (figura 7-10). En la sección 7-3 se describe un procedimiento práctico para determinar la inversa de una matriz.

a) Matriz singular:

(A^{-1} no existe)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

b) Matriz no singular:

($\mathbf{A}^{-1}$ existe)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 14 = 16 \neq 0$$

FIGURA 7-10
Una matriz es singular si su determinante es cero; en caso contrario, es no singular.

Funciones matriciales. Una matriz cuyos elementos son funciones de una variable (por ejemplo t) se llama **función matricial**. Esto contrasta con las matrices constantes, cuyos elementos (todos) son constantes. Como caso especial, una función matricial que consista en una sola columna se llama **función vectorial**. Por ejemplo, una función matricial general de 3×3 puede expresarse como

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix} \tag{7-21}$$

Se dice que una función matricial $\mathbf{A}(t)$ es continua en un punto $t = t_0$ si cada elemento de ella es continuo en ese punto. Del mismo modo, se dice que una función matricial $\mathbf{A}(t)$ es continua en un intervalo $t_1 < t < t_2$ si cada uno de sus elementos es continuo en ese intervalo. Por ejemplo, la función matricial

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} t^2 & \operatorname{sen} t \\ e^{-3t} & 5 \end{pmatrix}$$

es continua en todo el eje t, ya que cada uno de sus cuatro elementos es continuo para toda t.

Derivadas de funciones matriciales. La derivada $\mathbf{A}'(t)$ de una función matricial diferenciable $\mathbf{A}(t)$ se define como la matriz cuyos elementos son las derivadas de los elementos correspondientes de $\mathbf{A}(t)$, y puede expresarse como

$$\mathbf{A}'(t) = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \left(\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right) = (a'_{ij}(t)) \tag{7-22}$$

Por tanto, la derivada de la función matricial de 3×3 en la ecuación 7-21 es

$$\mathbf{A}'(t) = \begin{pmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{pmatrix} \tag{7-23}$$

Por ejemplo, si

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} t^2 & \operatorname{sen} t \\ e^{-3t} & 5 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{A}'(t) = \begin{pmatrix} 2t & \cos t \\ -3e^{-3t} & 0 \end{pmatrix}$$

La mayoría de las reglas para las derivadas de funciones de valores reales en el cálculo elemental pueden extenderse a las funciones matriciales (figura 7-11). Si c es un número real constante y $\mathbf{C}$ es una matriz constante, tenemos

$$\frac{d}{dt}(c\mathbf{A}) = c\frac{d\mathbf{A}}{dt} \tag{7-24a}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{CA}) = \mathbf{C}\frac{d\mathbf{A}}{dt} \tag{7-24b}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AC}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{C} \tag{7-24c}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{7-24d}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B} \tag{7-24e}$$

$(k\mathbf{f})' = k\mathbf{f}'$

$(\mathbf{fg})' = \mathbf{f}'\mathbf{g} + \mathbf{f}\mathbf{g}'$

$(\mathbf{f}+\mathbf{g})' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}'$

(donde k es una constante y tanto $\mathbf{f}$ como $\mathbf{g}$ son funciones vectoriales de t)

FIGURA 7-11
Las reglas para las derivadas de funciones reales también son aplicables a funciones matriciales.

Al obtener la derivada de un producto de dos matrices debe tomarse en cuenta que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Por ejemplo, $(\mathbf{AB})' = \mathbf{AB}' + \mathbf{A}'\mathbf{B}$, no $\mathbf{B}'\mathbf{A} + \mathbf{BA}'$.

Integrales de funciones matriciales. La integral $\int \mathbf{A}(t)dt$ de una función matricial $\mathbf{A}(t)$ se define como la matriz cuyos elementos son las integrales de los elementos correspondientes de $\mathbf{A}(t)$ y puede expresarse como (figura 7-12)

$$\int \mathbf{A}(t)dt = \left(\int a_{ij}(t)dt\right) \tag{7-25}$$

Por tanto, la integral de la función matricial de 3×3 en la ecuación 7-22 es

$$\int \mathbf{A}(t)dt = \begin{pmatrix} \int a_{11}(t)dt & \int a_{12}(t)dt & \int a_{13}(t)dt \\ \int a_{21}(t)dt & \int a_{22}(t)dt & \int a_{23}(t)dt \\ \int a_{31}(t)dt & \int a_{32}(t)dt & \int a_{33}(t)dt \end{pmatrix} \tag{7-26}$$

Dada la matriz:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 2t & \cos t \\ -3e^{-3t} & 0 \end{pmatrix}$$

Su integral es:

$$\int \mathbf{A}(t)dt = \begin{pmatrix} \int 2t\,dt & \int \cos t\,dt \\ \int -3e^{-3t}dt & \int 0\,dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + c_1 & \operatorname{sen} t + c_2 \\ e^{-3t} + c_3 & 0 + c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & \operatorname{sen} t \\ e^{-3t} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

FIGURA 7-12
La integral de una matriz se obtiene integrando cada uno de sus elementos.

Por ejemplo, si

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} t^2 & \operatorname{sen} t \\ e^{-3t} & 5 \end{pmatrix}$$

entonces $$\int_0^t \mathbf{A}(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int_0^t t^2 dt & \int_0^t \operatorname{sen} t\,dt \\ \int_0^t e^{-3t} dt & \int_0^t 5dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 & 1 - \cos t \\ -\frac{1}{3}(e^{-3t} - 1) & 5t \end{pmatrix}$$

La mayoría de las reglas para las integrales de funciones de valores reales en el cálculo elemental pueden extenderse a funciones matriciales. Si c es un número real constante y $\mathbf{C}$ es una matriz constante, entonces

$$\int c\mathbf{A}dt = c\int \mathbf{A}dt \tag{7-27a}$$

$$\int \mathbf{CA}dt = \mathbf{C}\int \mathbf{A}dt \tag{7-27b}$$

$$\int (\mathbf{A} + \mathbf{B})dt = \int \mathbf{A}dt + \int \mathbf{B}dt \tag{7-27c}$$

Observe que ni la integración ni la derivación tienen efecto alguno en el tamaño de la función matricial.

Repaso de la sección

Los problemas marcados con una "C" son conceptuales para discusión

7-1C ¿Qué es una matriz cuadrada? ¿Cuándo es simétrica una matriz cuadrada? ¿Es simétrica la matriz de identidad? ¿Qué clase de matriz se llama vector?

7-2C ¿Cuándo dos matrices son del mismo tamaño? ¿Cuándo son iguales?

7-3C ¿Cómo se multiplica una matriz de $n \times n$ por una constante k? ¿Cómo se multiplica un determinante de $n \times n$ por una constante k?

7-4 Compruebe que $(c\mathbf{A})' = c\mathbf{A}'$ y $\int(\mathbf{A} + \mathbf{B})dt = \int\mathbf{A}dt + \int\mathbf{B}dt$.

7-5 Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

verifique que *a*) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, *b*) $4(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 4\mathbf{A} + 4\mathbf{B}$ y *c*) $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

7-2 ▪ MODELOS EN FORMA MATRICIAL

En la sección anterior consideramos el conjunto de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= -5 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 &= 12 \end{aligned}$$

que puede expresarse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 5 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

o en forma compacta **Ax** = **b**. Es posible usar un procedimiento similar para representar un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Por ejemplo, considere el sistema

$$x_1' = -x_1 + x_2 + r_1(t)$$
$$x_2' = x_1 - 2x_2 + x_3 + r_2(t)$$
$$x_3' = x_2 - 2x_3 + r_3(t)$$

Estas ecuaciones pueden representarse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix}$$

o $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}(t)$. Al vector **x** lo llamamos **vector de estado**, cuyos componentes son las **variables de estado**. Esta terminología significa que tales variables describen en forma completa la condición (o el estado) del sistema en cualquier tiempo. Por tanto, la matriz **A** se llama algunas veces **matriz de estado**. En general, nuestras ecuaciones tendrán funciones de fuerza (que también se llaman **entradas**) que aparecen en forma vectorial como $\mathbf{r}(t)$. En consecuencia, las variables de estado se llaman algunas veces **salidas**. A veces es más conveniente expresar el vector de función de fuerza $\mathbf{r}(t)$ como una matriz **B** multiplicada por otra función del tiempo, $\mathbf{f}(t)$. El conjunto de ecuaciones se expresa como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{f}(t)$$

donde la matriz **B** se llama **matriz de entrada**. Los ejemplos de esta sección ilustran el uso de esta forma. Observe que estas formas estándar requieren que los coeficientes de todas las derivadas sean 1.

Los principios básicos de conservación de la masa, la carga y la energía térmica a menudo generan modelos de procesos físicos y dispositivos que son un conjunto de ecuaciones acopladas de primer orden que se pueden expresar en forma matricial; por otro lado, las leyes de movimiento de Newton ordinariamente producen ecuaciones acopladas de segundo orden. En estos casos, debemos definir un conjunto de variables —a menudo el desplazamiento y la velocidad de cada masa— con objeto de escribir las ecuaciones como un conjunto de ecuaciones de primer orden adecuadas para expresarse en forma matricial. Ahora presentamos algunos ejemplos de ingeniería para ilustrar estos conceptos.

EJEMPLO 7-2 Tres tanques de almacenamiento acoplados

La figura 7-13 muestra tres tanques idénticos para almacenar líquido, mientras tienen lugar varios procesos químicos en cada tanque. Entra líquido al sistema a un caudal volumétrico q_i (m^3/s). Los tubos que conectan los tanques oponen resistencia al flujo, de modo que el flujo en los tubos es proporcional a la diferencia de alturas entre sus extremos. La constante de proporcionalidad es $1/R$, donde R se llama resistencia del fluido. El área del fondo de cada tanque es A. Desarrolle un modelo matriz vector de las tres alturas de líquido.

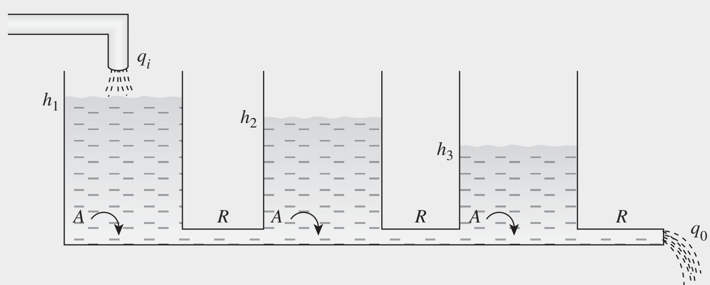


FIGURA 7-13
Tres tanques de almacenamiento.

Solución Al aplicar el criterio de conservación de volumen líquido a cada tanque, obtenemos

$$(Ah_1)' = Ah_1' = q_i - \frac{h_1 - h_2}{R} = q_i - \frac{1}{R}h_1 + \frac{1}{R}h_2$$

$$(Ah_2)' = Ah_2' = \frac{h_1 - h_2}{R} - \frac{h_2 - h_3}{R} = \frac{1}{R}h_1 - \frac{2}{R}h_2 + \frac{1}{R}h_3$$

$$(Ah_3)' = Ah_3' = \frac{h_2 - h_3}{R} - \frac{1}{R}h_3 = \frac{1}{R}h_2 - \frac{2}{R}h_3$$

A partir de estas ecuaciones, podemos determinar rápidamente los elementos de la matriz de esta manera:

$$\begin{pmatrix} h_1' \\ h_2' \\ h_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{RA}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} q_i$$

En forma abreviada, tenemos

$$\mathbf{h}' = \mathbf{A}\mathbf{h} + \mathbf{B}q_i$$

donde $$\mathbf{A} = \frac{1}{RA}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 7-3 Circuito con tres lazos *RC*

La figura 7-14 muestra un circuito que tiene tres lazos RC y un suministro de corriente i_s. Desarrolle un modelo matriz vector del circuito.

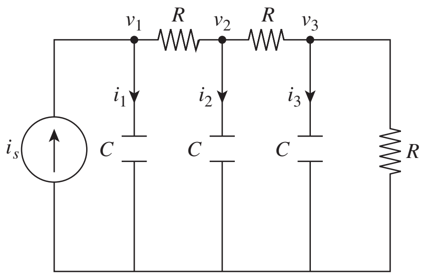


FIGURA 7-14
Circuito con tres lazos RC.

Solución Usando las corrientes i_1, i_2 e i_3 y los voltajes v_1, v_2 y v_3 marcados en el diagrama de circuito, tenemos

$$v_1 = \frac{1}{C}\int i_1 dt = \frac{1}{C}\int\left(i_s - \frac{v_1 - v_2}{R}\right)dt$$

$$v_2 = \frac{1}{C}\int i_2 dt = \frac{1}{C}\int\left(\frac{v_1 - v_2}{R} - \frac{v_2 - v_3}{R}\right)dt$$

$$v_3 = \frac{1}{C}\int i_3 dt = \frac{1}{C}\int\left(\frac{v_2 - v_3}{R} - \frac{v_3}{R}\right)dt$$

Derivando cada ecuación y agrupando los términos, obtenemos

$$v_1' = \frac{1}{C}\left(i_s - \frac{v_1 - v_2}{R}\right) = \frac{1}{C}i_s - \frac{1}{RC}v_1 + \frac{1}{RC}v_2$$

$$v_2' = \frac{1}{C}\left(\frac{v_1 - v_2}{R} - \frac{v_2 - v_3}{R}\right) = \frac{1}{RC}v_1 - \frac{2}{RC}v_2 + \frac{1}{RC}v_3$$

$$v_3' = \frac{1}{C}\left(\frac{v_2 - v_3}{R} - \frac{v_3}{R}\right) = \frac{1}{RC}v_2 - \frac{2}{RC}v_3$$

A partir de estas ecuaciones, podemos determinar directamente los elementos de la matriz:

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{RC}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} i_s$$

En forma abreviada, tenemos

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathrm{i}_s$$

donde $\mathbf{A} = \dfrac{1}{RC}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \dfrac{1}{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sistemas análogos. Observe que las ecuaciones del ejemplo 7-3 son idénticas a las que describen los tres tanques de almacenamiento cubiertos en el ejemplo 7-2, con C en vez de A, i_s en vez de q_i y v_1, v_2 y v_3 en vez de h_1, h_2 y h_3, respectivamente. Las resistencias de los tubos actúan como los resistores, y los tanques almacenan el líquido tal como un capacitor almacena carga. El flujo de líquido es análogo al flujo de carga, que es la corriente. La altura de líquido, que produce presión e impulsa el flujo de líquido, es análoga al voltaje, que impulsa el flujo de corriente. Entonces, se dice que ambos sistemas físicos son *análogos*. El uso de tales analogías a menudo ayuda a los ingenieros a entender diferentes tipos de sistemas. Por ejemplo, un ingeniero que se siente más cómodo analizando circuitos eléctricos puede beneficiarse al examinar sistemas líquidos usando esta analogía. Otra analogía útil se da entre los circuitos eléctricos y la transferencia de calor, en la cual la temperatura es semejante al voltaje, y el caudal térmico es análogo a la corriente. Esta analogía se explora en los problemas del capítulo.

EJEMPLO 7-4 Modelo de sistema resorte-masa-amortiguador en forma matricial

En el capítulo 4 vimos que la ecuación de movimiento para un sistema resorte-masa-amortiguador es

$$mx'' + cx' + kx = f(t)$$

donde $f(t)$ es una fuerza externa que se aplica a la masa. Desarrolle dos representaciones matriz vector de esta ecuación.

Solución Una ecuación siempre puede convertirse en una forma matriz vector estándar $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ haciendo que las variables de estado sean la variable básica (en este caso, x) y obteniendo derivadas sucesivas de dicha variable hasta obtener el número de variables requeridas (igual al orden de la ecuación). Como se trata de una ecuación de segundo orden, necesitamos solo dos variables de estado. De modo que decidimos que sean $x_1 = x$ y $x_2 = x'$. Entonces,

$$x_1' = x' = x_2$$

y $$x_2' = x'' = \frac{1}{m}\left[-kx - c\frac{dx}{dt} + f(t)\right] = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}f(t)$$

Podemos escribir esto en la forma matriz vector siguiente $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}f(t)$ como

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} f(t)$$

donde $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix},$$

y $$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La selección de las variables de estado no es única. Por ejemplo, podríamos escoger $x_1 = x + x'$ y $x_2 = x - x'$. Si $m = c = k = 1$, el sistema en términos de estas nuevas variables sería

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} f(t)$$

Aunque este no es el caso, a veces la selección de las variables de estado se realiza con el propósito de obtener una forma más conveniente de la matriz $\mathbf{A}$.

EJEMPLO 7-5 Modelo del edificio de dos pisos

El modelo del edificio de dos pisos sujeto a los efectos del movimiento del suelo que se desarrolló en el ejemplo 4-7 del capítulo 4 se repite aquí considerando la figura 4-7 como figura 7-15. Las ecuaciones de movimiento son

$$m_1 x_1'' = -k_2(x_1 - x_2) + k_1(y - x_1)$$
$$m_2 x_2'' = k_2(x_1 - x_2)$$

Desarrolle un modelo matriz vector a partir de estas ecuaciones.

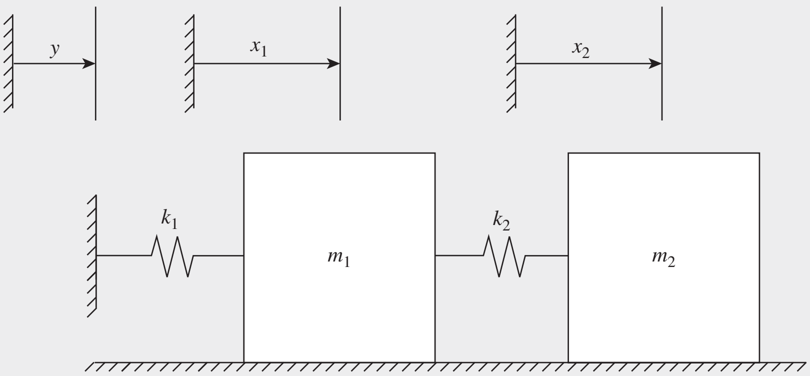


FIGURA 7-15
Modelo de vibración de un edificio de dos pisos.

Solución Para convertir este conjunto de ecuaciones, que es de cuarto orden, en un conjunto de cuatro ecuaciones de primer orden, necesitamos dos variables adicionales. Podemos decidir que estas sean las velocidades x_1' y x_2', de modo que las dos nuevas variables son $x_3 = x_1'$ y $x_4 = x_2'$. Entonces, las cuatro ecuaciones son

$$\begin{aligned} x_1' &= x_3 \\ x_2' &= x_4 \\ m_1x_3' &= -k_2(x_1 - x_2) + k_1(y - x_1) \\ m_2x_4' &= k_2(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones, podemos determinar los elementos de las matrices.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix} y$$

En forma abreviada, tenemos

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}y$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

7-3 ▪ VALORES CARACTERÍSTICOS Y VECTORES CARACTERÍSTICOS

La notación matricial resulta muy conveniente al resolver sistemas de varias ecuaciones algebraicas o diferenciales. Los conceptos importantes del álgebra de matrices se estudian mejor en combinación con los sistemas de ecuaciones algebraicas, porque el lector ya está familiarizado con tales sistemas. Estos conceptos luego pueden extenderse directamente a sistemas de ecuaciones diferenciales, lo cual haremos en las siguientes secciones.

Considere el siguiente sistema de tres ecuaciones algebraicas lineales con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 14 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -7 \end{aligned} \tag{7-28}$$

Este sistema puede expresarse en notación matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \tag{7-29}$$

o

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{r} \tag{7-30}$$

donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

Aquí la matriz **A** contiene todos los coeficientes de las incógnitas y se llama **matriz de coeficientes**. El vector **x** contiene todas las incógnitas, y se llama **vector de incógnitas**. El vector **r** contiene todos los términos independientes y se llama **vector de términos independientes**. (Vea la figura 7-16.)

Observe que el vector **r** contiene los términos no homogéneos. Si $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, se dice que el sistema de ecuaciones es **homogéneo**. En caso contrario, se dice que es **no homogéneo**. Por ejemplo, las ecuaciones 7-28 constituyen un sistema no homogéneo. El determinante de la matriz de coeficientes de este sistema es

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -29 \neq 0$$

La matriz de coeficientes es no singular, ya que $\det \mathbf{A} \neq 0$. Entonces, este sistema de ecuaciones tiene una solución única. En seguida explicaremos cómo resolver sistemas de ecuaciones algebraicas de manera sistemática.

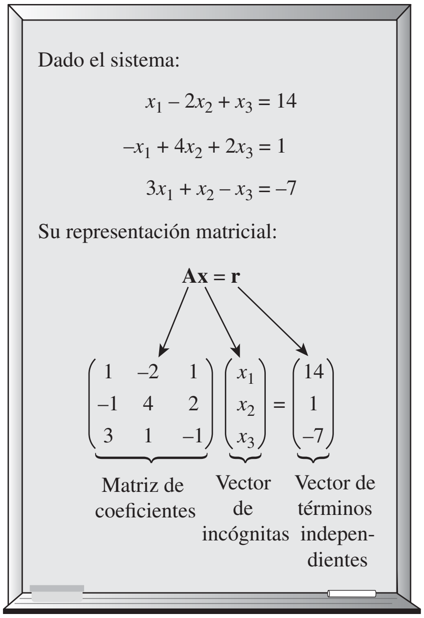


FIGURA 7-16
Representación matricial de un sistema de ecuaciones algebraicas.

Operaciones con renglones

Sabemos que, en un sistema de ecuaciones algebraicas, dos ecuaciones cualesquiera pueden intercambiarse, una ecuación puede multiplicarse por una constante diferente de cero, y dos ecuaciones cualesquiera pueden sumarse para dar otra ecuación que puede usarse en lugar de una de dichas ecuaciones. El sistema tendrá un aspecto bastante diferente después de tales manipulaciones, llamadas operaciones con renglones, pero sigue siendo equivalente al sistema original. Es decir, tanto el sistema modificado como el original tienen la misma solución.

Estas sencillas manipulaciones pueden emplearse para resolver simultáneamente un sistema de ecuaciones algebraicas. Considere que estas operaciones solo afectan a los coeficientes y los términos independientes. Primero combinamos la matriz de coeficientes **A** y el vector de términos independientes **r** en una sola matriz, que se llama **matriz aumentada**, agregando **r** a **A** como una columna adicional separada por una línea vertical. Para el sistema de las ecuaciones 7-28, la matriz aumentada se expresa como (figura 7-17)

$$(\mathbf{A}|\mathbf{r}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 14 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -7 \end{array}\right) \tag{7-31}$$

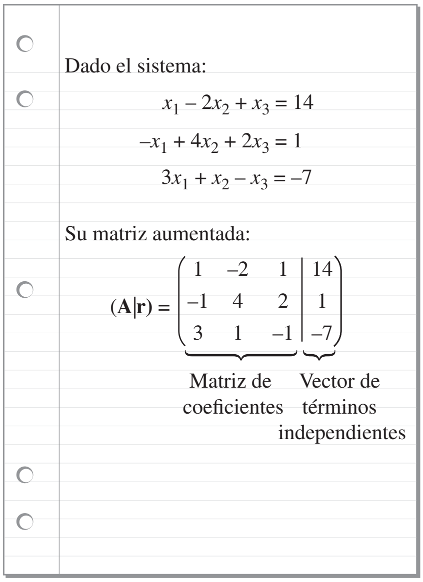


FIGURA 7-17
Sistema de ecuaciones algebraicas y su matriz aumentada.

La línea vertical en la matriz aumentada sirve simplemente como una ayuda visual para mostrar la partición entre la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes **r**. Ahora aplicamos las operaciones con renglones a ambos lados del sistema de ecuaciones (ecuaciones 7-28) y la matriz aumentada (ecuación 7-31) para comparación, y obtenemos la solución.

1. Sume el primer renglón al segundo y sume (-3) veces el primer renglón al tercero, para igualar a cero los coeficientes de la primera columna por debajo de la diagonal. Esto da por resultado

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 14 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 15 \\ 7x_2 - 4x_3 &= -49 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 3 & 15 \\ 0 & 7 & -4 & -49 \end{array}\right)$$

Esto equivale a reemplazar la segunda ecuación por la ecuación obtenida al sumar la primera ecuación a la segunda, y reemplazar la tercera ecuación por la ecuación obtenida sumando (-3) veces la primera ecuación a la tercera. El proceso elimina x_1 de la segunda y tercera ecuaciones.

2. Divida el segundo renglón entre 2 para obtener un 1 en la posición diagonal:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 14 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{15}{2} \\ 7x_2 - 4x_3 &= -49 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 7 & 3 & -49 \end{array}\right)$$

Esto equivale a reemplazar la segunda ecuación por la ecuación obtenida al dividirla entre 2. Como regla, nos gustaría tener 1 en todas las posiciones diagonales por la comodidad que esto ofrece en las operaciones con renglones.

3. Sume 2 veces el segundo renglón al primero y sume (-7) veces el segundo renglón al tercero, para igualar a cero las posiciones de la segunda columna fuera de la diagonal. Esto da

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 4x_3 &= 29 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{15}{2} \\ -\frac{29}{2}x_3 &= -\frac{203}{2} \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{29}{2} & -\frac{203}{2} \end{array}\right)$$

Esto equivale a reemplazar la primera ecuación por la ecuación obtenida al sumar 2 por la segunda ecuación a la primera, y reemplazar la tercera ecuación por la obtenida al sumar (-7) por la segunda a la tercera. Este proceso elimina x_2 de la primera y tercera ecuaciones.

4. Divida el último renglón entre $(-29/2)$ para obtener un 1 en la posición diagonal:

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 4x_3 &= 29 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{15}{2} \\ x_3 &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Entonces, una de las incógnitas se determina como $x_3 = 7$. Sustituyendo este valor de x_3 en la segunda ecuación obtenemos $x_2 = -3$, y luego sustituyendo en la primera ecuación obtenemos $x_1 = 1$.

Por tanto, una vez que la matriz de coeficientes se pone en forma matricial triangular superior por las operaciones con renglones, las incógnitas pueden determinarse una por una en orden inverso por sustitución hacia atrás. Estas operaciones también pueden realizarse sistemáticamente en la matriz aumentada de la siguiente manera: sume $(-3/2)$ veces el último renglón al segundo y sume (-4) veces el último renglón al primero para igualar a cero las posiciones fuera de diagonal de la tercera columna. Obtenemos (figura 7-18)

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -3 \\ x_3 &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

que equivale a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

La primera matriz a la izquierda es la matriz identidad, y el producto de cualquier matriz por la matriz identidad es igual a sí misma. Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

lo cual nuevamente da $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ y $x_3 = 7$. Por tanto, cuando la matriz de coeficientes se reduce a la matriz identidad mediante operaciones con renglones, el vector de términos independientes se reduce al vector de soluciones.

Forma reducida de la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Sistema correspondiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -3 \\ x_3 &= 7 \end{aligned}$$

FIGURA 7-18
Cuando la matriz de coeficientes de la matriz aumentada se reduce a una matriz identidad, la columna de términos independientes se reduce a la solución del sistema.

La reducción por renglones proporciona un procedimiento sistemático para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, y es muy adecuado para aplicaciones de computadora. Las operaciones con renglones pueden resumirse así:

1. Dos renglones cualesquiera pueden intercambiarse.
2. Cualquier renglón puede multiplicarse por una constante diferente de cero.
3. Cualquier múltiplo de un renglón puede sumarse a otro renglón.

Estas operaciones elementales corresponden a manipulaciones legítimas de las ecuaciones del sistema. Observe que el objetivo final en la reducción por renglones es reducir la matriz de coeficientes a la matriz identidad, que es una matriz diagonal con 1 en todas las posiciones de la diagonal principal y ceros en cualquier otro elemento. Si, para comenzar, la matriz de coeficientes no tiene un 1 en la esquina superior izquierda ($a_n \neq 1$), lo primero que debemos hacer es dividir el primer renglón entre a_{11} para producirlo en esa posición. Si $a_{11} = 0$, entonces necesitamos intercambiar el primer renglón por otro cuyo primer elemento no sea cero (figura 7-19).

Un modo menos eficiente de resolver el sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$$

es evaluar la inversa de la matriz de coeficientes **A**. Multiplicando la ecuación por $\mathbf{A}^{-1}$ desde la izquierda da $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}$ o

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r} \qquad \textbf{(7-32)}$$

Dado el sistema y su matriz aumentada:

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= -8 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{r}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -5 & -8 \end{array}\right)$$

el sistema equivalente se obtiene al intercambiar la primera y segunda ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= -8 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{r}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -5 & -8 \end{array}\right)$$

FIGURA 7-19
Intercambiar dos renglones en la matriz aumentada corresponde a intercambiar dos ecuaciones en el sistema correspondiente.

Dado el sistema:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$$

Multiplique por $\mathbf{A}^{-1}$ desde la derecha:

$$\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{r}$$

Simplifique:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{r}$$

FIGURA 7-20
Cómo resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales usando la inversa de la matriz de coeficientes.

ya que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{Ix} = \mathbf{x}$. Por tanto, una vez que $\mathbf{A}^{-1}$ está disponible, la solución del sistema dado puede determinarse multiplicando $\mathbf{A}^{-1}$ por el vector de términos independientes $\mathbf{r}$ (figura 7-20).

Considere una matriz general no singular de 2×2:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

También podemos comprobar por reducción por renglones que la inversa de esta matriz de 2×2 es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

donde $\det \mathbf{A} = ad - cb$.

La inversa de una matriz $\mathbf{A}$ puede determinarse suponiendo que $\mathbf{A}^{-1}$ en la ecuación $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ es la matriz de las incógnitas, y la matriz identidad $\mathbf{I}$ es la matriz del lado derecho. Entonces, $\mathbf{A}^{-1}$ se obtiene transformando la matriz aumentada $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ en $(I|B)$, donde la matriz $\mathbf{B}$ es equivalente a $\mathbf{A}^{-1}$. Ahora se ilustra el procedimiento con un ejemplo.

EJEMPLO 7-6 Inversión de matrices mediante reducción por renglones

Resuelva el siguiente sistema de tres ecuaciones algebraicas encontrando la inversa de su matriz de coeficientes:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 14 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Solución Este es el sistema que se resolvió antes mediante reducción por renglones. Nuevamente, primero expresamos el sistema en forma matricial como $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Para determinar $\mathbf{A}^{-1}$ (suponiendo que exista), formamos la matriz aumentada $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$.

$$(\mathbf{A}\ \mathbf{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(Se deja como ejercicio para el estudiante comprobar que esta matriz aumentada se reduce a la siguiente matriz aplicando las operaciones con renglones hasta obtener una matriz identidad a la izquierda de la línea divisoria.)

La matriz reducida es

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{29} & \frac{1}{29} & \frac{8}{29} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{29} & \frac{4}{29} & \frac{3}{29} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{29} & \frac{7}{29} & \frac{-2}{29} \end{array}\right)$$

Por tanto, la inversa de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es (figura 7-21)

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{29} & \frac{1}{29} & \frac{8}{29} \\ \frac{-5}{29} & \frac{4}{29} & \frac{3}{29} \\ \frac{13}{29} & \frac{7}{29} & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ -5 & 4 & 3 \\ 13 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Entonces, la solución del sistema dado puede determinarse a partir de la ecuación 7-32 como

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ -5 & 4 & 3 \\ 13 & 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

que es el mismo resultado que se obtuvo antes mediante reducción por renglones.

$$\begin{array}{cc} \text{Matriz } \mathbf{A} & \text{Matriz identidad} \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\Big\downarrow \text{ Operaciones con renglones}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{29} & \frac{1}{29} & \frac{8}{29} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{29} & \frac{4}{29} & \frac{3}{29} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{29} & \frac{7}{29} & \frac{-2}{29} \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{cc} \text{Matriz identidad} & \text{Matriz inversa } \mathbf{A}^{-1} \end{array}$$

FIGURA 7-21
Cuando la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ en la matriz aumentada $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ se reduce a la matriz identidad, la matriz identidad se reduce a la matriz inversa.

Los ejemplos anteriores muestran que, cuando la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ de un sistema no homogéneo de n ecuaciones algebraicas lineales con n incógnitas es no singular, $\det \mathbf{A} \neq 0$, y existe una solución única. Pero cuando la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es singular, $\det \mathbf{A} = 0$ y el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$ no tiene solución o tiene soluciones múltiples, como se ilustra en los dos ejemplos siguientes (figura 7-22).

Dado el sistema: $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$

1. $\det \mathbf{A} \neq 0$: el sistema tiene una solución única.
2. $\det \mathbf{A} = 0$: el sistema no tiene solución o tiene soluciones múltiples.

FIGURA 7-22
Un sistema lineal no homogéneo de ecuaciones algebraicas tiene solución única solo cuando el determinante de su matriz de coeficientes no es cero, de modo que $\det \mathbf{A} \neq 0$.

EJEMPLO 7-7 Sistema de ecuaciones sin soluciones

Resuelva el siguiente sistema de tres ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -15 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Solución El sistema puede expresarse en notación matricial como $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 18 - 8 - (-3) - 9 = 0$$

Entonces, la matriz de coeficientes es singular y el sistema dado no tiene solución o tiene soluciones múltiples. La matriz aumentada de este sistema es

$$(\mathbf{A}|\mathbf{r}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -15 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Se reduce por operaciones con renglones a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right)$$

El último renglón es equivalente a la ecuación

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 18$$

a la que no puede satisfacer ningún conjunto de valores de x_1, x_2 y x_3. Entonces, concluimos que el sistema dado *no* tiene solución.

EJEMPLO 7-8 **Sistema de ecuaciones con soluciones múltiples**

Resuelva el siguiente sistema de tres ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -15 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= -16 \end{aligned}$$

Solución Este es el sistema que se consideró en el ejemplo anterior, salvo que el lado derecho de la última ecuación es -16 en vez de 2. Es posible expresarlo en notación matricial como $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Observamos que la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ permanece igual, y su determinante se evaluó como cero en el ejemplo anterior. Por tanto, la matriz de coeficientes es singular, y nuevamente, el sistema dado no tiene solución o tiene soluciones múltiples. La matriz aumentada del sistema es

$$(\mathbf{A}|\mathbf{r}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -15 \\ 2 & -3 & 3 & -16 \end{array}\right)$$

Se reduce por operaciones con renglones a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que es equivalente a

$$x_1 - \frac{3}{5}x_3 = -\frac{13}{5} \qquad \text{y} \qquad x_2 - \frac{7}{5}x_3 = \frac{18}{5}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Tales sistemas siempre tienen conjuntos infinitos de soluciones, ya que a una de las incógnitas se le puede asignar cualquier valor arbitrario. Si tomamos $x_3 = \alpha$ (donde α es arbitraria), la solución del sistema dado puede expresarse como

$$x_1 = \frac{3}{5}\alpha - \frac{13}{5}, \; x_2 = \frac{7}{5}\alpha + \frac{18}{5} \quad \text{y} \quad x_3 = \alpha$$

o, en forma vectorial:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} \\ \frac{18}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(7-33)}$$

Por tanto, el sistema tendrá diferentes soluciones correspondientes a los diferentes valores de α. La solución del sistema dado también puede expresarse como

$$x = x_h + x_p \qquad \textbf{(7-34)}$$

donde

$$\mathbf{x}_n = \alpha \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} \\ \frac{18}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(7-35)}$$

Es posible verificar por sustitución directa que la *solución homogénea* $\mathbf{x}_h$ satisface la parte homogénea del sistema y la *solución particular* $\mathbf{x}_p$ satisface todo el sistema (no homogéneo).

Sistemas homogéneos

Un sistema de n ecuaciones algebraicas lineales homogéneas con n incógnitas puede expresarse como

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

o, en notación matricial, como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(7-36)}$$

donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes, $\mathbf{x}$ es el vector de incógnitas y $\mathbf{0}$ es el vector de términos independientes (todos cero).

Mencionamos que un sistema no homogéneo de n ecuaciones algebraicas con n incógnitas tiene una solución única solo cuando el determinante de la matriz de coeficientes no es cero: det $\mathbf{A} \neq 0$. Este también es el caso para sistemas homogéneos, salvo que la solución aquí es la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, en la que normalmente no tenemos interés. Por tanto, un sistema homogéneo tendrá soluciones significativas (no triviales) solo cuando la matriz de coeficientes sea singular y, por tanto, det $\mathbf{A} = 0$. En este caso, el sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tendrá un número infinito de soluciones, siendo la solución trivial solo una de ellas. Por tanto, ignorando la solución trivial, decimos que un sistema homogéneo tiene un número infinito de soluciones o no tiene ninguna solución (figura 7-23).

Dado el sistema: $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

1. det $\mathbf{A} \neq 0$: el sistema no tiene solución (no trivial).
2. det $\mathbf{A} = 0$: el sistema tiene un número infinito de soluciones.

FIGURA 7-23
Un sistema lineal *homogéneo* de ecuaciones algebraicas tiene soluciones no triviales solo cuando el determinante de su matriz de coeficientes es cero: det $\mathbf{A} = 0$.

EJEMPLO 7-9 Sistemas homogéneos de ecuaciones

Resuelva el siguiente sistema de tres ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución Este es un sistema homogéneo, ya que todos los términos independientes son cero, y es equivalente a la parte homogénea del sistema que se consideró en el ejemplo 7-8. Es posible expresar en notación matricial como $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es idéntica a la del ejemplo anterior, y su determinante se estableció como cero. Por tanto, la matriz de coeficientes es singular, y el sistema dado tiene un número infinito de soluciones.

La matriz aumentada del sistema es

$$(\mathbf{A}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Se reduce, por operaciones con renglones, a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{0}{1} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{0}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que es equivalente a

$$x_1 - \frac{3}{5}x_3 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 - \frac{7}{5}x_3 = 0$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Tales sistemas siempre tienen un número infinito de soluciones porque a una de las incógnitas se le puede asignar cualquier valor arbitrario. Si tomamos $x_3 = \alpha$ (donde α es arbitraria), la solución del sistema dado puede expresarse como

$$x_1 = \frac{3}{5}\alpha, \quad x_2 = \frac{7}{5}\alpha \quad \text{y} \quad x_3 = \alpha$$

o, en forma vectorial, como

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7-37}$$

que es idéntica a la solución homogénea $\mathbf{x}_h$ del sistema del ejemplo 7-8. Esto no sorprende, ya que el sistema de ecuaciones de este ejemplo es idéntico a la parte homogénea del sistema considerado en el ejemplo anterior. Nuevamente, el sistema tiene diferentes soluciones correspondientes a los diferentes valores de α.

Independencia lineal de vectores

El concepto de independencia lineal de vectores se asemeja estrechamente al de independencia lineal de funciones. Se dice que dos vectores son **linealmente independientes** si uno no es múltiplo constante del otro. Geométricamente, esto corresponde a dos vectores que no son paralelos entre sí (figura 7-24).

Generalizando, se dice que n vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ son **linealmente independientes** si la ecuación

$$C_1\mathrm{v}_1 + C_2\mathrm{v}_2 + C_3\mathrm{v}_3 + \cdots + C_n\mathrm{v}_n = 0 \tag{7-38}$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes se satisface solo cuando $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$. De no ser así, son linealmente dependientes.

La solución de un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con n funciones incógnitas incluye n vectores (cada uno con n elementos), y a menudo es necesario determinar si estos vectores solución son linealmente dependientes o independientes. Por tanto, limitaremos la siguiente explicación a la independencia lineal de n vectores (cada uno con n elementos). Considere el sistema

$$\begin{aligned} a_1C_1 + b_1C_2 + c_1C_3 &= 0 \\ a_2C_1 + b_2C_2 + c_2C_3 &= 0 \\ a_3C_1 + b_3C_2 + c_3C_3 &= 0 \end{aligned}$$

que es el sistema de tres ecuaciones homogéneas con tres incógnitas C_1, C_2 y C_3. Este puede expresarse en forma matricial como $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema tendrá la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ si y solo si el determinante de la matriz de coeficientes no es cero:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces, concluimos que n vectores (cada uno de los cuales contiene n elementos) son linealmente independientes si y solo si el determinante de la matriz de $n \times n$, cuyas columnas consisten en estos vectores, es diferente de cero.

Dos vectores dados:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes, ya que

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\mathbf{v}_1$$

FIGURA 7-24
Dos vectores son linealmente dependientes si uno es un múltiplo constante del otro.

EJEMPLO 7-10 Independencia lineal de vectores constantes

Determine si los siguientes tres vectores son linealmente independientes:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Solución Cada uno de estos tres vectores contiene tres elementos. Primero formamos su combinación lineal usando las constantes C_1, C_2 y C_3 y la igualamos a cero, como

$$C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 + C_3\mathbf{v}_3 = 0$$

o
$$C_1\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Esta ecuación matricial es equivalente al siguiente sistema de tres ecuaciones algebraicas lineales homogéneas:

$$2C_1 + C_2 + 2C_3 = 0$$
$$C_2 + C_3 = 0$$
$$C_1 - C_2 - 3C_3 = 0$$

o
$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\1 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\1 & -1 & -3\end{vmatrix}=-5$$

que no es cero. Por tanto, la única solución de este sistema homogéneo es la solución trivial $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Entonces concluimos que los vectores dados son linealmente independientes (figura 7-25).

Tres vectores dados:

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\ \text{y}\ \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

son linealmente independientes, ya que el determinante de la matriz que forman no es cero:

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\1 & -1 & -3\end{vmatrix}=-5\neq 0$$

FIGURA 7-25
Tres vectores de 3×1 son linealmente independientes si el determinante de la matriz de 3×3, cuyas columnas son estos vectores, no es cero.

Al determinar la independencia lineal de vectores, podemos omitir los pasos intermedios, examinando directamente la matriz cuyas columnas son los vectores dados y evaluando su determinante. Los vectores son linealmente independientes si el determinante no es cero, en caso contrario son linealmente dependientes.

Los conceptos de dependencia e independencia lineal también son aplicables a las funciones vectoriales. Se dice que los n vectores $\mathbf{v}_1(t)$, $\mathbf{v}_2(t)$, . . . , $\mathbf{v}_n(t)$ son linealmente dependientes en un intervalo $t_1 < t < t_2$ si existen n constantes C_1, C_2, ..., C_n, donde por lo menos una no es cero, de modo que la ecuación

$$C_1\mathbf{v}_1(t) + C_2\mathbf{v}_2(t) + C_3\mathbf{v}_3(t) + \cdots + C_n\mathbf{v}_n(t) = 0 \qquad \textbf{(7-39)}$$

se satisfaga para todas las t en ese intervalo. De no ser así, son linealmente independientes.

Una cantidad que es muy útil para determinar la independencia lineal de n vectores de soluciones de un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes es el *wronskiano* $W(t)$, que se introdujo en el capítulo 3 para ecuaciones individuales.

El wronskiano de las n funciones vectoriales, cada una de las cuales contiene n elementos:

$$\mathbf{v}_1(t)=\begin{pmatrix}v_{11}(t)\\v_{21}(t)\\\vdots\\v_{n1}(t)\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2(t)=\begin{pmatrix}v_{12}(t)\\v_{22}(t)\\\vdots\\v_{n2}(t)\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_n(t)=\begin{pmatrix}v_{1n}(t)\\v_{2n}(t)\\\vdots\\v_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

se define como el determinante de $n \times n$ cuyas columnas son estos vectores. Es decir,

$$W(t) = \begin{vmatrix} v_{11}(t) & v_{12}(t) & . & . & v_{1n}(t) \\ v_{21}(t) & v_{22}(t) & . & . & v_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n1}(t) & v_{n2}(t) & . & . & v_{nn}(t) \end{vmatrix} \quad \textbf{(7-40)}$$

Estos vectores son linealmente dependientes en un intervalo si su wronskiano es idénticamente cero para todas las t en ese intervalo. De no ser así, son linealmente independientes (figura 7-26).

Tres funciones vectoriales dadas

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11}(t) \\ v_{21}(t) \\ v_{31}(t) \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12}(t) \\ v_{22}(t) \\ v_{32}(t) \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} v_{13}(t) \\ v_{23}(t) \\ v_{33}(t) \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes en $t_1 < t < t_2$ si

$$W(t) = \begin{vmatrix} v_{11}(t) & v_{12}(t) & v_{13}(t) \\ v_{21}(t) & v_{22}(t) & v_{23}(t) \\ v_{31}(t) & v_{32}(t) & v_{33}(t) \end{vmatrix} = 0$$

para todas las t en $t_1 < t < t_2$.

FIGURA 7-26
Tres (o más) funciones vectoriales son linealmente dependientes en un intervalo si su wronskiano es idénticamente igual a cero en ese intervalo.

EJEMPLO 7-11 Independencia lineal de funciones vectoriales

Determine si las tres funciones vectoriales siguientes son linealmente independientes en el intervalo $0 < t < \infty$:

$$\mathbf{v}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3(t) = \begin{pmatrix} -2e^t \\ e^{2t} \\ 3e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Solución Cada una de estas tres funciones vectoriales contiene tres elementos. Ahora evaluamos el wronskiano de estos vectores formando primero el determinante cuyas columnas son los vectores dados, como

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 & -2e^t \\ -e^{2t} & 2e^{2t} & e^{2t} \\ e^{-2t} & -e^{-2t} & 3e^{-2t} \end{vmatrix} = 9e^t$$

que nunca es cero en el intervalo $0 < t < \infty$. Por tanto, estos tres vectores son linealmente independientes en ese intervalo.

La evaluación del wronskiano de funciones vectoriales puede simplificarse en cierta medida extrayendo como factor del deteminante las funciones comunes de sus renglones o sus columnas, como se muestra en la figura 7-27. Al hacer esto, debemos recordar que multiplicar un determinante por un factor equivale a multiplicar *cualquiera* de sus renglones o columnas por ese factor. Esto contrasta con las matrices, ya que multiplicar una matriz por un factor es equivalente a multiplicar *todos* sus elementos por ese factor.

La solución sistemática de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \textbf{(7-41)}$$

donde **A** es la matriz de coeficientes, incluye el uso de los valores característicos, y sus correspondientes vectores característicos, de la matriz **A**. Por tanto, dedicamos el resto de esta sección a determinar los valores característicos y vectores característicos asociados con una matriz cuadrada **A** de $n \times n$ cuyos elementos son constantes reales.

Si intentamos encontrar una solución de la ecuación 7-41 de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{C}e^{\lambda t}$, donde **C** es un vector de constantes, entonces $\mathbf{x}' = \mathbf{C}\lambda e^{\lambda t}$, y la ecuación 7-41 resulta en $\mathbf{x}' = \mathbf{C}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{AC}e^{\lambda t}$. Al dividir entre $e^{\lambda t}$ y reordenar obtenemos

$$\mathbf{AC} - \lambda\mathbf{C} = \mathbf{AC} - \lambda\mathbf{IC} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{C} = 0$$

Como el término independiente es cero, una solución significativa de la ecuación 7-41 es posible solo si el vector **C** es diferente de cero, lo que es posible solo si $det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} e^t & 0 & -2e^t \\ -e^{2t} & 2e^{2t} & e^{2t} \\ e^{-2t} & -e^{-2t} & 3e^{-2t} \end{vmatrix} \\ &= e^t \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -e^{2t} & 2e^{2t} & e^{2t} \\ e^{-2t} & -e^{-2t} & 3e^{-2t} \end{vmatrix} \\ &= e^t e^{2t} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ e^{-2t} & -e^{-2t} & 3e^{-2t} \end{vmatrix} \\ &= e^t e^{2t} e^{-2t} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 9e^t \end{aligned}$$

FIGURA 7-27
Extraer como factor de un determinante las funciones comunes de los renglones (o columnas) para simplificar su evaluación.

Valores característicos y vectores característicos

Considere una matriz **A** de $n \times n$ expresada como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{7-42}$$

Los valores reales o complejos de λ que satisfacen la ecuación

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{7-43}$$

se llaman **valores característicos** de la matriz **A**. El vector **v** diferente de cero que satisface la ecuación

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{7-44}$$

se llama **vector característico** asociado con el valor característico λ de la matriz **A** (figura 7-28).

1. Ecuación de valores característicos:
   $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$
2. Ecuación de vectores característicos:
   $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$

FIGURA 7-28
Ecuaciones con las que se obtienen los valores característicos λ y los vectores característicos **v** de una matriz **A**.

La matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ puede expresarse como

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda & . & . & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & . & . & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & . & . & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

que equivale a la matriz obtenida restando λ de los elementos de la diagonal principal de la matriz **A**. Entonces la ecuación 7-43 se vuelve

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & . & . & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7-45}$$

Expandiendo este determinante obtenemos

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_n = 0 \tag{7-46}$$

que es una ecuación polinomial de grado n en λ y se llama **polinomio característico de la matriz A**. Por el teorema fundamental del álgebra, esta función polinomial tiene n raíces, algunas de las cuales pueden ser reales diferentes, reales repetidas o complejas. Por tanto, una matriz de $n \times n$ tiene n valores característicos, que no son necesariamente reales y distintos (figura 7-29).

Los valores característicos de una matriz **A** de $n \times n$ son las raíces de la ecuación:

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

que se reduce a una ecuación polinomial de grado n:

$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_n = 0$

FIGURA 7-29
Una matriz real cuadrada de orden n siempre tiene n valores característicos, que no son necesariamente reales y distintos.

Una raíz que se repite k veces se llama **raíz de multiplicidad *k***. Una raíz que tiene una multiplicidad 1 se llama **raíz simple**. Una raíz que tiene una multiplicidad 2 o mayor se llama **raíz repetida**. Cuando todos los elementos de la matriz **A** son reales, todos los coeficientes de la ecuación polinomial (ecuación 7-46) también lo son, y en caso de tener raíces complejas, estas deben aparecer en pares conjugados.

Observe que el vector cero $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ siempre satisface la ecuación de vectores característicos $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Pero siempre la ignoramos como el caso trivial y buscamos un vector característico que tenga por lo menos un elemento distinto de cero.

También note que si $\mathbf{v}$ es un vector característico, un múltiplo constante de este, $k\mathbf{v}$, también lo es. Esto se debe a que si $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})k\mathbf{v} = k(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = k \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Por tanto, un vector característico sólo puede determinarse con un múltiplo constante arbitrario. El valor de este múltiplo es irrelevante, y podemos seleccionar cualquier número conveniente, excepto cero. Usualmente conviene especificar un vector característico igualando uno de sus elementos a 0 o a 1. Entonces, el vector característico representa un vector geométrico cuya dirección es importante, pero no su longitud.

Solo hay un vector característico linealmente independiente que corresponde a un valor característico simple de una matriz $\mathbf{A}$. Se podría pensar que existen k vectores característicos linealmente independientes por cada valor característico de multiplicidad k, pero tal caso no es necesariamente cierto. Un valor característico de multiplicidad k puede tener m vectores característicos correspondientes, donde $1 \leq m \leq k$. El caso $m < k$ provoca cierta dificultad en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, como usted verá más adelante en este capítulo; además, debe tener presente que algunos de los valores característicos y sus correspondientes vectores característicos pueden ser complejos aun cuando cada elemento de la matriz $\mathbf{A}$ sea real.

Es posible probar que los vectores característicos correspondientes a diferentes valores característicos de una matriz $\mathbf{A}$ son linealmente independientes. Si la matriz $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$ con n valores característicos distintos, los n vectores característicos correspondientes a estos son linealmente independientes. Pero si la matriz de $n \times n$ tiene uno o más valores característicos repetidos, el número de vectores característicos linealmente independientes de $\mathbf{A}$ puede ser menor que n. La única excepción de esta regla ocurre cuando la matriz es *simétrica real*, que es una matriz cuyos elementos (todos) son reales y cuya transpuesta es igual a la misma matriz.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica real de $n \times n$, entonces hay n vectores característicos linealmente independientes de $\mathbf{A}$, aun cuando se repitan uno o más valores característicos de $\mathbf{A}$. De igual manera, todos los valores característicos son reales en este caso, y hay m vectores característicos linealmente independientes correspondientes a un valor característico de multiplicidad m. Los siguientes ejemplos ilustran la evaluación de los valores característicos y de los vectores característicos para diferentes casos.

EJEMPLO 7-12 Valores característicos reales y distintos

Encuentre los valores característicos y los vectores característicos de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución Esta es una matriz de 2×2, y sus valores característicos son las raíces de su ecuación característica $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(1 - \lambda) - 12$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0$$

cuyas raíces son 7 y -1. Por tanto, los valores característicos de la matriz dada son $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = -1$, que son reales y distintos. Por tanto, esperamos obtener

Si el vector

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de una matriz **A** correspondiente a un valor característico λ_1, también lo son los vectores:

$$\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = -5\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_4 = \frac{1}{3}\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_n = c\mathbf{v}_1 \begin{pmatrix} 2c \\ c \end{pmatrix}$$

donde c es una constante.

FIGURA 7-30
Cualquier múltiplo constante de un vector característico también es un vector característico (pero no hay dos de esos vectores característicos que sean linealmente independientes).

dos vectores linealmente independientes de $\mathbf{A}$. Estos vectores característicos se determinan por la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{v} = 0$, que en este caso se vuelve

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7-47}$$

El vector característico correspondiente a este primer valor $\lambda = \lambda_1 = 7$ se obtiene sustituyendo dicho valor de λ en la ecuación (7-47) para obtener

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$-2x_1 + 4x_2 = 0$$

$$3x_1 - 6x_2 = 0$$

Ambas ecuaciones son idénticas, ya que multiplicando la primera por $-3/2$ se obtiene la segunda. Entonces es posible usar cualquiera de las dos ecuaciones para determinar la relación entre las dos incógnitas; esto nos permite seleccionar cualquier valor conveniente (excepto cero) para una de las dos incógnitas. Tomando $x_2 = 1$ por simplicidad, obtenemos $x_1 = 2$. Entonces, el vector característico correspondiente al valor característico $\lambda_1 = 7$ es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observe que, si hubiésemos tomado $x_2 = c$ donde c es una constante arbitraria, habríamos obtenido $x_1 = 2c$, y el vector característico correspondiente al valor característico $\lambda_1 = 7$ sería

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que es un múltiplo constante del vector característico antes obtenido. La constante arbitraria c no tiene consecuencias en el cálculo del vector característico, y siempre podemos ignorarla. (Determina la longitud del vector.) Pero tendremos presente que cualquier múltiplo constante de un vector característico también es un vector característico (figura 7-30).

El segundo vector característico se determina sustituyendo $\lambda = \lambda_2 = -1$ en la ecuación 7-47. Se obtiene

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$6x_1 + 4x_2 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 = 0$$

Ambas ecuaciones son idénticas, ya que multiplicando la segunda por 2 se obtiene la primera, y cualquiera de las dos puede expresarse como

$$3x_1 + 2x_2 = 0$$

Otra vez tenemos una sola ecuación para determinar dos incógnitas. Haciendo que $x_2 = 3$ para evitar fracciones, obtenemos $x_1 = -2$. Entonces, el vector característico correspondiente al valor característico $\lambda_2 = -1$ es

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Observe que los vectores característicos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes, como se esperaba.

EJEMPLO 7-13 Valores característicos repetidos

Encuentre los valores característicos y los vectores característicos de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución Esta es una matriz de 2×2, y sus valores característicos son las raíces de la ecuación característica $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ (ver la figura 7-31), como

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) + 1$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

Las raíces de esta ecuación (y, por tanto, los valores característicos de la matriz dada) son $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (figura 7-31). Así, $\lambda = 3$ es un valor característico doble.

Los vectores característicos de la matriz $\mathbf{A}$ se determinan por la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, que en este caso se convierte en

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(7-48)}$$

Sustituyendo $\lambda = 3$ en la ecuación 7-48 obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$-x_1 - x_2 = 0$$

Ambas ecuaciones son idénticas, ya que multiplicando la primera por -1 se obtiene la segunda, y cualquiera de las dos puede expresarse como $x_1 + x_2 = 0$. Nuevamente tenemos una sola ecuación para determinar dos incógnitas. Haciendo que $x_1 = 1$, obtenemos $x_2 = -1$. Entonces, el vector característico de la matriz dada $\mathbf{A}$ correspondiente al valor característico $\lambda_1 = 3$ es

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Este es el único vector característico linealmente independiente de $\mathbf{A}$, ya que el valor de λ únicamente puede ser 3. Esto es típico para matrices de 2×2 que tienen valores característicos dobles. Entonces concluimos que hay un solo vector característico linealmente independiente correspondiente a un valor característico de multiplicidad 2 asociado con una matriz de 2×2. Para matrices de 3×3 o mayores, puede haber dos vectores linealmente independientes correspondientes a un valor característico de multiplicidad 2, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Dada la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituya en
$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$
para obtener

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

o

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

Determine sus raíces:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

que son los valores característicos.

FIGURA 7-31
Procedimiento sistemático para determinar los valores característicos de una matriz dada.

EJEMPLO 7-14 Matrices simétricas reales

Encuentre los valores característicos y los vectores característicos de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución Esta es una matriz real y simétrica de 3×3, y sus valores característicos son las raíces de la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 & 3 \\ 3 & 0-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2-9)-3(-3\lambda-9)+3(9+3\lambda)$$
$$= -(\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-6) = 0$$

cuyas raíces son -3, -3 y 6. Por tanto, los valores característicos de la matriz dada son $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$. Entonces tenemos un valor característico simple de 6 y un valor característico doble de -3. La matriz $\mathbf{A}$ es real y simétrica. Por tanto, esperamos obtener tres vectores característicos linealmente independientes para $\mathbf{A}$.

Los vectores característicos de la matriz $\mathbf{A}$ se determinan por la ecuación $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$, que en este caso se vuelve

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 3 \\ 3 & -\lambda & 3 \\ 3 & 3 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7-49}$$

El vector característico correspondiente al primer valor característico $\lambda = \lambda_1 = 6$ se obtiene sustituyendo este valor de λ en la ecuación 7-49 para obtener

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada de la ecuación matricial es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

que se reduce por operaciones con renglones a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$x_1 - x_3 = 0$$
$$x_2 - x_3 = 0$$

Entonces tenemos solo dos ecuaciones para determinar tres incógnitas. Esto nos permite elegir cualquier valor conveniente para una de las incógnitas y determinar la otra en términos de ésta. Haciendo $x_3 = 1$ por simplicidad, obtenemos $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$.

Entonces el vector característico correspondiente al valor característico $\lambda = 6$ es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El segundo vector característico se determina sustituyendo $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ en la ecuación 7-49. Obtenemos

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es equivalente a la ecuación individual $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$ o $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Esta vez tenemos una ecuación para determinar tres incógnitas. Entonces podemos asignar valores arbitrarios a cualquier par de incógnitas y despejar la tercera. Haciendo $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$, obtenemos $x_3 = -1$. El vector característico correspondiente al valor característico $\lambda_2 = -3$ para estas asignaciones es

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Un valor característico que sea linealmente independiente de v_2 se obtiene escogiendo otros valores para x_1 y x_2. Haciendo $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ da nuevamente $x_3 = 1$. El vector característico correspondiente al valor característico $\lambda_2 = -3$ para estas asignaciones es

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Los vectores característicos $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son linealmente independientes —aun cuando correspondan al mismo valor característico— ya que uno no es un múltiplo constante del otro.

Para comprobar que no hay más vectores característicos linealmente independientes correspondientes al doble valor característico $\lambda_2 = -3$, hacemos $x_1 = c_1$ y $x_2 = c_2$, lo cual da $x_3 = -c_1 - c_2$. El vector característico correspondiente al valor característico -3 para estas asignaciones es

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ -c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1\mathbf{v}_2 + c_2\mathbf{v}_3$$

la cual es una combinación lineal de los dos vectores característicos antes determinados. Por tanto, hay solo dos vectores característicos linealmente independientes correspondientes al doble valor característico.

EJEMPLO 7-15 Valores característicos complejos

Encuentre los valores característicos y los vectores característicos de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7-50}$$

Solución Esta es una matriz de 2×2, y sus valores característicos son las raíces de la ecuación $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Entonces,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

Las raíces de esta ecuación (y, por tanto, los valores característicos de la matriz dada) son $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i$, que son complejos conjugados. Por tanto, ambos valores característicos son complejos en este caso.

Los vectores característicos de la matriz $\mathbf{A}$ se determinan por la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, que en este caso se convierte en

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo $\lambda = \lambda_1 = 1 + \sqrt{2}i$ en esta ecuación, obtenemos

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}i & 2 \\ -1 & -\sqrt{2}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$-\sqrt{2}ix_1 + 2x_2 = 0$$
$$-x_1 + \sqrt{2}ix_2 = 0$$

Estas dos ecuaciones son idénticas, ya que multiplicando la segunda por $\sqrt{2}i$ se obtiene la primera. Cualquiera de las dos ecuaciones puede expresarse como $x_1 - \sqrt{2}ix_2 = 0$.

Nuevamente, tenemos solo una ecuación para determinar dos incógnitas. Haciendo que $x_1 = 1$ obtenemos $x_2 = i/\sqrt{2}$. Entonces, el vector característico de la matriz dada $\mathbf{A}$ correspondiente al valor característico $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}i$ es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Si repetimos los cálculos del vector característico con el segundo valor característico $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}i$, que es el complejo conjugado de λ_1, obtendríamos

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

el cual es el complejo conjugado de $\mathbf{v}_1$; es decir, $\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1}$, donde la barra superior simboliza el complejo conjugado. Por tanto, si el vector característico correspondiente a λ_1 es $\mathbf{v}_1$, el vector característico correspondiente al complejo conjugado de λ_1 es el complejo conjugado de $\mathbf{v}_1$. Es decir, si $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, entonces $\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1}$. Observe que el conjugado de un número complejo o de un vector complejo se obtiene reemplazando todas las apariciones de i por $-i$ y que los vectores característicos correspondientes a valores característicos complejos se obtienen exactamente de la misma manera que los vectores característicos correspondientes a valores característicos reales (figura 7-32).

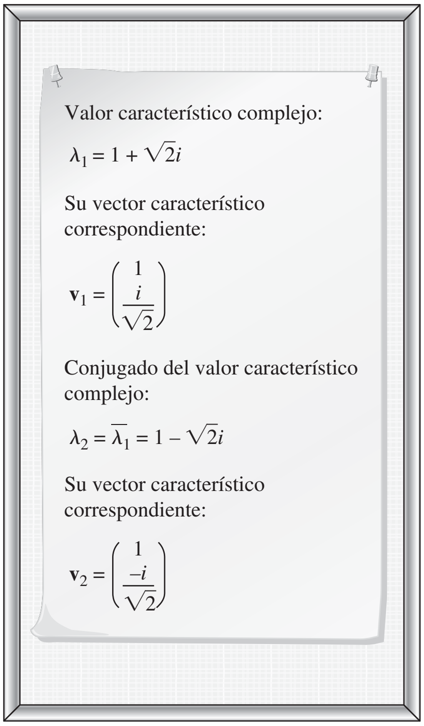


FIGURA 7-32
El vector característico que corresponde al conjugado de un valor característico complejo es idéntico al conjugado del vector característico que corresponde a dicho valor característico.

Caso especial: Matriz A con un factor común

A veces todos los elementos de la matriz $\mathbf{A}$ están multiplicados por una variable escalar común. En tales casos, dicha variable puede extraerse de la matriz como factor común, dejando solo valores numéricos como elementos de la matriz. Los ejemplos 7-2 y 7-3 contienen tales matrices. Del ejemplo 7-3, tenemos

$$\mathbf{A} = \frac{1}{RC}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{RC}\mathbf{A}_1$$

donde definimos $\mathbf{A}_1$ como

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Aquí el factor común es $1/RC$.

En general, si un término α puede obtenerse como factor común de la matriz **A**, dejando la matriz $\mathbf{A}_1$, mostraremos ahora que los valores característicos de **A** son α veces los valores característicos de $\mathbf{A}_1$. Además, los vectores característicos de **A** son los mismos que los vectores característicos de $\mathbf{A}_1$. Por las ecuaciones básicas, tenemos

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Si reemplazamos **A** por $\alpha\mathbf{A}_1$, tenemos

$$(\alpha\mathbf{A}_1 - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\det(\alpha\mathbf{A}_1 - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Si dividimos ambas ecuaciones entre la escalar α, obtenemos

$$\left(\mathbf{A}_1 - \frac{\lambda}{\alpha}\mathbf{I}\right)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\det\left(\mathbf{A}_1 - \frac{\lambda}{\alpha}\mathbf{I}\right) = 0$$

Aquí vemos que $\lambda_1 = \lambda/\alpha$ son los valores característicos de $\mathbf{A}_1$. Entonces, los valores característicos de **A** son $\lambda = \alpha\lambda_1$. Como **v** no cambia por la división, también notamos que los vectores característicos no cambian.

La importancia de este resultado es que, si necesitamos determinar los valores característicos y los vectores característicos por un método numérico (lo cual es usualmente el caso para sistemas de tres o más ecuaciones), podemos aplicar el método numérico a la matriz $\mathbf{A}_1$ sin necesidad de conocer el valor de α. Por ejemplo, la matriz $\mathbf{A}_1$ que antes se dio para el ejemplo 7-3 tiene los siguientes valores característicos y vectores característicos, que se obtuvieron por computadora:

$$\lambda_1 = -3.2470, -1.5550, -0.1981$$

y
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2.2469 \\ 1.8019 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1.8019 \\ 1 \\ 2.2469 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2.2469 \\ 1.8019 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, los valores característicos para el modelo de circuito son $\lambda = -3.2470/RC$, $-1.5550/RC$, $-0.1981/RC$. Por tanto, las constantes de tiempo del circuito son

$$\tau = RC/3.2470, RC/1.5550, \mathrm{RC}/0.1981$$
$$= 0.3080RC, 0.6431RC, 5.0480RC$$

La constante de tiempo dominante es $5.0480RC$, y cuatro veces este valor da un estimado del tiempo de respuesta del circuito. En la respuesta libre, las corrientes no oscilarán porque todos los valores característicos son reales.

Repaso de la sección

7-6C ¿Cómo decide usted si un sistema dado de ecuaciones algebraicas lineales es homogéneo o no homogéneo?

7-7C ¿Cómo se forma la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones algebraicas?

7-8C ¿Cómo se decide si un determinado sistema de ecuaciones algebraicas lineales es homogéneo o no homogéneo?

7-9C ¿Cómo es la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones algebraicas formadas?

7-10C ¿Qué puede usted decir acerca de la solución de un sistema lineal de ecuaciones algebraicas *a*) homogéneas y *b*) no homogéneas, si la matriz de coeficientes del sistema es singular?

7-11C Considere *n* funciones vectoriales de orden *n*. ¿Cómo determinaría usted si estos *n* vectores son linealmente dependientes o independientes en un intervalo específico?

7-12C Considere una matriz cuadrada constante de orden *n*. ¿Cuántos valores característicos tendrá esta matriz? ¿Cómo se determinan?

7-13 Determine si existe la inversa de las siguientes matrices, y obténgala si existe:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ *b*) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(*Respuestas: a*) $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{7}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

b) $\det \mathbf{B} = 14 \neq 0,\ \mathbf{B}^{-1} = \dfrac{1}{14}\begin{bmatrix} 0 & 4 & -6 \\ -7 & 17 & -15 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$.)

7-14 Determine si los siguientes sistemas de ecuaciones algebraicas tienen soluciones, y encuentre todas las soluciones cuando las haya.

a) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$
$-2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$
$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

b) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$
$-2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$
$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$

c) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$
$-2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$
$-x_1 + 6x_2 = 5$

d) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$
$-2x_1 + 4x_2 - x_3 = -2$
$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

(*Respuestas: a*) Solución única: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Solución trivial: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) No hay solución única; α es una constante arbitraria:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{5}{7} \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix}$.)

7-15 Determine si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(*Respuesta:* son linealmente independientes.)

7-16 Determine si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes para $-\infty < t < \infty$.

$$\mathbf{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^{2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

(*Respuesta:* son linealmente independientes.)

7-17 Determine todos los valores característicos de las siguientes matrices y sus vectores característicos asociados:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ *b*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(*Respuestas: a*) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 5$ $\lambda_2 = 2$

b) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}}i \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}i \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}i \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$ $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$.)

7-18 En el ejemplo 7-2, sea $R = A = 1$. Encuentre los valores y vectores característicos de la matriz **A** dada en ese ejemplo.

7-19 En el ejemplo 7-4, sea $m = c = k = 1$. Encuentre los valores y vectores característicos de la matriz **A** dada en ese ejemplo.

7-4 ▪ TEORÍA DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Usted recordará que un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden siempre puede expresarse como una sola ecuación lineal de orden n. Por tanto, es natural esperar semejanzas estrechas entre la teoría de una sola ecuación lineal de orden n y un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden. En esta sección presentaremos brevemente los teoremas clave que corresponden a los sistemas lineales. El lector puede consultar los teoremas pertinentes en los capítulos 3 y 4, que corresponden a ecuaciones equivalentes individuales lineales de orden superior, para mayor explicación.

Considere un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden de la forma

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + r_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + r_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + r_n(t) \end{aligned} \tag{7-51}$$

Este sistema también puede expresarse de manera compacta en forma matricial como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{r}(t) \tag{7-52}$$

donde

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n(t) \end{pmatrix} \tag{7-53}$$

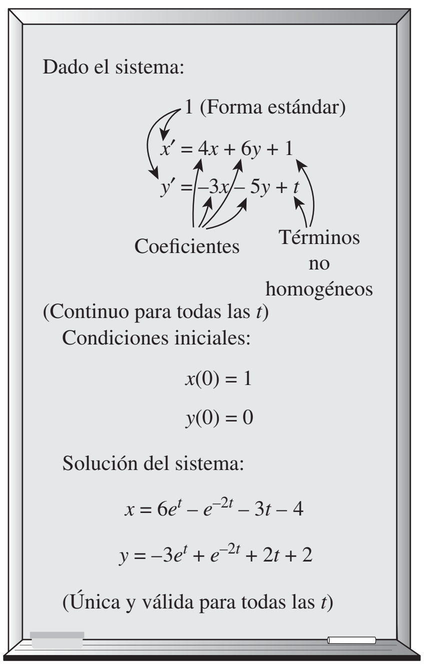


FIGURA 7-33
Un sistema en forma estándar (cuyos coeficientes y términos no homogéneos son continuos en el intervalo $-\infty < t < \infty$) tiene una solución única que satisface un conjunto dado de condiciones iniciales, y la solución es válida para todas las t.

Considere también el conjunto de n condiciones iniciales:

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \ldots, x_n(t_0) = x_{n0} \tag{7-54}$$

El sistema de ecuaciones (ecuaciones 7-51) junto con las condiciones iniciales (ecuaciones 7-54) forma un sistema de n problemas de valor inicial, y el teorema de existencia y unicidad para tales sistemas puede expresarse como sigue.

Teorema 7-1 Existencia y unicidad para sistemas lineales

Si los coeficientes $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ y las funciones no homogéneas $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son continuos en un intervalo $t_1 < t < t_2$ que contiene el punto t_0, el sistema de n ecuaciones lineales de primer orden tiene una solución única que satisface las n condiciones iniciales:

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \ldots, x_n(t_0) = x_{n0}$$

Esta solución es válida en todo el intervalo $t_1 < t < t_2$.

La analogía entre este y los teoremas 2-1, 3-1 y 4-1 es evidente. Los cuatro teoremas establecen que, si los coeficientes y los términos no homogéneos de las ecuaciones en la forma estándar son continuos en un intervalo, una ecuación lineal tiene una y solo una solución que satisface las condiciones iniciales dadas (figura 7-33).

Considerando que un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es equivalente a una ecuación lineal de orden n, esperamos que la solución general de tal sistema incluya n constantes arbitrarias. Entonces, no sorprende que se necesiten condiciones iniciales para determinar en forma única estas n constantes arbitrarias y obtener una solución única.

Las soluciones de sistemas de ecuaciones se expresan en términos de vectores. Se dice que un vector es solución de un sistema de ecuaciones si sus componentes satisfacen cada ecuación del sistema. Los vectores solución se expresan como

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

donde las soluciones individuales x_{ij} representan la j-ésima solución de la i-ésima función incógnita. Observe que la $\mathbf{x}_k$ (en negrita) representa el vector de la k-ésima solución; mientras que x_k representa la k-ésima función incógnita.

En lo sucesivo supondremos que la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ (y, por tanto, cada uno de sus elementos a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}) y el vector no homogéneo $\mathbf{r}$ (y, así, las funciones r_1, r_2, ..., r_n) son continuos en el intervalo que interesa para garantizar la existencia de una solución en ese intervalo. Primero hablamos de sistemas lineales homogéneos y luego de sistemas lineales no homogéneos.

Teoría de sistemas lineales homogéneos

Considere el sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales expresado como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{7-55}$$

que se obtiene de la ecuación 7-52 igualando a cero el vector no homogéneo, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$. Si los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \ldots, \mathbf{x}_n$ satisfacen el sistema lineal homogéneo dado, cualquier combinación lineal de los vectores, como se expresa en el siguiente teorema, satisfará el sistema (ver también figura 7-34).

Teorema 7-2 Principio de superposición

Si las funciones vectoriales $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *son soluciones del sistema lineal homogéneo:*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{7-56}$$

entonces la combinación lineal

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 + \cdots + c_n x_n \tag{7-57}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *son constantes arbitrarias, también lo es.*

Comprobación. Este teorema puede probarse de una manera sencilla derivando la ecuación 7-57 y sustituyendo el resultado en la ecuación 7-56:

$$\mathbf{x}' = c_1\mathbf{x}_1' + c_2\mathbf{x}_2' + c_3\mathbf{x}_3' + \cdots + c_n\mathbf{x}_n' = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1' + c_2\mathbf{A}\mathbf{x}_2' + c_3\mathbf{A}\mathbf{x}_3'$$
$$+ \cdots + c_n\mathbf{A}\mathbf{x}_n' = \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Por tanto, la ecuación 7-57 satisface el sistema (ecuación 7-56). Esto termina la prueba.

1. **Múltiplo constante de las soluciones:**

   Si una función vectorial $\mathbf{x}_1$ es una solución del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, entonces $c\mathbf{x}_1$ también lo es, donde c es cualquier constante.

2. **Suma de soluciones:**

   Si las funciones vectoriales $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son soluciones del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ también lo es.

3. **Solución general:**

   Si las funciones vectoriales $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son soluciones del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, entonces $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, también lo es.

FIGURA 7-34
Principio de superposición para sistemas lineales homogéneos.

EJEMPLO 7-16 Principio de superposición para sistemas

Verifique que los vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son soluciones del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, donde

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Compruebe que $2\mathbf{x}_1 - 8\mathbf{x}_2$ es también una solución de este sistema.

Solución Los vectores dados son soluciones del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ si, al sustituirlos en dicho sistema, da por resultado que el lado izquierdo es idéntico al derecho. Sustituyendo $\mathbf{x}_1$ en el sistema obtenemos

$$\mathbf{x}_1' = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

y
$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8e^t - 6e^t \\ -6e^t + 5e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

Entonces, el vector $\mathbf{x}_1$ satisface el sistema dado, y es una solución.

Sustituyendo $\mathbf{x}_2$ en el sistema obtenemos

$$\mathbf{x}_2' = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

y
$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

De modo que

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4e^{-2t} + 6e^{-2t} \\ 3e^{-2t} - 5e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Entonces, el vector $\mathbf{x}_2$ también satisface el sistema dado.

Sustituyendo $\mathbf{x} = 2\mathbf{x}_1 - 8\mathbf{x}_2$ en el sistema obtenemos

$$\mathbf{x}' = 2\mathbf{x}_1' - 8\mathbf{x}_2' = \mathbf{A}(2\mathbf{x}_1 - 8\mathbf{x}_2) = 2\mathbf{A}\mathbf{x}_1 - 8\mathbf{A}\mathbf{x}_2$$

o $\mathbf{x}_1' = \mathbf{A}\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2' = \mathbf{A}\mathbf{x}_2$, que es verdadera porque tanto $\mathbf{x}_1$ como $\mathbf{x}_2$ son soluciones de la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

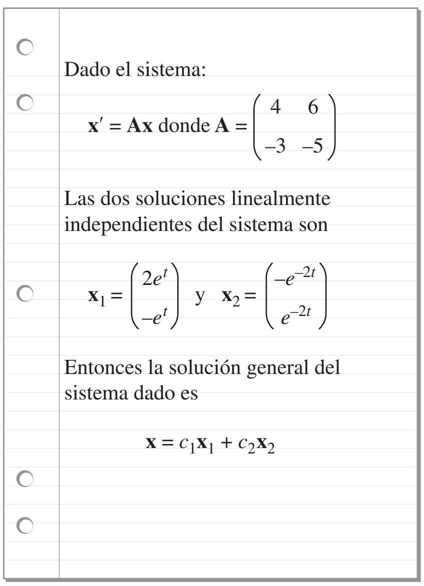


FIGURA 7-35
Un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes tiene dos soluciones cuya combinación lineal forma la solución general del sistema, válida para todas las t.

Nuevamente se advierte al lector que el principio de superposición es aplicable solamente a sistemas lineales homogéneos.

Usted recordará que una ecuación lineal homogénea de orden n tiene n soluciones linealmente independientes en un intervalo en el que sus coeficientes son continuos. Entonces, no sorprenderá que un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas de primer orden tenga n soluciones linealmente independientes, que constituyen un **conjunto fundamental de soluciones**, como se expresa en el siguiente teorema (figura 7-35).

Teorema 7-3 Solución general de sistemas homogéneos

El sistema de n ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$$

siempre tiene n soluciones linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *en un intervalo* $t_1 < t < t_2$ *en el que los elementos de la matriz de coeficientes* $\mathbf{A}$ *son continuos. Además,* *la solución general de este sistema en ese intervalo puede expresarse como una combinación lineal de estas n soluciones en la forma*

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias. Cualquier solución de este sistema en ese intervalo puede obtenerse a partir de la solución general asignando valores adecuados a las constantes arbitrarias.

Este teorema es análogo al teorema 3-4, que se probó en el capítulo 3.

En la sección anterior se comprobó que la independencia lineal de n vectores de solución puede determinarse con la ayuda del wronskiano $W(t)$, que es el determinante de la matriz cuyas columnas son los vectores de solución $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Entonces, el wronskiano de n soluciones puede expresarse como

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & . & . & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & . & . & x_{2n}(t) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & . & . & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \tag{7-58}$$

que es un determinante de $n \times n$. Estas n soluciones son linealmente dependientes en un intervalo si su wronskiano es idénticamente cero en ese intervalo. De no ser así, son linealmente independientes (figura 7-36).

El wronskiano de n soluciones de un sistema dado o es siempre cero o nunca cero en un intervalo en el que los coeficientes de las ecuaciones son continuos, como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 7-4 Teorema de Abel para sistemas

Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son soluciones de un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ en un intervalo $t_1 < t < t_2$ en el que los elementos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ son continuos, entonces el wronskiano de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ siempre es cero (lo cual indica que estas n soluciones son linealmente dependientes) o nunca es cero (lo cual indica que estas n soluciones son linealmente independientes) en ese intervalo.

La comprobación de este teorema, para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se pide al lector ver el problema 7-104C. Este teorema indica que el wronskiano de n soluciones no puede ser igual a cero para algunos valores de t y diferente de cero para otros valores de t en un intervalo en el que todos los coeficientes de las ecuaciones diferenciales del sistema son continuos. Por tanto, al determinar la independencia lineal de n soluciones en un intervalo específico, basta con evaluar el wronskiano de estas soluciones *en cualquier punto conveniente* t_0 en ese intervalo, ya que si el wronskiano es cero en $t = t_0$, también lo es para todas las t en ese intervalo. Del mismo modo, si el wronskiano no es cero en $t = t_0$, entonces tampoco lo es para todas las t en ese intervalo; así, las n soluciones $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes.

Dado el sistema:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \text{ donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Dos de sus soluciones son:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -6e^t \\ 3e^t \end{pmatrix}$$

El wronskiano de estas soluciones:

$$W(t) = |\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2| = \begin{vmatrix} 2e^t & -6e^t \\ -e^t & 3e^t \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, las soluciones son linealmente dependientes.

FIGURA 7-36
Cualesquiera n vectores solución de un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas de primer orden son linealmente dependientes en un intervalo si su wronskiano es idénticamente cero en ese intervalo.

EJEMPLO 7-17 Independencia lineal de las soluciones

Es posible verificar por sustitución directa que los vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son soluciones del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Determine si ambas soluciones son linealmente independientes en el intervalo $-\infty < t < \infty$.

Solución El wronskiano de estos dos vectores de solución es

$$W(t) = |\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2| = \begin{vmatrix} 2e^t & -e^{-2t} \\ -e^t & e^{-2t} \end{vmatrix}$$

Ahora aprovechamos el teorema 7-4 para simplificar los cálculos y evaluar el determinante en un punto conveniente en el intervalo específico. Hacemos $t_0 = 0$ por conveniencia, ya que $e^0 = 1$. Sustituyendo $t = 0$ en el determinante obtenemos

$$W(0) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

que no es cero. Por tanto, estas dos soluciones son linealmente independientes y forman un conjunto fundamental de soluciones para el sistema dado de dos ecuaciones con dos incógnitas. Observe que, de acuerdo con el teorema 7-4, obtendríamos $W(t_0) \neq 0$ sin importar el valor que elijamos para t_0. Esto se verifica dado que $W(t) = 2e^{-t} - e^{-t} = e^{-t} \neq 0$.

EJEMPLO 7-18 Solución general de sistemas lineales

Es posible verificar por sustitución directa que los vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son soluciones del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Determine la solución general de este sistema en el intervalo $-\infty < t < \infty$.

Solución Este es un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con dos incógnitas y, de acuerdo con el teorema 7-3, tiene dos vectores solución linealmente independientes. En el ejemplo anterior se comprobó que los vectores solución dados $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son linealmente independientes en el intervalo específico; por tanto, la solución general del sistema dado en el intervalo específico es

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 = c_1\begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Esta solución también puede expresarse en la forma escalar siguiente

$$x_1 = 2c_1e^t - c_2e^{-2t}$$
$$x_2 = -c_1e^t + c_2e^{-2t}$$

Teoría de sistemas lineales no homogéneos

Ahora consideramos el sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales expresado como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{r}(t) \tag{7-59}$$

donde el vector $\mathbf{r}(t)$ contiene los términos no homogéneos. El primer paso en la resolución de sistemas no homogéneos es obtener la solución homogénea $\mathbf{x}_h$ resolviendo el sistema asociado $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$. El siguiente paso es determinar la solución particular $\mathbf{x}_p$ que corresponde al vector no homogéneo $\mathbf{r}(t)$ aplicando el método de coeficientes indeterminados o el de variación de parámetros. La solución general del sistema no homogéneo se obtiene combinando las soluciones homogénea y particular de acuerdo con el siguiente teorema, que se parece mucho al teorema 4-6 para ecuaciones individuales.

Teorema 7-5 Solución general de sistemas no homogéneos

Si x_p es una solución particular del sistema lineal no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}(t)$$

y $\mathbf{x}_h$ es la solución general de su sistema homogéneo asociado $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ en un intervalo $t_1 < t < t_2$ en el cual los elementos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ y del vector $\mathbf{r}$ son continuos, la solución general de este sistema no homogéneo en ese intervalo es

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p \\ &= c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_p \end{aligned} \tag{7-60}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias y $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son n soluciones linealmente independientes. Cualquier solución de este sistema no homogéneo en ese intervalo puede obtenerse a partir de la solución general asignando valores adecuados a las constantes arbitrarias.

Por tanto, una vez que la solución general del sistema homogéneo asociado está disponible, todo lo que necesitamos hacer es determinar una solución particular $\mathbf{x}_p$ que satisfaga el sistema no homogéneo dado. Entonces, la suma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$ será la solución general del sistema no homogéneo (figura 7-37). Podemos aplicar el principio de superposición a la solución particular si el término no homogéneo $\mathbf{r}(t)$ incluye varios términos, como se muestra en la sección 3-6.

Dado el sistema:

$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Solución homogénea:

$$\mathbf{x}_h = c_1\begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Solución particular:

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} -3t-4 \\ 2t+2 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución general del sistema dado es

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t-4 \\ 2t+2 \end{pmatrix}$$

FIGURA 7-37
La solución general de un sistema no homogéneo se obtiene sumando una solución particular a la solución general del sistema homogéneo asociado.

Repaso de la sección

7-20C Si una función vectorial $\mathbf{x}$ de orden n es una solución de un sistema de n ecuaciones de primer orden con n funciones incógnitas, ¿en qué condiciones un múltiplo constante de $\mathbf{x}$ también es una solución de ese sistema?

7-21C Si dos funciones vectoriales $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ de orden n son soluciones de un sistema de n ecuaciones de primer orden con n funciones incógnitas, ¿en qué condiciones $3\mathbf{x}_1 - 5\mathbf{x}_2$ también es una solución de ese sistema?

7-22C Considere un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes. ¿Cuántos vectores solución puede tener el sistema? ¿Cuántas de estas soluciones pueden ser linealmente independientes?

7-23 Verifique que los siguientes vectores son solución del sistema y determine si los vectores solución son linealmente independientes. Si lo son, obtenga la solución general del sistema dado en $-\infty < t < \infty$.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 18 & 10 \\ -30 & -17 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ -3e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

(*Respuesta:* los vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son soluciones y son linealmente independientes; la solución general es $x_1(t) = 2C_1e^{3t} + C_2e^{-2t}$, $x_2(t) = -3C_1e^{3t} - 2C_2e^{-2t}$.)

7-24 Verifique que el vector solución particular es la solución del siguiente sistema:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 18 & 10 \\ -30 & -17 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_p = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -17 \\ 30 \end{pmatrix}$$

(*Respuesta:* el vector $\mathbf{x}_p$ satisface el sistema dado y es una solución.)

7-5 ■ SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS CON COEFICIENTES CONSTANTES

En el capítulo anterior presentamos el método de eliminación y el de valores característicos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Señalamos que estos métodos son de naturaleza elemental y no son prácticos para sistemas con más de tres ecuaciones. En esta sección introducimos el potente **método matricial** o **método de vectores característicos** para resolver sistemas lineales de ecuaciones, el cual es una extensión del método de valores característicos y se basa en operaciones matriciales y álgebra lineal que repasamos antes en este capítulo.

Considere un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes con n incógnitas expresado como

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{7-61}$$

Este sistema también puede expresarse de manera compacta en forma matricial como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{7-62}$$

donde

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{21} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \tag{7-63}$$

El teorema 7-3 establece que el sistema lineal homogéneo (ecuación 7-63) tiene n vectores de solución linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ cuya combinación lineal resulta en la solución general

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n \tag{7-64}$$

Por tanto, *encontrar la solución general de un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones equivale a determinar sus n vectores solución linealmente independientes* (figura 7-38).

Siguiendo las explicaciones en la sección 7-3 para resolver ecuaciones individuales lineales homogéneas y la explicación en la sección 7-4 para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes, buscamos las soluciones para el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ en la forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ v_n e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{v} e^{\lambda t} \qquad \textbf{(7-65)}$$

donde λ y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son constantes (reales o complejas). Para determinar los valores de λ y el vector constante $\mathbf{v}$, sustituimos la forma supuesta de solución $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ y sus derivadas $\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{v}e^{\lambda t}$ en el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Obtenemos

$$\lambda\, \mathbf{v}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{v}e^{\lambda t}$$

o

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \qquad \textbf{(7-66)}$$

ya que el factor escalar $e^{\lambda t}$ nunca es cero y, por tanto, puede extraerse mediante una división. Así, $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ será una solución del sistema dado si los valores de λ y de los elementos de los vectores constantes $\mathbf{v}$ son tales que la ecuación 7-66 se satisfaga. Observe que la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ transforma el vector $\mathbf{v}$ en un múltiplo constante de sí mismo.

Para determinar los valores de λ y $\mathbf{v}$ que satisfagan la ecuación 7-66, reescribimos esta ecuación en la forma equivalente

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(7-67)}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz de identidad. Pero ésta es exactamente la ecuación que proporciona los vectores característicos de la matriz $\mathbf{A}$ correspondientes a los valores característicos λ_i. Entonces, concluimos lo siguiente (figura 7-39):

> *El vector $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ es una solución del sistema lineal homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, siempre y cuando λ sea un valor característico de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ y $\mathbf{v}$ sea el vector característico asociado con λ.*

Recuerde, de la sección 7-3, que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tiene n valores característicos λ, que son las raíces de la ecuación $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0}$. Algunos de estos valores característicos pueden repetirse mientras otros pueden ser complejos. Los n valores característicos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ siempre pueden encontrarse, aunque no necesariamente con facilidad. Entonces, todo lo que necesitamos para construir la solución general de un sistema dado de n ecuaciones es determinar los n vectores característicos linealmente independientes asociados con estos valores característicos. Si los n valores característicos son reales y distintos, los vectores característicos correspondientes a éstos también son reales y linealmente independientes. Este también es el caso cuando algunos de los valores característicos son complejos pero distintos. La única ocasión en que quizá no podamos obtener n vectores característicos linealmente independientes será cuando algunos de los valores característicos se repitan. En tales casos, posiblemente sea necesario encontrar las demás soluciones linealmente independientes por otros métodos.

Pero antes de explicar la solución de sistemas homogéneos introduciremos el concepto de matriz fundamental $\mathbf{F}$, que es muy útil para determinar las constantes

Dado el sistema:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \text{ donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Las dos soluciones linealmente independientes son:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Entonces la solución general del sistema dado es

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 = c_1\begin{pmatrix} 2e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

FIGURA 7-38
Encontrar la solución general de un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones es equivalente a determinar sus n vectores de solución linealmente independientes.

Dado el sistema:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Forma de las soluciones:

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$$

donde λ y $\mathbf{v}$ se determinan a partir de

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

y

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

FIGURA 7-39
El vector $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$, donde λ es un valor característico de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ y $\mathbf{v}$ es el vector característico asociado con λ, es una solución del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con coeficientes constantes.

Dado el sistema:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \text{ donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Dos soluciones linealmente independientes:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz fundamental del sistema dado es

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & -e^{-2t} \\ -e^t & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

FIGURA 7-40
Matriz fundamental de un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas de primer orden de la matriz cuyas columnas son los n vectores solución linealmente independientes de ese sistema.

arbitrarias $c_1, c_2, ..., c_n$ correspondientes a un conjunto dado de valores iniciales así como la solución particular de sistemas no homogéneos por el método de variación de parámetros.

La matriz de $n \times n$ cuyas columnas son los n vectores solución linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ de un sistema en un intervalo se llama **matriz fundamental** de ese sistema en ese intervalo, y se expresa como (figura 7-40)

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & . & . & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & . & . & x_{2n}(t) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & . & . & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{7-68}$$

Entonces la solución general de un sistema de n ecuaciones puede expresarse como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{c} \tag{7-69}$$

donde

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{7-70}$$

es el vector de constantes arbitrarias. El valor de estas constantes arbitrarias correspondientes a un conjunto de condiciones iniciales $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ puede determinarse aplicando estas condiciones a la ecuación 7-69. Obtenemos

$$\mathbf{F}(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}_0 \tag{7-71}$$

ya que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{F}(t_0)\mathbf{c}$. Multiplicando ambos lados de la ecuación 7-71 desde la izquierda por $\mathbf{F}^{-1}(t_0)$ obtenemos

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 \tag{7-72}$$

ya que $\mathbf{F}^{-1}(t_0)\mathbf{F}(t_0) = \mathbf{I}$ e $\mathbf{Ic} = \mathbf{c}$ (figura 7-41). Entonces, las constantes arbitrarias pueden determinarse encontrando la inversa de la matriz fundamental en el punto específico, y multiplicándola por el vector que contenga los valores iniciales. Observe que la inversa $\mathbf{F}^{-1}(t_0)$ siempre existe, ya que las columnas de $\mathbf{F}(t)$ son vectores linealmente independientes y que cuando $\mathbf{F}^{-1}(t_0)$ está disponible, puede usarse repetidas veces para resolver el sistema dado para varios conjuntos de condiciones iniciales diferentes en el punto t_0.

Una alternativa conveniente del procedimiento que acabamos de describir consiste en despejar $\mathbf{c}$ de la ecuación 7-71 mediante reducción por renglones. Debe considerarse que la solución de sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes es válida en todo el eje real $-\infty < t < \infty$; por tanto, no es necesario hablar del intervalo de la solución.

En seguida explicamos la resolución de sistemas homogéneos con coeficientes constantes para los casos de valores característicos reales y distintos, valores característicos complejos y valores característicos repetidos.

Dado el sistema:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Su solución general en términos de la matriz fundamental:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{c}$$

Condiciones iniciales en

$t = t_0$: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$

Multiplicando por $\mathbf{F}^{-1}(t_0)$ desde la izquierda:

$$\mathbf{F}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 = \underbrace{\mathbf{F}^{-1}(t_0)\mathbf{F}(t_0)}_{\mathbf{I}}\mathbf{c}$$

o

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$$

FIGURA 7-41
Las constantes arbitrarias en la solución general de un sistema lineal homogéneo pueden expresarse en términos de la inversa de la matriz fundamental evaluada en $t = t_0$ y el vector que contiene los valores iniciales.

Caso 1: Valores característicos reales y distintos

Cuando los n valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de la matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ son reales y distintos, entonces los n vectores característicos asociados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$

siempre son reales y linealmente independientes. Por tanto, los vectores solución $\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_ne^{\lambda_n t}$ también son linealmente independientes, y la solución general del sistema dado de n ecuaciones en este caso puede expresarse como (figura 7-42)

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{v}_ne^{\lambda_n t} \tag{7-73}$$

La independencia lineal de los vectores de solución $\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_ne^{\lambda_n t}$ puede verificarse comprobando que su wronskiano nunca es cero en el intervalo de interés.

EJEMPLO 7-19 Sistema homogéneo con valores característicos reales y distintos, y condiciones iniciales arbitrarias

Determine la solución general del sistema:

$$x_1' = 4x_1 + 6x_2$$
$$x_2' = -3x_1 - 5x_2$$

Solución Este es un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes con dos incógnitas, y puede expresarse en forma matricial como $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Primero determinamos los valores característicos de $\mathbf{A}$, que son las raíces de la ecuación característica $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, como

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)(-5-\lambda) + 18 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \end{aligned}$$

cuyas raíces son 1 y -2. Por tanto, los valores característicos de la matriz dada son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$, que son reales y distintos.

Los vectores característicos de la matriz $\mathbf{A}$ se determinan a partir de la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, que en este caso se escribe

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7-74}$$

Para $\lambda = \lambda_1 = 1$, esto da

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es equivalente a la ecuación individual $3v_1 + 6v_2 = 0$. Tomando $v_2 = -1$ obtenemos $v_1 = 2$, y el vector característico correspondiente a $\lambda_1 = 1$ es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = \lambda_2 = -2$, la ecuación 7-74 es ahora

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es equivalente a la ecuación individual $6v_1 + 6v_2 = 0$. Haciendo que $v_1 = -1$, obtenemos $v_2 = 1$, y el vector característico correspondiente a $\lambda_2 = -2$ es

Dado el sistema:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \text{ donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Los valores característicos de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$, que son reales y distintos. Los vectores característicos asociados con λ_1 y λ_2 son

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución general del sistema dado es

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= C_1\,\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t} + C_2\,\mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t} \\ &= C_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} \end{aligned}$$

FIGURA 7-42
Cuando los n valores característicos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ de un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas de primer orden son reales y distintos, la solución general de dicho sistema es simplemente la combinación lineal de los vectores de solución $\mathbf{v}e^{\lambda t}$.

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, dos vectores solución linealmente independientes del sistema dado son

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Ambas soluciones son linealmente independientes, ya que su wronskiano es

$$\mathbf{W}(t) = |\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2| = \begin{vmatrix} 2e^t & -e^{-2t} \\ -e^t & e^{-2t} \end{vmatrix} = -e^{-t}$$

que nunca es cero. Por tanto, los vectores solución $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ forman un conjunto fundamental de soluciones, y la solución general del sistema dado es

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} 2c_1e^t - c_2e^{-2t} \\ -c_1e^t + c_2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

La solución también puede expresarse en forma escalar (no vectorial) como

$$x_1 = 2c_1e^t - c_2e^{-2t}$$

$$x_2 = -c_1e^t + c_2e^{-2t}$$

La validez de estas soluciones pueden verificarse sustituyéndolas en el sistema dado de ecuaciones y comprobando que satisfacen cada ecuación del sistema.

EJEMPLO 7-20 Sistema homogéneo con valores característicos reales y distintos, y condiciones iniciales específicas

Determine la solución general del sistema de problemas de valor inicial:

$$x_1' = 4x_1 + 6x_2,\ x_1(0) = 1$$

$$x_2' = -3x_1 - 5x_2,\ x_2(0) = 0$$

Solución La solución general de este sistema de ecuaciones diferenciales se determinó en el ejemplo anterior como

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz fundamental del sistema de ecuaciones dado es

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & -e^{-2t} \\ -e^t & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Las constantes arbitrarias pueden determinarse a partir de $\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$ (ecuación 7-72), donde

$$\mathbf{F}(t_0) = \mathbf{F}(0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La inversa de esta matriz de 2×2 es

$$\mathbf{F}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación 7-72, obtenemos

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{F}^{-1}(0)\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, y la solución de este sistema de problemas de valor inicial es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t}$$

Esta solución también puede expresarse en forma escalar (no vectorial) como

$$x_1 = 2e^{t} - e^{-2t}$$

$$x_2 = -e^{t} + e^{-2t}$$

Para sistemas pequeños como este, el valor de las constantes arbitrarias c_1 y c_2 puede determinarse aplicando las condiciones iniciales directamente a la solución general. El propósito de este ejemplo fue comprobar el procedimiento general para determinar las constantes correspondientes a un conjunto de condiciones iniciales usando el método de la matriz fundamental.

Caso 2: Valores característicos complejos

Hemos visto que el método matricial proporciona n soluciones independientes directamente cuando los valores característicos son reales y distintos. Este también es el caso cuando algunos de los valores característicos o todos ellos son complejos, siempre y cuando sean distintos. Normalmente, los vectores característicos (y los vectores solución) correspondientes a valores característicos complejos son valores complejos. Pero si la matriz de coeficientes **A** es real, entonces todos los coeficientes del polinomio característico serán reales, y cualesquiera valores característicos complejos y sus correspondientes vectores característicos deben aparecer en pares complejos conjugados. En tales casos, siempre podemos obtener dos vectores solución reales linealmente independientes correspondientes a un par de valores característicos complejos conjugados.

Si $\mathbf{v} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ es el vector característico correspondiente al valor característico $\lambda = \alpha + i\beta$ donde **a**, **b**, α y β son reales, entonces la solución correspondiente a este valor característico puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{v}e^{\lambda t} \\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{(\alpha+i\beta)t} \\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\,\mathrm{sen}\,\beta t) \\ &= e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\,\mathrm{sen}\,\beta t) + ie^{\alpha t}(\mathbf{a}\,\mathrm{sen}\,\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t) \\ &= \mathbf{x}_1(t) + i\mathbf{x}_2(t) \end{aligned} \tag{7-75}$$

donde $$\mathbf{x}_1(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\,\mathrm{sen}\,\beta t) \tag{7-76a}$$

y $$\mathbf{x}_2(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\,\mathrm{sen}\,\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t) \tag{7-76b}$$

que son dos soluciones vectoriales de valor real (figura 7-43). Es posible comprobar que estas dos soluciones son linealmente independientes, y que obtendríamos el mismo par de soluciones correspondientes al valor característico complejo conjugado $\lambda = \alpha - i\beta$. Por tanto, podemos determinar dos soluciones de valor real linealmente independientes correspondientes a un par complejo conjugado traba-

Dado el sistema:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Un par de valores característicos complejos conjugados de **A**:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta$$

$$\lambda_2 = \alpha - i\beta$$

Vectores característicos correspondientes:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$$

Dos soluciones linealmente independientes correspondientes a estos:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\,\mathrm{sen}\,\beta t)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\,\mathrm{sen}\,\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t)$$

FIGURA 7-43
Determinación de dos vectores de valor real, linealmente independientes, de un sistema que corresponde a un par de valores característicos complejos conjugados de la matriz de coeficientes.

jando con uno de los valores característicos complejos y su vector característico correspondiente, e ignorando sus complejos conjugados. Una vez que conocemos el valor característico complejo λ y su correspondiente vector característico $\mathbf{v}$, es más práctico manipular la solución $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$, como se mostró antes, y tomar la parte real y la imaginaria de la solución como dos soluciones de valor real linealmente independientes, en vez de memorizar las ecuaciones 7-76.

EJEMPLO 7-21 Sistema homogéneo con valores característicos complejos

Determine la solución general del sistema

$$x_1' = x_1 + 2x_2$$
$$x_2' = -x_1 + x_2$$

Solución Este es un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes con dos incógnitas, y puede expresarse en forma matricial como $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Los valores característicos de $\mathbf{A}$ se determinaron en el ejemplo 7-15 como $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i$, los cuales son complejos conjugados entre sí. El vector característico correspondiente a $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}i$ también se determinó en el ejemplo como

$$\mathbf{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Entonces, la solución correspondiente a λ_1 puede expresarse como (figura 7-44)

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{(1+i\sqrt{2})t} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^t(\cos\sqrt{2}t + i\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t) \\
&= \begin{pmatrix} e^t\cos\sqrt{2}t + ie^t\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t \\ \dfrac{i}{\sqrt{2}}e^t\cos\sqrt{2}t - \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^t\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^t\cos\sqrt{2}t \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^t\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^t\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^t\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por tanto, dos soluciones linealmente independientes son

$$\mathbf{x}_1(t) = Re(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} e^t\cos\sqrt{2}t \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^t\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{x}_2(t) = Im(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} e^t\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^t\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}$$

Dado el sistema:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \text{ donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores característicos de $\mathbf{A}$:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}i$$
$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}i$$

Vectores característicos correspondientes:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Vector solución:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \\
&= \begin{pmatrix} e^t\cos\sqrt{2}t \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^t\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^t\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^t\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dos soluciones linealmente independientes:

$$\mathbf{x}_1(t) = Re(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} e^t\cos\sqrt{2}t \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^t\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2(t) = Im(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} e^t\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^t\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}$$

FIGURA 7-44
Dos soluciones linealmente independientes correspondientes a un par de valores característicos complejos conjugados pueden determinarse tratando con uno solo de los valores característicos y su vector característico correspondiente, e ignorando sus conjugados.

Entonces la solución general puede expresarse como

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) = c_1\begin{pmatrix} e^t \cos\sqrt{2}t \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^t \operatorname{sen}\sqrt{2}t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^t \operatorname{sen}\sqrt{2}t \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^t \cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}$$

La solución también puede expresarse en forma escalar como

$$x_1(t) = e^t(c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}t)$$
$$x_2(t) = e^t\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}c_1 \operatorname{sen}\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 \cos\sqrt{2}t\right)$$

La validez de estas soluciones puede verificarse sustituyéndolas en el sistema de ecuaciones dado y comprobando que satisfacen cada ecuación del sistema.

EJEMPLO 7-22 Sistemas mecánicos acoplados: Vibraciones libres

Considere un sistema resorte-masa que consiste en dos masas $m_1 = 1$ y $m_2 = 1$, y dos resortes lineales cuyas constantes de resorte son $k_1 = 3$ y $k_2 = 2$, en las unidades adecuadas, conectados como se muestra en la figura 7-45. En $t = 0$, se tira de la primera masa hasta una ubicación $x_1(0) = 1$, y de la segunda masa hasta una ubicación $x_2(0) = 5$, en relación con sus posiciones de equilibrio. Se sueltan ambas masas con velocidades cero.

Representando como $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las posiciones de las dos masas en cualquier tiempo t con relación a sus posiciones de equilibrio (las posiciones que toman cuando no se aplica ninguna fuerza externa) y despreciando cualquier fricción, determine la posición de cada masa con relación a sus respectivas posiciones de equilibrio, en función del tiempo.

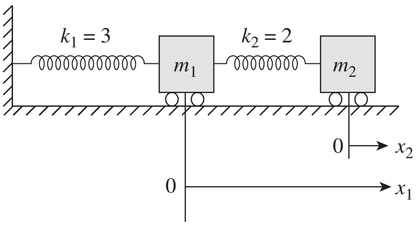


FIGURA 7-45
Sistema acoplado resorte-masa descrito en el ejemplo 7-22.

Solución Las ecuaciones rectoras para este sistema mecánico acoplado se obtuvieron en el ejemplo 6-4 bajo la influencia de fuerzas externas. En nuestro caso, no hay fuerzas externas; entonces, las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de cada masa en este caso (partiendo de las ecuaciones 6-14) son

$$x_1'' = -\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2, \quad x_1(0) = x_{01}, \quad x_1'(0) = v_{01}$$

$$x_2'' = \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2, \quad x_2(0) = x_{02}, \quad x_2'(0) = v_{02}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con dos funciones incógnitas con condiciones iniciales específicas. Lo primero que necesitamos hacer es reducir este sistema a un sistema de ecuaciones de primer orden definiendo dos nuevas variables como $x_3 = x_1'$ y $x_4 = x_2'$. Con estas definiciones, el sistema puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_3, & x_1(0) &= x_{01}\\
x_2' &= x_4, & x_2(0) &= x_{02}\\
x_3' &= -\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1}\right)x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2, & x_3(0) &= x_1'(0) = v_{01}\\
x_4' &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2, & x_4(0) &= x_2'(0) = v_{02}
\end{aligned}$$

Observe que, físicamente, x_3 y x_4 representan las respectivas velocidades de las masas m_1 y m_2.

Ahora simplificamos el sistema sustituyendo $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$ y $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 5$ y $v_{01} = v_{02} = 0$, lo cual nos da

$$\begin{aligned} x_1' &= x_3, & x_1(0) &= 1 \\ x_2' &= x_4, & x_2(0) &= 5 \\ x_3' &= -5x_1 + 2x_2, & x_3(0) &= x_1'(0) = 0 \\ x_4' &= 2x_1 - 2x_2, & x_4(0) &= x_2'(0) = 0 \end{aligned}$$

Este sistema puede expresarse en forma matricial como $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Los valores característicos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ se determinan por $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ como

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -\lambda(-\lambda^3 - 2\lambda) + (10 - 4 + 5\lambda^2) \\ &= \lambda^4 + 7\lambda^2 + 6 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 6) = 0 \end{aligned}$$

cuyas raíces son $\pm i$ y $\pm\sqrt{6}i$. Por tanto, los valores característicos de la matriz de coeficientes son $\lambda_{1,2} = \pm i$ y $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{6}i$, que son dos pares de números complejos conjugados. Necesitamos determinar solo dos vectores característicos en este caso usando $\lambda_1 = i$ y $\lambda_3 = \sqrt{6}i$, ya que los vectores característicos correspondientes a los valores característicos complejos conjugados son simplemente los complejos conjugados de los vectores característicos determinados. Además, los dos vectores característicos bastan para determinar cuatro vectores solución linealmente independientes para el sistema dado.

El vector característico correspondiente al primer valor característico $\lambda_1 = i$ se determina por la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, que en este caso resulta

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -i & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema se reduce, por operaciones con renglones, a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5i \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} v_1 + 0.5iv_4 &= 0 \\ v_2 + iv_4 &= 0 \\ v_3 - 0.5v_4 &= 0 \end{aligned}$$

Haciendo $v_4 = 2$, obtenemos $v_3 = 1$, $v_2 = -2i$ y $v_1 = -i$. Por tanto, el vector característico correspondiente al valor característico $\lambda_1 = i$ es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ -2i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El vector característico correspondiente al valor característico $\lambda_3 = \sqrt{6}i$ se determina de la misma manera como

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3}i \\ -\frac{\sqrt{6}}{6}i \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución correspondiente a $\lambda_1 = i$ puede expresarse en la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} -i \\ -2i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} -i \\ -2i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} (\cos t + i \operatorname{sen} t)$$

$$= \begin{pmatrix} -i \cos t + \operatorname{sen} t \\ -2i \cos t + 2 \operatorname{sen} t \\ \cos t + i \operatorname{sen} t \\ 2 \cos t + 2i \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ 2 \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\cos t \\ -2 \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ 2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Entonces, los dos vectores solución linealmente independientes son

$$\mathbf{x}_1(t) = Re(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ 2 \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = Im(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -2 \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ 2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Los otros dos vectores solución linealmente independientes se determinan de manera similar, usando $\lambda_3 = \sqrt{6}i$ y el vector característico $\mathbf{v}_2$ como

$$\mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{6}}{3} \operatorname{sen}\sqrt{6}t \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \operatorname{sen}\sqrt{6}t \\ -2 \cos \sqrt{6}t \\ \cos \sqrt{6}t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_4(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \sqrt{6}t \\ \frac{-\sqrt{6}}{6} \cos \sqrt{6}t \\ -2 \operatorname{sen}\sqrt{6}t \\ \operatorname{sen}\sqrt{6}t \end{pmatrix}$$

Entonces, la solución general del sistema dado puede expresarse como

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + c_3\mathbf{x}_3(t) + c_4\mathbf{x}_4(t)$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ 2 \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ -2 \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ 2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{6}}{3} \operatorname{sen}\sqrt{6}t \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \operatorname{sen}\sqrt{6}t \\ -2 \cos \sqrt{6}t \\ \cos \sqrt{6}t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \sqrt{6}t \\ \frac{-\sqrt{6}}{6} \cos \sqrt{6}t \\ -2 \operatorname{sen}\sqrt{6}t \\ \operatorname{sen}\sqrt{6}t \end{pmatrix}$$

La solución también puede expresarse en la siguiente forma escalar (no vectorial)

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= c_1 \operatorname{sen} t - c_2 \cos t - \frac{\sqrt{6}}{3} c_3 \operatorname{sen}\sqrt{6}t + \frac{\sqrt{6}}{3} c_4 \cos\sqrt{6}t \\
x_2(t) &= 2\,c_1 \operatorname{sen} t - 2\,c_2 \cos t + \frac{\sqrt{6}}{6} c_3 \operatorname{sen}\sqrt{6}t - \frac{\sqrt{6}}{6} c_4 \cos\sqrt{6}t \\
x_3(t) &= c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - 2\,c_3 \cos\sqrt{6}t + c_4 \operatorname{sen}\sqrt{6}t \\
x_4(t) &= 2\,c_1 \cos t + 2\,c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos\sqrt{6}t + c_4 \operatorname{sen}\sqrt{6}t
\end{aligned}$$

Aplicando las cuatro condiciones iniciales, obtenemos las siguientes cuatro ecuaciones para determinar las constantes arbitrarias, después de observar que $x_3(0) = x_4(0) = 0$:

$$\begin{aligned}
-c_2 + \frac{\sqrt{6}}{3} c_4 &= 1 \\
-2c_2 - \frac{\sqrt{6}}{6} c_4 &= 5 \\
c_1 - 2c_3 &= 0 \\
2c_1 + c_3 &= 0
\end{aligned}$$

Las primeras dos ecuaciones dan $c_2 = -11/5$ y $c_4 = -3\sqrt{6}/5$, mientras que las dos últimas simplemente dan $c_1 = c_3 = 0$. Sustituyendo en las soluciones generales de x_1 y x_2 obtenemos los movimientos de las dos masas como

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{11}{5} \cos t - \frac{6}{5} \cos\sqrt{6}t \\
x_2(t) &= \frac{22}{5} \cos t + \frac{3}{5} \cos\sqrt{6}t
\end{aligned}$$

Observe que el movimiento de ambas masas es la superposición de dos modos de oscilación con frecuencias naturales de $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = \sqrt{6}$. En el primer modo ($\omega_1 = 1$), las dos masas se mueven en sincronía en la misma dirección en la misma frecuencia, pero con diferentes amplitudes. La amplitud del movimiento de m_1 es la mitad de la de m_2 en el primer modo. En el segundo modo ($\omega_2 = \sqrt{6}$), las masas se mueven en direcciones opuestas. La amplitud de m_1 es dos veces la de m_2.

Caso 3: Valores característicos repetidos

Ahora consideramos un valor característico λ de multiplicidad k, que tiene una raíz repetida k veces de la ecuación característica del sistema. Tal valor característico puede tener k vectores característicos $\mathbf{v}$ linealmente independientes asociados a él, por tanto, la solución son vectores k linealmente independientes. Este siempre es el caso con los sistemas de ecuaciones cuya matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es *simétrica*, y un valor característico repetido no causa ningún problema en tales casos. Cuando un valor característico de multiplicidad k tiene *menos* de k vectores característicos linealmente independientes asociados con éste, hay *menos* de k vectores de solución linealmente independientes de la forma $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ asociados con el valor característico. Esto significa que algunas de las soluciones asociadas con el valor característico *no* son de la forma $\mathbf{v}e^{\lambda t}$, y debemos buscar soluciones en otras formas para compensar el déficit en el número de soluciones linealmente independientes asociadas con λ.

Usted recordará, de los capítulos 3 y 4, que las soluciones linealmente independientes correspondientes a una raíz característica repetida λ de una sola ecuación diferencial se obtienen multiplicando la solución $e^{\lambda t}$ por las potencias de la variable independiente. Por ejemplo, tres soluciones linealmente independientes asociadas con la raíz característica triple λ son $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$ y $t^2e^{\lambda t}$. La estrecha analogía entre una ecuación lineal de orden n y un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden nos sugiere buscar vectores de solución adicionales de la misma manera, multiplicando la solución $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ por las potencias de la variable independiente. Pero, como aquí se explica, esto resulta inadecuado para sistemas de ecuaciones, y se hace necesario multiplicar la solución básica por *polinomios* de t en vez de *potencias* de t para obtener otras soluciones linealmente independientes asociadas con el valor característico repetido λ (figura 7-46).

Considere el valor característico λ de multiplicidad dos ($k = 2$), que tiene solo un vector característico linealmente independiente $\mathbf{v}$ asociado. Necesitamos encontrar dos vectores de solución linealmente independientes correspondientes a λ. Una de estas soluciones es

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t} \tag{7-77}$$

De acuerdo con esta explicación, elegimos la segunda solución de la forma

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{v}te^{\lambda t} + \mathbf{u}e^{\lambda t} \tag{7-78}$$

donde $\mathbf{u}$ es un vector constante que se determina a partir del requisito de que $\mathbf{x}_2$ satisfaga la ecuación diferencial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Sustituyendo la ecuación (7-78) en $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, obtenemos

$$\mathbf{v}e^{\lambda t} + \lambda\mathbf{v}te^{\lambda t} + \lambda\mathbf{u}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{v}te^{\lambda t} + \mathbf{A}\mathbf{u}e^{\lambda t} \tag{7-79}$$

Igualando los coeficientes de $e^{\lambda t}$ y $te^{\lambda t}$ obtenemos

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{7-80a}$$

y

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{v} \tag{7-80b}$$

La primera de estas ecuaciones simplemente confirma que $\mathbf{v}$ es un vector característico asociado con λ. De la segunda ecuación siempre es posible despejar el vector constante desconocido $\mathbf{u}$.

La diferencia entre el tratamiento de la segunda solución asociada con una raíz característica repetida λ para una sola ecuación de segundo orden y un sistema de dos ecuaciones de primer orden puede explicarse así:

Para una sola ecuación, un múltiplo constante de la primera solución $e^{\lambda t}$ fundamentalmente no es nada diferente de $e^{\lambda t}$, y no hay necesidad de incluirlo en la segunda solución. Es decir, las soluciones $x = c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t}$ y

$$x = c_1e^{\lambda t} + (c_2te^{\lambda t} + c_3e^{\lambda t}) = (c_1 + c_3)e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t}$$

son equivalentes, ya que la suma de dos constantes arbitrarias sigue siendo una constante arbitraria.

Pero para un sistema de dos ecuaciones de primer orden, la solución $\mathbf{u}e^{\lambda t}$ no es necesariamente un múltiplo constante de la primera solución $\mathbf{v}e^{\lambda t}$, ya que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores. Por ejemplo, la solución

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \tag{7-81}$$

Dos soluciones linealmente independientes correspondientes a una raíz característica (un valor característico) doble λ con solo un vector característico linealmente independiente asociado:

1. Una sola ecuación:

$$x_1 = e^{\lambda t}$$
$$x_2 = te^{\lambda t}$$

Potencia de t

2. Sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}e^{\lambda t}$$
$$\mathbf{x}_2 = \underbrace{(\mathbf{v}t + \mathbf{u})}_{\text{Polinomio de } t}te^{\lambda t}$$

FIGURA 7-46
Cuando solo hay un vector característico linealmente independiente $\mathbf{v}$ asociado con un valor característico λ de multiplicidad k, las demás $k - 1$ soluciones linealmente independientes asociadas con λ se obtienen multiplicando la solución básica $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ por polinomios de $\mathbf{v}$ con coeficientes vectoriales constantes.

1. Dos escalares:

$a = 2$
$b = 8$

($b = ka$ donde $k = 4$)

2. Dos vectores:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

($\mathbf{b} \neq k\mathbf{a}$)

FIGURA 7-47
Dos *escalares* constantes siempre son un múltiplo constante uno de otro, pero este no es el caso para dos *vectores* constantes.

no puede obtenerse multiplicando la solución

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \qquad \textbf{(7-82)}$$

por una constante. De hecho, $\mathbf{x}_2(t)$ puede no ser siquiera una solución aun cuando $\mathbf{x}_1(t)$ lo sea. Esto contrasta con las ecuaciones individuales lineales homogéneas, en las que si $2e^{\lambda t}$ es una solución, $3e^{\lambda}$ o $-5e^{\lambda t}$ también lo son. Entonces, la diferencia estriba en el hecho de que dos escalares constantes son siempre un múltiplo constante uno de otro, pero dos vectores constantes no son necesariamente un múltiplo constante entre ellos (figura 7-47). Esto se ilustra con ejemplos.

EJEMPLO 7-23 Sistema homogéneo con valores característicos repetidos (dobles)

Determine la solución general del sistema:

$$x_1' = 4x_1 + x_2$$
$$x_2' = -x_1 + 2x_2$$

Solución Este es un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes con dos incógnitas, y puede expresarse en la forma matricial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Los valores característicos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ se determinaron en el ejemplo 7-13 como $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Es decir, el sistema tiene un solo valor característico de multiplicidad 2. También se determinó que solo hay un vector característico linealmente independiente asociado con este valor característico, el cual fue

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, una solución del sistema dado es

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

La segunda solución linealmente independiente se toma como (ecuación 7-78)

$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}t)e^{\lambda t}$$

donde el vector constante $\mathbf{u}$ se determina por la ecuación 7-80

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

Sustituyendo, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que es equivalente a la ecuación individual

$$u_1 + u_2 = -1$$

Esta es una ecuación no homogénea. Entonces, podemos decidir que una de las incógnitas sea cero y todavía obtener una solución no trivial. Haciendo $u_1 = 0$ obtenemos $u_2 = -1$, y

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Entonces la segunda solución linealmente independiente resulta

$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}t)e^{\lambda t} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t\right] e^{3t} = \begin{pmatrix} -t \\ -1 + t \end{pmatrix} e^{3t}$$

Es posible comprobar que el wronskiano de $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ no es cero y, por tanto, ambas soluciones son linealmente independientes. De manera que las soluciones $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ forman un conjunto fundamental de soluciones, y la solución general del sistema dado es

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2\begin{pmatrix} -t \\ t - 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$= \begin{pmatrix} -c_1 - c_2t \\ c_1 + c_2(t - 1) \end{pmatrix} e^{3t}$$

La solución también puede expresarse en la siguiente forma escalar (no vectorial):

$$x_1(t) = -(c_1 + c_2t)e^{3t}$$

$$x_2(t) = [c_1 + c_2(t - 1)]e^{3t}$$

La validez de estas soluciones puede verificarse sustituyéndolas en el sistema de ecuaciones dado, y comprobando que satisfacen cada una de las ecuaciones del sistema.

Discusión

Veamos lo que sucede si decidimos que la segunda solución linealmente independiente sea de la forma

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{u}\, te^{\lambda t}$$

donde $\mathbf{u}$ es nuevamente un vector constante que está por determinarse. Sustituyendo en la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, obtenemos

$$\mathbf{u}e^{\lambda t} + \lambda\, \mathbf{u}te^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{u}te^{\lambda t}$$

Igualando los coeficientes de $e^{\lambda t}$ y $te^{\lambda t}$ en ambos lados obtenemos $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = 0$, lo cual requiere que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Entonces concluimos que no podemos tener una solución no trivial de la forma $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{u}te^{\lambda t}$, y debemos considerar que la segunda solución linealmente independiente sea de la forma $\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}t)^{\lambda t}$.

La situación se complica aún más al aumentar el grado de multiplicidad. Por ejemplo, hay tres posibilidades asociadas con un valor característico λ con multiplicidad tres: 1) hay tres vectores característicos linealmente independientes asociados con λ, y por tanto tres soluciones linealmente independientes; 2) hay dos vectores característicos linealmente independientes asociados con λ, y por tanto necesitamos encontrar una solución linealmente independiente adicional, y 3) hay un solo vector característico linealmente asociado con λ, y por tanto necesitamos encontrar dos soluciones linealmente independientes adicionales. Cada caso necesita tratarse en forma diferente, y no hay ningún procedimiento general para manejar valores característicos con una multiplicidad de 3.

Caso 3*a* *El valor característico triple λ tiene tres vectores característicos linealmente independientes $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ asociados con λ.* En este caso, las tres soluciones linealmente independientes son simplemente (figura 7-48)

Dado el sistema: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Si λ es un valor característico triple de $\mathbf{A}$, tres soluciones linealmente independientes correspondientes a este valor característico son las siguientes:

Caso 1: Hay tres vectores característicos linealmente independientes asociados a λ.

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1e^{\lambda t}$

$\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2e^{\lambda t}$

$\mathbf{x}_3 = \mathbf{v}_3e^{\lambda t}$

Caso 2: Hay dos vectores característicos linealmente independientes asociados a λ.

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1e^{\lambda t}$

$\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2e^{\lambda t}$

$\mathbf{x}_3 = \mathbf{v}te^{\lambda t} + \mathbf{u}e^{\lambda t}$

(**v** y **u** por determinarse)

Caso 3: Hay sólo un vector característico linealmente independiente asociado a λ.

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1e^{\lambda t}$

$\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}te^{\lambda t} + \mathbf{u}e^{\lambda t}$

$\mathbf{x}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{v}t^2e^{\lambda t} + \mathbf{u}te^{\lambda t} + \mathbf{w}e^{\lambda t}$

(**v**, **u** y **w** por determinarse)

FIGURA 7-48
Determinación de tres soluciones linealmente independientes de un sistema asociado con un triple valor característico λ de la matriz de coeficientes para tres casos diferentes.

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda t} \quad \textbf{(7-83a)}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 e^{\lambda t} \quad \textbf{(7-83b)}$$

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{v}_3 e^{\lambda t} \quad \textbf{(7-83c)}$$

Caso 3*b* *El valor característico triple λ tiene dos vectores característicos linealmente independientes* $\mathbf{v}_1$ *y* $\mathbf{v}_2$ *asociados con* λ. En este caso, las dos primeras soluciones linealmente independientes son

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda t} \quad \textbf{(7-84a)}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 e^{\lambda t} \quad \textbf{(7-84b)}$$

y la tercera solución linealmente independiente se determina por

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{v} t e^{\lambda t} + \mathbf{u} e^{\lambda t} \quad \textbf{(7-85)}$$

Nuevamente, el vector constante **u** se determina por la ecuación 7-80*b*,

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

Tal vez se pregunte si debe usar $\mathbf{v}_1$ o $\mathbf{v}_2$ para **v** en esta relación buscando obtener una solución no trivial para **u**. En general, ninguna de estas opciones funcionará y debemos usar su combinación lineal $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$ para **v**. Entonces, la ecuación para determinar **u** puede expresarse como

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 \quad \textbf{(7-86)}$$

donde las constantes k_1 y k_2 deben elegirse de manera que esta ecuación tenga una solución no trivial para **u**. Una vez que los vectores constantes **v** y **u** están disponibles, la tercera solución linealmente independiente puede obtenerse por la ecuación 7-85.

Caso 3*c* *El triple valor característico tiene solo un vector característico linealmente independiente* **v** *asociado.* En este caso, la primera solución linealmente independiente es

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v} e^{\lambda t} \quad \textbf{(7-87)}$$

y las otras dos soluciones linealmente independientes se determinan por

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{v} t e^{\lambda t} + \mathbf{u} e^{\lambda t} \quad \textbf{(7-88a)}$$

$$\mathbf{x}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{v} t^2 e^{\lambda t} + \mathbf{u} t e^{\lambda t} + \mathbf{w} e^{\lambda t} \quad \textbf{(7-88b)}$$

donde los vectores constantes **u** y **w** se determinan por

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{y} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{u} \quad \textbf{(7-89)}$$

Observe que la segunda solución se obtiene del mismo modo en que se determina en el caso del valor característico doble.

Las soluciones correspondientes al triple valor característico λ obtenidas como acabamos de describir son linealmente independientes para los tres casos. Esto siempre puede verificarse determinando el wronskiano de las soluciones.

Los procedimientos que se acaban de describir para valores característicos triples pueden extenderse para valores característicos con una multiplicidad de cuatro o mayor, pero el procedimiento es muy tedioso. Es posible resolver sistemas lineales con cualquier número de valores característicos repetidos de manera sistemática; sin embargo, el uso de tales métodos exige cierto nivel de sofisticación en álgebra lineal. Por tanto, limitaremos nuestra consideración de sistemas lineales a aquellos que no tengan valores característicos con multiplicidad mayor de tres.

EJEMPLO 7-24 Sistemas homogéneos con valores característicos repetidos (triples)

Determine la solución general del sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + x_2 \\ x_2' &= 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_3' &= 2x_2 + 3x_3 \end{aligned}$$

Solución Este es un sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes con tres incógnitas, y puede expresarse en la siguiente forma matricial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Los valores característicos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ se determinan por $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ como

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (3-\lambda)^3 + 2(3-\lambda) - 2(3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)^3 = 0 \end{aligned}$$

cuyas raíces son 3, 3 y 3. Por tanto, la matriz de coeficientes tiene un valor característico $\lambda = 3$ con una multiplicidad de tres.

El vector característico correspondiente a este valor característico se determina por la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, que en este caso se vuelve

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por multiplicación de matrices, podemos demostrar que esta ecuación es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} v_2 &= 0 \\ 2v_1 - v_3 &= 0 \\ 2v_2 &= 0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} v_2 &= 0 \\ v_3 &= 2v_1 \end{aligned}$$

Haciendo $v_1 = 1$ por simplicidad, obtenemos $v_3 = 2$ por la última ecuación. Por tanto, un vector característico correspondiente al valor característico triple $\lambda = 3$ es

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Este es el único vector característico linealmente independiente asociado con el valor característico $\lambda = 3$, ya que escoger otro valor para v_1 simplemente dará un vector que es múltiplo constante de $\mathbf{v}$. Por tanto, este es un caso especial del caso 3, y las tres soluciones linealmente independientes del sistema dado se determinarán por las ecuaciones 7-87 y 7-88. Pero primero necesitamos determinar los vectores constantes $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ por la ecuación 7-89.

Sustituyendo el vector característico $\mathbf{v}$ en la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{v}$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por multiplicación de matrices, podemos demostrar que esta ecuación es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} u_2 &= 1 \\ 2u_1 - u_3 &= 0 \\ 2u_2 &= 2 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} u_2 &= 1 \\ u_3 &= 2u_1 \end{aligned}$$

Haciendo $u_1 = 1$ por simplicidad, obtenemos $u_3 = 2$ por la última ecuación. Por tanto, el vector $\mathbf{u}$ es

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo ahora el vector $\mathbf{u}$ en la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{u}$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, haciendo la multiplicación del lado izquierdo, obtenemos

$$\begin{aligned} w_2 &= 1 \\ 2w_1 - w_3 &= 1 \\ 2w_2 &= 2 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} w_2 &= 1 \\ 2w_1 - w_3 &= 1 \end{aligned}$$

Haciendo $w_1 = 1$ por simplicidad, la última ecuación da $w_3 = 1$. Por tanto, el vector $\mathbf{w}$ es

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces las tres soluciones linealmente independientes del sistema dado se determinan por las ecuaciones 7-87 y 7-88 como

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}te^{\lambda t} + \mathbf{u}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} te^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} t + 1 \\ 1 \\ 2t + 2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\mathbf{x}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{v}t^2e^{\lambda t} + \mathbf{u}te^{\lambda t} + \mathbf{w}e^{\lambda t} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}t^2e^{3t} + \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}te^{3t} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{3t}$$

$$= \begin{pmatrix}0.5t^2 + t + 1\\ t + 1\\ t^2 + 2t + 1\end{pmatrix}e^{3t}$$

Es posible comprobar que el wronskiano de $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ no es cero, por lo cual estas tres soluciones son linealmente independientes. Por tanto, las soluciones $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ forman un conjunto fundamental de soluciones, y la solución general del sistema dado es

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3$$

$$= c_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}t+1\\1\\2t+2\end{pmatrix}e^{3t} + c_3\begin{pmatrix}0.5t^2 + t + 1\\ t + 1\\ t^2 + 2t + 1\end{pmatrix}e^{3t}$$

La solución también puede expresarse en la siguiente forma escalar (no vectorial):

$$x_1 = [c_1 + c_2(t + 1) + c_3(0.5t^2 + t + 1)]e^{3t}$$

$$x_2 = [c_2 + c_3(t + 1)]e^{3t}$$

$$x_3 = [2c_1 + 2c_2(t + 1) + c_3(t^2 + 2t + 1)]e^{3t}$$

La validez de estas soluciones puede verificarse sustituyéndolas en el sistema de ecuaciones dado, y comprobando que satisfacen cada ecuación del sistema.

Repaso de la sección

7-25 ¿En qué condiciones el vector $\mathbf{u}e^{kt}$ es una solución de un sistema lineal homogéneo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ con coeficientes constantes?

7-26 Considere un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes expresado como $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. ¿Cuántos vectores solución linealmente independientes incluirá la solución general de este sistema? ¿Cuántas constantes arbitrarias tendrá? ¿Para cuántos valores de la variable independiente t es válida la solución general?

7-27 Considere un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes expresado como $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. ¿Cómo expresaría usted la solución general de este sistema si la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ tiene n valores característicos reales y distintos?

7-28 Usando el método matricial, determine la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}$$

(*Respuesta:* $\mathbf{x} = C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2 = C_1\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}\\ 1\end{pmatrix}e^{(2+\sqrt{2})t} + C_2\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\\ 1\end{pmatrix}e^{(2-\sqrt{2})t}$.)

7-29 Usando el método matricial, determine la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales específicas:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(*Respuesta:* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos 2\sqrt{6}t \\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}e^t \operatorname{sen} 2\sqrt{6}t \end{pmatrix}$.)

7-6 ▪ SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS

Consideremos ahora el sistema no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{r}(t) \tag{7-90}$$

donde todos los elementos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}(t)$ y el vector no homogéneo $\mathbf{r}(t)$ son continuos en un intervalo $t_1 < t < t_2$. En forma análoga a las ecuaciones individuales no homogéneas, la solución general de este sistema no homogéneo se expresa como (ver teorema 7-5)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p \tag{7-91}$$

donde $\mathbf{x}_h$ es la solución general del sistema homogéneo asociado $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, y $\mathbf{x}_p$ es la solución particular del sistema no homogéneo dado.

En la sección anterior aprendimos a obtener la solución homogénea $\mathbf{x}_h$. En esta sección aprenderemos a determinar la solución particular $\mathbf{x}_p$. El método de *coeficientes indeterminados* y el método de *variación de parámetros*, que se introdujeron en el capítulo 3 para ecuaciones individuales, también aplican a sistemas, con algunas modificaciones. Ahora explicaremos ambos métodos.

Método de coeficientes indeterminados

El método de coeficientes indeterminados es esencialmente idéntico tanto para ecuaciones individuales como para sistemas de ecuaciones. Como usted quizá recuerde, se basa en hacer una conjetura razonada de la forma general de una solución particular $\mathbf{x}_p$ y en seguida determinar los coeficientes desconocidos a partir del requisito de que $\mathbf{x}_p$ satisfaga el sistema no homogéneo.

La tabla 3-2 puede usarse aún para determinar la forma apropiada de la solución particular correspondiente a los términos no homogéneos. Pero en el caso de sistemas, se considera que los coeficientes son *vectores* constantes en vez de *escalares* constantes. Como resultado, la forma general de la solución particular es la misma para cada función incógnita en el sistema, sin que importe cuáles son los términos no homogéneos de las ecuaciones individuales (figura 7-49). Al decidir la forma general de la solución particular de un sistema no homogéneo, es conveniente expresar los términos no homogéneos uniformemente como una suma de las funciones con los coeficientes vectoriales constantes. Por ejemplo, los términos no homogéneos del sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - 3x_3 + 5t - 5 \\ x_2' &= x_1 + x_2 - x_3 + 3te^{-2t} + 1 \\ x_3' &= -x_1 + 5x_3 \end{aligned}$$

pueden expresarse como

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado el sistema no homogéneo:

$$\begin{aligned} x'_1 &= 4x_1 + 6x_2 + 3\operatorname{sen}2t \\ x'_2 &= -3x_1 - 5x_2 - 4 \end{aligned}$$

Términos no homogéneos

La forma apropiada de la solución particular (suponiendo que no hay duplicación entre la solución homogénea y los términos no homogéneos):

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{a} + \mathbf{b}\cos 2t + \mathbf{c} \operatorname{sen} 2t$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t$$

FIGURA 7-49
Al determinar la forma apropiada de una solución particular con el método de coeficientes indeterminados debemos considerar *todos* los términos no homogéneos en *todas* las ecuaciones.

La forma apropiada de la solución particular en este caso (suponiendo que no hay duplicidad entre la solución homogénea y los términos no homogéneos) es

$$x_p = (\mathbf{a}t + \mathbf{b})e^{-2t} + \mathbf{c}t + \mathbf{d} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

que incluye doce coeficientes indeterminados. Observe que la forma general de la solución particular incluye todos los términos no homogéneos en el sistema dado.

Los términos no homogéneos que son soluciones de las ecuaciones homogéneas relacionadas se manejan en forma diferente en sistemas. Usted recordará que para ecuaciones individuales, multiplicamos la forma básica de la solución particular por t^k, donde t es la variable independiente y k el entero menor que elimina totalmente cualquier duplicidad entre la solución homogénea y la solución particular. Sin embargo, para sistemas multiplicamos la forma básica de la solución particular no solo por t^k, sino también por todas las potencias menores de t, incluyendo la potencia cero. Es decir, en sistemas multiplicamos la forma básica de la solución particular por un polinomio de grado k en t, en vez de la potencia k de t. Por ejemplo, si e^{-2t} es una solución homogénea, entonces la forma correcta de la solución particular correspondiente a un término no homogéneo de la forma e^{-2t} es $\mathbf{x}_p = \mathbf{a}te^{-2t} + \mathbf{b}e^{-2t}$ en lugar de solo $\mathbf{x}_p = \mathbf{a}te^{-2t}$.

Se recuerda nuevamente al lector que el método de coeficientes indeterminados es práctico solo cuando todas las ecuaciones del sistema tienen coeficientes constantes y los términos no homogéneos únicamente tienen polinomios, funciones exponenciales y funciones de seno y coseno como factores.

EJEMPLO 7-25 Método de coeficientes indeterminados

Usando el método de coeficientes indeterminados para la solución particular, determine la solución general del sistema

$$x_1' = 4x_1 + 6x_2 + 1$$
$$x_2' = -3x_1 - 5x_2 + e^t$$

Solución Este es un sistema de dos ecuaciones lineales no homogéneas de primer orden con coeficientes constantes con dos incógnitas, y puede expresarse en forma matricial como $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución general del sistema homogéneo asociado $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ se determinó en el ejemplo 7-18 como

$$\mathbf{x}_h = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

Comparando los términos no homogéneos e^t y 1 con la solución homogénea, observamos que la función e^t también aparece en la solución homogénea. Por tanto, elegimos la solución particular correspondiente a este término como $\mathbf{a}te^t + \mathbf{b}e^t$ (en vez de solo $\mathbf{a}te^t$, como lo haríamos con una sola ecuación). También suponemos que la solución particular correspondiente a la constante 1 tiene la forma de un vector constante $\mathbf{c}$. Entonces, la forma apropiada de la solución particular es

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{a}te^t + \mathbf{b}e^t + \mathbf{c}$$

cuya derivada es

$$\mathbf{x}_p' = \mathbf{a}e^t + \mathbf{a}te^t + \mathbf{b}e^t$$

Aquí $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores constantes de 2×1:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo estas relaciones para la solución particular y su derivada en el sistema, obtenemos

$$\mathbf{a}e^t + \mathbf{a}te^t + \mathbf{b}e^t = \mathbf{A}(\mathbf{a}te^t + \mathbf{b}e^t + \mathbf{c}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Igualando los términos constantes y los coeficientes de te^t y e^t en ambos lados de la ecuación, obtenemos las tres ecuaciones matriciales:

$$\mathbf{Ac} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{Aa}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{Ab} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La primera ecuación puede resolverse para $\mathbf{c}$ multiplicándola por $\mathbf{A}^{-1}$ desde la izquierda:

$$\mathbf{c} = -\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La segunda ecuación puede expresarse como $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{a} = 0$, que es la ecuación para el vector característico de $\mathbf{A}$ correspondiente al valor característico $\lambda = 1$. Se determinó en el ejemplo 7-16 como

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se deja como ejercicio para el estudiante comprobar que la tercera ecuación matricial se reduce a una sola ecuación escalar:

$$3b_1 + 6b_2 = 2$$

Haciendo $b_1 = 0$ por simplicidad, esta ecuación da $b_2 = 1/3$. A partir de estas decisiones, la solución particular puede expresarse como

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}te^t + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución general del sistema dado se determina sumando la solución particular a la solución homogénea, obteniendo

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}te^t + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La solución también puede expresarse en la siguiente forma escalar (no vectorial)

$$x_1 = 2(c_1 + t)e^t - c_2e^{-2t} - \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \left(-c_1 + \frac{1}{3} - t\right)e^t + c_2e^{-2t} + \frac{3}{2}$$

La validez de estas soluciones puede verificarse sustituyéndolas en el sistema de ecuaciones dados y comprobando que satisfacen cada ecuación del sistema.

Variación de parámetros

Cuando los elementos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}(t)$ del sistema lineal no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{r}(t)$$

no son constantes o el vector no homogéneo $\mathbf{r}(t)$ incluye funciones distintas a polinomios, funciones exponenciales y funciones sinusoidales, el método de coeficientes indeterminados que acabamos de exponer no se puede aplicar. En tales casos, debemos usar el método de variación de parámetros, que es el método general para obtener soluciones particulares. Si usted espera ver deducciones prolongadas y formulaciones complicadas en relación con el método de variación de parámetros por ser el método general, le espera una agradable sorpresa, porque dicho método resulta ser muy natural para los sistemas, y da como resultado una formulación relativamente sencilla, como se ilustra con la siguiente discusión.

El primer paso en la solución es considerar el sistema homogéneo asociado $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, y determinar su solución general $\mathbf{x}_h$, que incluye n vectores solución linealmente independientes y n constantes arbitrarias:

$$\mathbf{x}_h = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n \tag{7-92}$$

La solución homogénea también puede expresarse en términos de la matriz fundamental $\mathbf{F}$ (la matriz de $n \times n$ cuyas columnas son los n vectores solución linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$) como

$$\mathbf{x}_h = \mathbf{F}(t)\mathbf{c} \tag{7-93}$$

El método de variación de parámetros se basa en la suposición de que la solución particular es de la forma de la solución homogénea, excepto que el vector constante $\mathbf{c}$ se reemplaza por un vector función $\mathbf{u}(t)$, que también está por determinarse. Es decir,

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{F}(t)\mathbf{u} \tag{7-94}$$

donde el vector $\mathbf{u}(t)$ se determina a partir del requisito de que $\mathbf{x}_p$ satisfaga el sistema no homogéneo, como se muestra a continuación.

Al derivar las expresiones $\mathbf{x}_p$ (ecuación 7-94) y sustituir en $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{r}(t)$ obtenemos

$$\mathbf{F}'(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{F}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{r}(t) \tag{7-95}$$

Pero $\mathbf{F}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{F}(t)$, ya que $\mathbf{F}(t)$ satisface el sistema homogéneo asociado, y la ecuación se reduce a

$$\mathbf{F}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \tag{7-96}$$

$\mathbf{F}(t)$ es una matriz no singular en un intervalo en el que $\mathbf{A}(t)$ es continua. Entonces, su inversa $\mathbf{F}^{-1}(t)$ existe. Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\mathbf{F}^{-1}(t)$ desde la izquierda obtenemos

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t) \tag{7-97}$$

Entonces el vector $\mathbf{u}(t)$ puede determinarse con un vector constante arbitrario $\mathbf{k}$, por integración, en la forma

$$\mathbf{u}(t) = \int \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t)dt + \mathbf{k} \tag{7-98}$$

Sustituyendo en la ecuación 7-94, la solución particular se determina como (figura 7-50)

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{F}(t)\int \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t)dt + \mathbf{F}(t)\mathbf{k} \tag{7-99}$$

Entonces la solución general del sistema no homogéneo se obtiene sumando la solución particular a la solución homogénea (ecuación 7-93), obteniendo

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(t)\mathbf{c} + \mathbf{F}(t)\int \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t)dt + \mathbf{F}(t)\mathbf{k} \tag{7-100}$$

o

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{F}(t)\mathbf{c} + \mathbf{F}(t)\int \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t)dt} \tag{7-101}$$

ya que los dos vectores constantes arbitrarios $\mathbf{c}$ y $\mathbf{k}$ pueden combinarse en un solo vector constante arbitrario $\mathbf{c}$ sin pérdida de generalidad. En otras palabras, podemos decidir que $\mathbf{k}$ sea el vector cero o cualquier otro vector constante conveniente sin pérdida de generalidad. Los siguientes ejemplos ilustran el uso de la ecuación 7-101 en la solución de sistemas lineales no homogéneos.

Dado el sistema:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{r}(t)$$

Su solución homogénea:

$$\mathbf{x}_h = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

Matriz fundamental:

$$\mathbf{F}(t) = (\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \cdots\ \mathbf{x}_n)$$

Solución particular:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{F}(t)\int \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t)dt$$

donde $\mathbf{F}^{-1}(t)$ es la inversa de la matriz fundamental.

FIGURA 7-50
Cuando la solución homogénea $\mathbf{x}_h$ está disponible (y, por tanto, la matriz fundamental $\mathbf{F}(t)$), el método de variación de parámetros produce la solución particular de un sistema no homogéneo de manera sencilla.

EJEMPLO 7-26 Método de variación de parámetros

Usando el método de variación de parámetros para la solución particular, determine la solución general del sistema

$$x_1' = 4x_1 + 6x_2 + 1$$
$$x_2' = -3x_1 - 5x_2 + e^t$$

Solución Este es el sistema que consideramos en el ejemplo 7-25. Nuevamente lo expresamos en forma matricial como $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}$$

En el ejemplo 7-16 se determinaron dos vectores de solución linealmente independientes del sistema homogéneo asociado $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ como

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz fundamental del sistema homogéneo asociado es

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & -e^{-2t} \\ -e^t & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$\det \mathbf{F} = \begin{vmatrix} 2e^t & -e^{-2t} \\ -e^t & e^{-2t} \end{vmatrix} = 2e^{-t} - e^{-t} = e^{-t}$$

Entonces la inversa de esta matriz fundamental de 2×2 es

$$\mathbf{F}^{-1}(t) = \frac{1}{e^{-t}}\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ e^{t} & 2e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

Ahora podemos determinar la solución particular usando el método de variación de parámetros, a partir de la ecuación 7-99. Ignorando la constante de integración, obtenemos

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{F}(t)\int \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t)dt$$

donde $$\int \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t)dt = \int\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{t} \end{pmatrix}dt$$

$$= \int\begin{pmatrix} e^{-t} + 1 \\ e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix} -e^{-t} + t \\ \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo, la solución particular se determina como

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{F}(t)\int \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t)dt = \begin{pmatrix} 2e^{t} & -e^{-2t} \\ -e^{t} & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-t} + t \\ \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 + 2te^{t} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}e^{t} \\ 1 - te^{t} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^{t} - \frac{2}{3}e^{t} - \frac{5}{2} \\ -te^{t} + \frac{2}{3}e^{t} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}te^{t} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución general del sistema dado se determina sumando la solución particular a la solución homogénea determinada en el ejemplo 7-13, como

$$\mathbf{x} = d_1\mathbf{x}_1 + d_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_p$$

$$= d_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t} + d_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}te^{t} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La solución también puede expresarse en la siguiente forma escalar (no vectorial)

$$x_1 = 2\left(d_1 - \frac{1}{3} + t\right)e^{t} - d_2e^{-2t} - \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \left(-d_1 + \frac{2}{3} - t\right)e^{t} + d_2e^{-2t} + \frac{3}{2}$$

la validez de estas soluciones puede verificarse sustituyéndolas en el sistema de ecuaciones dado y comprobando que satisfacen cada ecuación del sistema.

Observe que el método de variación de parámetros proporciona la solución particular de manera sistemática y precisa. La solución general que acabamos de obtener es idéntica a la que calculamos por el método de coeficientes indeterminados, excepto que las constantes arbitrarias c_1 y d_1 en las dos soluciones difieren en la constante $1/3$; es decir, $c_1 = d_1 - 1/3$. Esto no tiene consecuencias.

Sistemas no homogéneos de problemas de valor inicial

El método de variación de parámetros es muy adecuado para resolver sistemas no homogéneos de problemas de valor inicial lineales porque puede incorporar directamente las condiciones iniciales.

En la sección anterior vimos que la solución general de sistemas *homogéneos* puede expresarse en términos de la matriz fundamental $\mathbf{F}(t)$ como

$$\mathbf{x}_h(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{c} \tag{7-102}$$

donde $\mathbf{c}$ es el vector que contiene las constantes arbitrarias. Multiplicando la ecuación por $\mathbf{F}^{-1}(t)$ desde la izquierda y evaluándola en $t = t_0$, se determinó el vector $\mathbf{c}$ como

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 \tag{7-103}$$

donde $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ es el conjunto específico de condiciones iniciales. Sustituyendo en la ecuación 7-102, la solución general de sistemas *homogéneos* de problemas de valor inicial se expresa como

$$\mathbf{x}_h(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{F}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 \tag{7-104}$$

La relación $\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$ es muy atrayente, pero no es aplicable a sistemas no homogéneos, ya que las constantes arbitrarias deben determinarse aplicando las condiciones iniciales de *toda* la solución (homogénea más particular) en lugar de la sola solución homogénea. A menos, por supuesto, que la solución particular sea cero en el punto $t = t_0$. Esto sugiere que tal vez podamos usar esta relación para determinar las constantes arbitrarias incluso para sistemas no homogéneos si, de alguna manera, podemos expresar la solución particular de forma que siempre sea cero en $t = t_0$.

Recuerde que la relación que obtuvimos para la solución particular usando el método de variación de parámetros (ecuación 7-99) incluye una integral indefinida con un vector constante arbitrario $\mathbf{k}$. Se comprobó que es posible decidir que $\mathbf{k}$ sea el vector cero o cualquier vector constante conveniente sin pérdida de generalidad alguna. Al resolver sistemas de *ecuaciones diferenciales*, es conveniente decidir que $\mathbf{k}$ sea el vector cero (o simplemente ignorarlo). Pero al resolver sistemas de *problemas de valor inicial*, es más conveniente elegir $\mathbf{k}$ de manera que haga que la solución particular sea cero en $t = t_0$. Este objetivo se consigue fácilmente expresando la integral indefinida en la ecuación 7-99 como integral definida entre los límites t_0 y t como

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{F}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t)\,dt \tag{7-105}$$

Esto asegurará que $\mathbf{x}_p = 0$ en $t = t_0$, ya que cualquier integral definida con límites inferior y superior idénticos es cero. Finalmente, combinando las soluciones homogénea y particular de las ecuaciones 7-104 y 7-105, la solución de un sistema no homogéneo de problemas de valor inicial puede expresarse en la forma (figura 7-51)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\left[\mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t}\mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t)\,dt\right] \tag{7-106}$$

Por tanto, una vez que está disponible la matriz fundamental $\mathbf{F}(t)$ del sistema homogéneo asociado, es posible usar la ecuación 7-106 para determinar la solución de un sistema de ecuaciones no homogéneas sujetas a las condiciones iniciales $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Dado el sistema:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{r}(t)$$

Con la solución homogénea:

$$\mathbf{x}_h = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

Matriz fundamental:

$$\mathbf{F}(t) = (\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \cdots\ \mathbf{x}_n)$$

Solución del sistema dado de problemas de valor inicial:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\left[\mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t}\mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t)dt\right]$$

donde $\mathbf{F}^{-1}(t)$ es la inversa de la matriz fundamental.

FIGURA 7-51
Cuando la solución homogénea $\mathbf{x}_h$ está disponible (y, por tanto, la matriz fundamental $\mathbf{F}(t)$), el método de variación de parámetros proporciona directamente la solución de un sistema no homogéneo de problemas de valor inicial.

EJEMPLO 7-27 Sistemas no homogéneos de problemas de valor inicial

Determine la solución de las siguientes ecuaciones con condiciones iniciales específicas

$$x_1' = 4x_1 + 6x_2 + 1, \qquad x_1(0) = 1$$

$$x_2' = -3x_1 - 5x_2 + e^t, \qquad x_2(0) = 0$$

Solución Este es el sistema no homogéneo que resolvimos en el ejemplo 7-25. La solución que satisface las condiciones iniciales específicas puede determinarse aplicando las condiciones iniciales a la solución general que se obtuvo antes y despejando las constantes arbitrarias c_1 y c_2. Esto dará $c_1 = 5/3$ y $c_2 = -1/6$. Entonces la solución del sistema dado de problemas de valor inicial resulta

$$x_1 = \left(2t + \frac{10}{3}\right)e^t + \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{5}{2}$$

$$x_2 = -\left(t + \frac{4}{3}\right)e^t - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{3}{2}$$

Ahora comprobaremos que es posible obtener el mismo resultado directamente a partir de la ecuación 7-106 —sin necesidad de determinar primero la solución particular— una vez que está disponible la matriz fundamental $\mathbf{F}(t)$ del sistema homogéneo asociado. Del ejemplo 7-26, tenemos

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & -e^{-2t} \\ -e^t & e^{-2t} \end{pmatrix}, \mathbf{F}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

También pueden expresarse en forma matricial las condiciones iniciales y los términos no homogéneos como

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación 7-101 y haciendo $t_0 = 0$, la solución del sistema dado se determina como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\left[\mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t)\,dt\right]$$

$$= \mathbf{F}(t)\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix} dt\right]$$

$$= \mathbf{F}(t)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} e^{-t} + 1 \\ e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix} dt\right]$$

$$= \mathbf{F}(t)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{-t} + t + 1 \\ \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{7}{6} \end{pmatrix}\right]$$

Sustituyendo $\mathbf{F}(t)$, resulta

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & -e^{-2t} \\ -e^t & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-t} + t + 2 \\ \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(2t + \frac{10}{3}\right)e^t + \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{5}{2} \\ -\left(t + \frac{4}{3}\right)e^t - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

o, en forma escalar,

$$x_1 = \left(2t + \frac{10}{3}\right)e^t + \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{5}{2}$$
$$x_2 = -\left(t + \frac{4}{3}\right)e^t - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{3}{2}$$

Observe que, en este procedimiento, la solución particular se considera automáticamente, y las condiciones iniciales se incorporan de manera predeterminada a la solución.

Observe que el método de variación de parámetros se adapta en forma natural a la resolución de sistemas no homogéneos de ecuaciones diferenciales, y nos permite determinar la solución de sistemas no homogéneos con un conjunto de condiciones iniciales directamente de manera sistemática.

Repaso de la sección

7-30 ¿Cuál es la diferencia entre aplicar el método de coeficientes indeterminados a sistemas y aplicarlo a ecuaciones individuales?

7-31 ¿Cuál método es más sencillo de aplicar a sistemas lineales no homogéneos para determinar la solución particular: el de coeficientes indeterminados o el de variación de parámetros?

7-32 Use *a*) el método de coeficientes indeterminados y *b*) el método de variación de parámetros para determinar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (use el método matricial para obtener la solución homogénea):

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -5e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(*Respuesta:* $\mathbf{x} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + C_2\begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}t^2e^{2t} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}te^{2t}$.)

7-33 Repita el problema 7-32 usando el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2\cos 2t \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(*Respuesta:* $\mathbf{x}_1(t) = \frac{29\sqrt{6}}{457}e^t \operatorname{sen} 2\sqrt{6}t + \frac{205}{457}e^t \cos 2\sqrt{6}t - \frac{48}{457}\operatorname{sen} 2t + \frac{252}{457}\cos 2t$

$\mathbf{x}_2(t) = \frac{205\sqrt{6}}{1\,371}e^t \operatorname{sen} 2\sqrt{6}t - \frac{58}{457}e^t \cos 2\sqrt{6}t + \frac{76}{457}\operatorname{sen} 2t + \frac{58}{457}\cos 2t$.)

7-7 ■ FORMAS CANÓNICAS Y MATRIZ DE TRANSICIÓN

Considere los resultados del ejemplo 7-18, en el que los vectores característicos y los modos característicos correspondientes al sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

son

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t}$$

Vimos que podemos obtener otros vectores característicos con solo multiplicar cualquiera de los vectores característicos por una constante. Este procedimiento nada más cambia la longitud del vector, pero no su dirección. Por ejemplo, decidiendo arbitrariamente igualar a 1 el primer componente de cada vector puede obtenerse un conjunto de vectores característicos a partir de los vectores característicos originales dividiendo el primer vector entre 2:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Podemos crear vectores característicos que sean *vectores unitarios* (con longitud 1) dividiendo cada vector entre su longitud, que se calcula como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada componente del vector. Las longitudes de los vectores son $\sqrt{1^2 + (-1/2)^2} = \sqrt{5}/2$ y $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Entonces, un conjunto de vectores característicos que también es un conjunto de vectores unitarios es

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{w}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{2}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Mostraremos que los vectores característicos que también son vectores unitarios son útiles para resolver conjuntos de ecuaciones.

Diagonalización

Podemos considerar las variables de estado x_1 y x_2 como dos coordenadas en un sistema de dos ejes coordenados. Tal sistema, en el que las coordenadas son las variables de estado, se llama *espacio de estado*. Este concepto puede generalizarse a cualquier número de variables de estado, aunque pierde su significado geométrico cuando hay más de tres.

Considere los siguientes vectores característicos bidimensionales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ normalizados de manera que su primer componente sea 1:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

Estos vectores característicos pueden representarse por flechas en el espacio de estado. El comportamiento del sistema se debe a la combinación vectorial del movimiento de cada modo característico a lo largo de su vector característico. Estos movimientos tienen lugar a diferentes tasas, y cada una está determinada por la constante de tiempo del modo característico. La proyección del vector de condición inicial $\mathbf{x}(0)$ sobre cada vector característico determina la magnitud inicial asociada con el modo característico. Si el vector $\mathbf{x}(0)$ está colocado exactamente sobre uno de los vectores característicos, solo ese modo característico aparecerá en el movimiento.

Si los vectores característicos son linealmente independientes pueden usarse para formar un nuevo conjunto de ejes coordenados. Sean las nuevas coordenadas z_1 y z_2, y sean $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$ los vectores base de longitud uno. Si los vectores base están colocados a lo largo de los vectores característicos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, también son vectores característicos. Se encuentran al normalizar los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ y dividirlos entre sus longitudes. Es decir,

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+m_1^2}}\begin{pmatrix}1\\ m_1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+m_2^2}}\begin{pmatrix}1\\ m_2\end{pmatrix}$$

El vector de solución $\mathbf{x}$ expresado en estas coordenadas es

$$\mathbf{x} = z_1\hat{\mathbf{e}}_1 + z_2\hat{\mathbf{e}}_2$$

y su derivada es

$$\mathbf{x}' = z_1'\hat{\mathbf{e}}_1 + z_2'\hat{\mathbf{e}}_2$$

La respuesta libre satisface $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$; por tanto,

$$z_1'\hat{\mathbf{e}}_2 + z_2'\hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{A}(z_1\hat{\mathbf{e}}_1 + z_2\hat{\mathbf{e}}_2) = z_1\mathbf{A}\hat{\mathbf{e}}_1 + z_2\mathbf{A}\hat{\mathbf{e}}_2$$

porque z_1 y z_2 son escalares. Por la definición de vectores característicos, $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$ deben satisfacer

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{e}}_1 = \lambda_1\hat{\mathbf{e}}_1$$

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{e}}_2 = \lambda_2\hat{\mathbf{e}}_2$$

Entonces, $$z_1'\hat{\mathbf{e}}_1 + z_2'\hat{\mathbf{e}}_2 = \lambda_1 z_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \lambda_2 z_2\hat{\mathbf{e}}_2$$

Comparando los componentes vemos que

$$z_1' = \lambda_1 z_1 \tag{7-107}$$

$$z_2' = \lambda_2 z_2 \tag{7-108}$$

Esto muestra que las ecuaciones diferenciales homogéneas se desacoplan al expresarse en ejes coordenados a lo largo de las direcciones de los vectores característicos. Es posible mostrar, por geometría analítica en el caso bidimensional o por álgebra lineal en general, que la matriz de transformación entre los sistemas de coordenadas $\mathbf{x}$ y $\mathbf{z}$ es la **matriz modal M**, cuyas columnas son los vectores característicos.

Para el caso bidimensional, tenemos

$$\mathbf{M} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

donde $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{z}$. Esto implica que $\mathbf{x}' = \mathbf{M}\mathbf{z}'$. A partir del conjunto de ecuaciones diferenciales $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}(t)$, obtenemos

$$\mathbf{M}\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{r}(t)$$

Es posible mostrar que $\mathbf{M}^{-1}$ existe para el caso de valores característicos distintos. Entonces,

$$\mathbf{z}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AMz} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}(t) \quad \textbf{(7-109)}$$

La comparación entre las ecuaciones 7-107 y 7-108 para $\mathbf{f}(t) = 0$ muestra que

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(7-110)}$$

Esta propiedad también es válida para el caso de vectores generales, si los valores característicos de $\mathbf{A}$ son distintos; es decir,

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM} = \Lambda \quad \textbf{(7-111)}$$

donde Λ es una matriz diagonal cuyos elementos son los valores característicos del sistema. Entonces, el conjunto de ecuaciones en términos del vector $\mathbf{z}$ es

$$\mathbf{z}' = \Lambda\mathbf{z} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}(t) \quad \textbf{(7-112)}$$

Para el caso de orden n, la matriz modal tiene la forma

$$\mathbf{M} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) \quad \textbf{(7-113)}$$

La matriz Λ se llama *matriz desacoplante* porque las ecuaciones diferenciales que resultan en términos de las variables en el vector $\mathbf{z}$ son ecuaciones desacopladas o independientes si los valores característicos son distintos. Como las ecuaciones desacopladas son más fáciles de resolver, primero despejamos las variables $\mathbf{z}$ y luego usamos la transformación $\mathbf{x} = \mathbf{Mz}$ para obtener las soluciones para las variables originales (figura 7-52).

Conjunto de ecuaciones lineales con coeficientes constantes

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{r}(t)$$

$\mathbf{M}$ = matriz modal, cuyas columnas son vectores característicos

Λ = matriz desacoplante = $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$

Transformación de variables

$$\mathbf{x} = \mathbf{Mz}$$

Ecuaciones desacopladas

$$\mathbf{z}' = \Lambda\mathbf{z} + \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{r}(t)$$

FIGURA 7-52
Uso de la matriz modal para desacoplar conjuntos de ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 7-28 Desacoplamiento de ecuaciones con valores característicos distintos y reales

Obtenga la solución del conjunto

$$x_1' = 4x_1 + 6x_2 + 1$$
$$x_2' = -3x_1 - 5x_2 + e^t$$

desacoplando las ecuaciones con un nuevo conjunto de variables, z_1 y z_2.

Solución Los valores característicos y los vectores característicos de este conjunto se obtuvieron en el ejemplo 7-19, y $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ y

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz modal y su inversa son

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz desacoplante es

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Usando la transformación de variables $\mathbf{x} = \mathbf{Mz}$, obtenemos la ecuación

$$\mathbf{z}' = \Lambda\mathbf{z} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}$$

que proporciona las siguientes ecuaciones desacopladas

$$z_1' = z_1 + 1 + e^t$$
$$z_2' = -2z_2 + 1 + 2e^t$$

Estas son dos ecuaciones independientes de primer orden que pueden resolverse usando los métodos del capítulo 2. Las soluciones son

$$z_1 = C_1e^t + te^t - 1$$
$$z_2 = \frac{2}{3}e^t + C_2e^{-2t} + \frac{1}{2}$$

Para obtener la solución para las variables originales, usamos la transformación $\mathbf{x} = \mathbf{Mz}$. Obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_1 - z_2 \\ -z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

o

$$x_1 = \left(2c_1 - \frac{2}{3} + 2t\right)e^t - c_2e^{-2t} - \frac{5}{2}$$
$$x_2 = \left(-c_1 + \frac{2}{3} - t\right)e^t + c_2e^{-2t} + \frac{3}{2}$$

Modos característicos para valores característicos repetidos Si los valores característicos se repiten, tal vez no existan vectores característicos linealmente independientes y, en este caso, la matriz Λ no será diagonal. Para un sistema de segundo orden que tenga el valor característico λ_1 repetido dos veces, podemos mostrar que la matriz tiene la forma

$$\mathbf{\Lambda}_R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{7-114}$$

donde usamos el subíndice R para distinguir Λ_R de la matriz Λ usada para el caso de valores característicos distintos. Extendiendo esto al caso de tercer orden en el que el valor característico λ_1 se repitió tres veces, obtenemos

$$\mathbf{\Lambda}_R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{7-115}$$

Para el caso del tercer orden en el que el valor característico λ_1 se repite dos veces y el tercer valor característico es λ_2, tenemos

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{7-116}$$

EJEMPLO 7-29 **Desacoplamiento de ecuaciones con valores característicos repetidos**

Obtenga la solución del conjunto

$$z_1' = 4x_1 + x_2$$
$$x_2' = -x_1 + 2x_2$$

por desacoplamiento con un nuevo conjunto de variables, z y z_2.

Solución Los valores característicos y los vectores característicos de este conjunto se obtuvieron en el ejemplo 7-23, y son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$ y

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz modal y su inversa son

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matiz desacoplante es

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Usando la transformación de variables $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{z}$, obtenemos las ecuaciones desacopladas

$$\mathbf{z}' = \Lambda\,\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

que proporcionan las siguientes ecuaciones desacopladas:

$$z_1' = 3z_1 + z_2$$
$$z_2' = 3z_2$$

La segunda ecuación es una ecuación independiente de primer orden, que puede resolverse usando los métodos del capítulo 2. La solución es

$$z_2 = C_2 e^{3t}$$

La primera ecuación es dependiente de la segunda, pero también es una ecuación de primer orden y puede resolverse usando los métodos del capítulo 2. La solución es

$$z_1 = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$$

Para obtener la solución para las variables originales, usamos la transformación $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{z}$. Obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_1 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

o

$$x_1 = -C_1 e^{3t} - C_2 t e^{3t}$$

$$x_2 = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} - C_2 e^{3t}$$

Modos característicos para valores característicos complejos La aparición de valores característicos complejos se incluye en el caso de valores característicos distintos; sin embargo, los vectores característicos y los elementos diagonales de la matriz Λ serán complejos. En este caso, es difícil interpretar de manera física los modos característicos. Por ejemplo, los vectores característicos ya no son ejes coordenados en el plano real que contiene las variables de estado; asimismo, para algunos propósitos de cálculo, es deseable evitar cantidades complejas. Por tanto, ahora explicamos el caso de raíces complejas desde un punto de vista ligeramente diferente.

Considere el caso de segundo orden en el que la matriz $\mathbf{A}$ tiene los valores característicos $\lambda = -a \pm ib$, $b > 0$. Se muestra rápidamente que los vectores característicos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son complejos conjugados, de modo que

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{q} + i\mathbf{r}$$
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{q} - i\mathbf{r}$$

En lugar de la matriz modal **M**, definida en la ecuación 7-113, use la matriz

$$\mathbf{M}_C = [\mathbf{q}, \mathbf{r}]$$

Observe que $\mathbf{M}_C$ tiene elementos reales. Para encontrar las propiedades de $\mathbf{M}_C$, usamos la definición del vector característico $\mathbf{v}_1$. Debe satisfacer

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = (-a + ib)\mathbf{v}_1$$

o $$\mathbf{A}(\mathbf{q} + i\mathbf{r}) = (-a + ib)(\mathbf{q} + i\mathbf{r}) = (-a\mathbf{q} - b\mathbf{r}) + i(b\mathbf{q} - a\mathbf{r})$$

Entonces, $$\mathbf{A}\mathbf{q} = -a\mathbf{q} - b\mathbf{r}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{r} = b\mathbf{q} - a\mathbf{r}$$

Reacomodando en forma matricial, tenemos

$$\mathbf{A}\,[\mathbf{q}, \mathbf{r}] = [\mathbf{q}, \mathbf{r}]\begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$$

o $$\mathbf{A}\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_C\Lambda_C$$

donde $$\Lambda_C = \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix} \tag{7-117}$$

Con la transformación $\mathbf{x} = \mathbf{M}_C\mathbf{z}$, la ecuación de estado $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{f}$ se convierte (para el caso de segundo orden) en

$$\mathbf{z}' = \Lambda_C\mathbf{z} + \mathbf{M}_C^{-1}\mathbf{B}\mathbf{f}$$

En la figura 7-53 se resumen las diferentes formas para los casos de valores característicos distintos, repetidos y complejos.

Conjunto de ecuaciones lineales con coeficientes constantes (**A** es de 2 × 2)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}(t)$$

M = matriz modal, cuyas columnas son los vectores característicos

Λ = matriz desacoplante = $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$

Dos valores característicos distintos, reales:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Dos valores característicos repetidos:

$$\Lambda = \Lambda_R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Valores característicos complejos conjugadoss, $-a \pm ib$

$$\Lambda = \Lambda_C = \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$$

FIGURA 7-53
Formas de la matriz desacoplante para un conjunto de dos ecuaciones.

Forma canónica de Jordan Vimos que para valores característicos distintos, siempre es posible transformar el modelo de estado para obtener una matriz diagonal en la forma de la ecuación 7-110. Si cualquiera de los valores característicos se repite, esta diagonalización usualmente no es posible, y resulta la forma de la ecuación 7-114. Estas son las *formas canónicas* de la ecuación de estado, cuya utilidad se verá posteriormente. Para un sistema de orden superior, podemos manifestar que siempre es posible encontrar una matriz de transformación **M** para obtener la siguiente **forma canónica de Jordan**:

$$\Lambda = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \alpha_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & s_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & s_n \end{bmatrix}$$

donde las α_i, $i = 1, \dots, n - 1$ pueden ser ya sea 0 o 1. Por ejemplo, vimos que un sistema de tercer orden con dos raíces repetidas λ_1 y una raíz distinta λ_2 da la forma

$$\Lambda = \begin{bmatrix} & & | & 0 \\ \Lambda_R & & | & \\ & & | & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & \Lambda_D \end{bmatrix}$$

donde $\Lambda_D = \lambda_2$ y

$$\Lambda_R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

En general, Λ consistirá en bloques de submatrices correspondientes a la matriz canónica Λ_i para cada conjunto de modos del sistema. Dos raíces repetidas corresponden a un conjunto de dos modos que usualmente son acoplados, y Λ_R es una matriz de 2×2. Para tres raíces repetidas, Λ_i es de (3×3), y así sucesivamente. Para cada raíz distinta, $\Lambda_i = \lambda_i$.

Cuando aparecen raíces complejas, la forma de Jordan tendrá elementos complejos; por tanto, en ocasiones se reescribe usando la forma Λ_C dada en la ecuación 7-117. Por ejemplo, considere un modelo de sistema de sexto orden con dos raíces repetidas λ_1, dos raíces complejas $-a \pm ib$ y dos raíces distintas λ_5 y λ_6. Si los vectores característicos correspondientes a λ_1 son dependientes, la forma modificada de Jordan es

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{bmatrix}$$

Aplicación de la forma canónica En muchas aplicaciones de ingeniería debemos diseñar un controlador para suministrar una fuerza, un par de torsión, un voltaje o una presión para mover el sistema de tal manera que la señal de salida sea una función específica del tiempo. Un ejemplo es la articulación del hombro de un brazo de robot accionado por un motor eléctrico; la señal de entrada es el voltaje del motor, y la de salida es el ángulo del hombro. Es deseable poder predecir si la señal de salida puede llevarse a algún valor deseado; para esto se necesita entender la *controlabilidad* del sistema. Un estado $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ de un sistema es controlable si es posible que el vector de entrada transfiera cualquier estado $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ en cualquier tiempo anterior al estado $\mathbf{x}_1$ en una cantidad finita de tiempo. Si todos los estados $\mathbf{x}_1$ del sistema son controlables, el sistema también lo es. La matriz canónica es muy útil para evaluar la controlabilidad.

El modelo de primer orden $x' = ax + bf(t)$ es controlable si $b \neq 0$. Para comprobar esto, use la solución general:

$$x(t) = e^{at}x(t_0) + e^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bf(\tau)\,d\tau.$$

La controlabilidad exige que pueda obtenerse cualquier valor deseado de $x(t)$ en cualquier tiempo deseado t, para valores arbitrarios de $x(t_0)$ y t_0. Una entrada constante f puede realizar esta tarea si no restringe su magnitud. Para ver esto, haga la integración para f arbitraria pero constante, y despeje f.

Al considerar sistemas de orden superior, las propiedades de controlabilidad no siempre son evidentes. Considere el sistema de segundo orden:

$$x_1' = -2x_1 + f(t)$$

$$x_2' = x_1 - x_2 - f(t)$$

Por los resultados anteriores, podemos ver que el estado x_1 es controlable porque su ecuación no depende de x_2; pero la situación para x_2 no es clara. La respuesta se encuentra recordando que los modos de un modelo forman la estructura de su comportamiento dinámico. Para controlar el comportamiento del sistema, debemos ser capaces de influir por separado en cada uno de sus modos; por tanto, examinemos la composición modal del modelo. Los valores característicos son $\lambda = -1, -2$, y los vectores característicos son

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación modal $\mathbf{M}$ y su inversa son

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Los modos son $\mathbf{z} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$, o

$$z_1 = x_1 + x_2$$

$$z_2 = x_1$$

Las ecuaciones modales son

$$\dot{\mathbf{z}} = \Lambda\mathbf{z} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}f(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}f(t)$$

o

$$\dot{z}_1 = -z_1$$

$$\dot{z}_2 = -2z_2 + f(t)$$

Como ni $f(t)$ ni z_2 aparecen en la primera ecuación modal, el modo z_1 es incontrolable; por tanto, el sistema es incontrolable. Podemos controlar x_2, pero no la suma $x_1 + x_2$, lo cual significa que no podemos controlar x_1.

Matriz de transición

Recuerde que las columnas de la *matriz fundamental* $\mathbf{F}(t)$ son los vectores solución linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ de un sistema. La respuesta libre puede expresarse como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{x}(0)$$

Definimos una nueva matriz, llamada **matriz de transición**, como

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{F}^{-1}(t) \tag{7-118}$$

Entonces,

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t)\mathbf{x}(0) \tag{7-119}$$

En vez de usar la ecuación 7-118 para calcular $\boldsymbol{\varphi}(t)$, desarrollemos un método alterno.

Solución a partir de los modos característicos Considere la forma diagonal de la ecuación 7-112 para valores característicos distintos. Con $\mathbf{r}(t) = 0$, la ecuación para cada coordenada modal $\mathbf{z}_i$ es

$$z_i' = \lambda_i z_i$$

Es fácil mostrar que la respuesta libre es

$$z_i(t) = z_i(0)e^{\lambda_i t}$$

o, en forma matricial,

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & . & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & . & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & . & . & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{z}(0) \tag{7-120}$$

Representemos la matriz de exponenciales de la ecuación 7-120 como $\boldsymbol{\varphi}_M(t)$. Entonces

$$\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\varphi}_M(t)\mathbf{z}(0) \tag{7-121}$$

La matriz $\boldsymbol{\varphi}_M(t)$ es la **matriz de transición modal**, la cual describe la transición de cada coordenada modal de un punto en el tiempo a otro. La forma diagonal se obtuvo por la transformación $\mathbf{x}(t) = \mathbf{Mz}(t)$. Entonces, $\mathbf{z}(0) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}(0)$, y por la ecuación 7-121,

$$\mathbf{Mz}(t) = \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_M(t)\mathbf{z}(0)$$

o

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_M(t)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{7-122}$$

Ahora ya recuperamos la respuesta libre de la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{r}(t)$ en términos de las variables de estado originales. En analogía con el caso de primer orden escribimos la ecuación 7-122 como $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x}(0)$, donde la **matriz de transición de estado** está dada por:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_M(t)\mathbf{M}^{-1} \tag{7-123}$$

Esta ecuación describe otra manera de obtener la matriz de transición de estado, que es análoga a la función e^{at} para la ecuación de primer orden $x' = ax$. Si $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$, también lo es $\boldsymbol{\varphi}(t)$.

Propiedades de la matriz de transición de estado Es posible deducir algunas propiedades útiles de la matriz de transición estado a partir de las ecuaciones 7-119 y 7-123. Haga que $t = 0$ en la ecuación 7-119 para mostrar que

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{I} \tag{7-124}$$

Si $\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$. Use esto con la derivada de la ecuación 7-119 para obtener

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{\varphi}'(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{Ax}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x}(0)$$

o

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}(t) \tag{7-125}$$

Entonces, $\boldsymbol{\varphi}(t)$ es la solución de la ecuación diferencial 7-125 con la condición inicial de la ecuación 7-124. Despeje $\boldsymbol{\varphi}_M(t)$ de la ecuación 7-123:

$$\boldsymbol{\varphi}_M(t) = \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{M} \tag{7-126}$$

La inversa de la matriz diagonal se encuentra simplemente invirtiendo los elementos de la diagonal. Entonces, como $\boldsymbol{\varphi}_M(t)$ es diagonal y los valores característicos son distintos, $\boldsymbol{\varphi}_M^{-1}(t) = \boldsymbol{\varphi}_M(-t)$. De aquí resulta que

$$\boldsymbol{\varphi}^{-1}(t) = \boldsymbol{\varphi}(-t) \tag{7-127}$$

Esta propiedad evita la necesidad de realizar los cálculos, comúnmente tediosos, para encontrar la inversa de la matriz.

La ecuación 7-119 relaciona $\mathbf{x}(t)$ con el caso inicial en $t = 0$. Sin embargo, como tratamos con la respuesta libre de una ecuación de coeficientes constantes, también podríamos escribir la solución en términos del estado en cualquier tiempo, por ejemplo t_1, como

$$\mathbf{x}(t + t_1) = \boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x}(t_1) \tag{7-128}$$

Pero $\mathbf{x}(t_1) = \boldsymbol{\varphi}(t_1)\mathbf{x}(0)$, y entonces,

$$\mathbf{x}(t + t_1) = \boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}(t_1)\mathbf{x}(0)$$

De haber usado la ecuación 7-128 inmediatamente, hubiéramos obtenido

$$\mathbf{x}(t + t_1) = \boldsymbol{\varphi}(t + t_1)\mathbf{x}(0)$$

La comparación de las dos últimas ecuaciones comprueba que

$$\boldsymbol{\varphi}(t + t_1) = \boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}(t_1) \tag{7-129}$$

para cualquier t y t_1. Asimismo, como $\varphi(t + t_1) = \varphi(t_1 + t)$, se mantiene la propiedad conmutativa. Entonces,

$$\varphi(t)\varphi(t_1) = \varphi(t_1)\varphi(t) \tag{7-130}$$

Finalmente, si hacemos $t = t_1 = \Delta$ en la ecuación 7-129, vemos que

$$\varphi(2\Delta) = \varphi(\Delta)\varphi(\Delta) = \varphi^2(\Delta)$$

o, en general,

$$\varphi(n\Delta) = \varphi^n(\Delta) \tag{7-131}$$

Esta propiedad es especialmente útil para soluciones numéricas, ya que las computadoras pueden multiplicar matrices rápidamente.

EJEMPLO 7-30 Matriz de transición para un sistema resorte-masa-amortiguador

a) Encuentre la matriz de transición para un sistema resorte-masa-amortiguador con $m = 1$, $c = 7$ y $k = 10$. La ecuación diferencial es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

b) Encuentre el desplazamiento $x_1 = x$ y la velocidad $x_2 = \dot{x}$ de la masa en los tiempos $t = 0.1$ y $t = 0.2$, si el desplazamiento inicial es $x_1(0) = 3$ y la velocidad inicial es $x_2(0) = 0$.

c) Si el desplazamiento y la velocidad en $t = 0.1$ se miden como $x_1(0.1) = 0.5013$ y $x_2(0.1) = -0.2141$, ¿qué condiciones iniciales produjeron este movimiento?

Solución *a*) El polinomio característico es $m\lambda^2 + c\lambda + k = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$. Los valores característicos son $\lambda = -2$ y -5. Los vectores característicos pueden normalizarse como

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

y la matriz de transformación modal con su inversa son

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de transición modal es

$$\varphi_M(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix}$$

La matriz de transición de estado se encuentra mediante la ecuación 7-123:

$$\varphi(t) = \mathbf{M}\varphi_M(t)\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (5e^{-2t} - 2e^{-5t}) & (e^{-2t} - e^{-5t}) \\ (10e^{-2t} + 10e^{-5t}) & (-2e^{-2t} + 5e^{-5t}) \end{pmatrix}$$

b) Aquí se separan los tiempos de evaluación $t = 0.1$, 0.2 para el mismo intervalo, de modo que podamos evaluar $\varphi(t)$ una vez para $t = 0.1$ y usar la ecuación 7-128:

$$\varphi(0.1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2.8806 & 0.21220 \\ -2.1220 & 1.3952 \end{pmatrix}$$

Entonces $$\mathbf{x}(0.1) = \varphi(0.1)\mathbf{x}(0) = \varphi(0.1)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8806 \\ -2.1220 \end{pmatrix}$$

También, $$\mathbf{x}(0.2) = \varphi(0.1)\mathbf{x}(0.1) = \begin{pmatrix} 2.6159 \\ -3.0244 \end{pmatrix}$$

c) Dada $\mathbf{x}(0.1)$, usamos la propiedad dada por la ecuación 7-127 para obtener $\mathbf{x}(0)$:

$$\mathbf{x}(0) = \varphi^{-1}(0.1)\mathbf{x}(0.1) = \varphi(-0.1)\mathbf{x}(0.1)$$

Esto da $$\mathbf{x}(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2.8806 & -0.4273 \\ 4.273 & 5.8008 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5013 \\ -0.2141 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Solución por series para la matriz de transición La forma escalar de la ecuación vectorial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es $x' = ax$ y su solución es $x(t) = e^{at}x(0)$. Pero podemos representar e^{at} como la serie:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \cdots + \frac{(at)^k}{k!} + \cdots$$

Por tanto, tiene sentido probar la siguiente solución de serie para $\varphi(t)$, que es la solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} + \cdots \tag{7-132}$$

Usted puede probar que esta es la solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ derivando la serie término a término (vea el problema 7-168). Debido a la similitud con la expansión en series para la exponencial escalar e^{at}, la matriz de transición $\varphi(t)$ se llama algunas veces **matriz exponencial** y se simboliza como $e^{\mathbf{A}t}$. La representación en series es especialmente adecuada para calcular la matriz de transición para un valor particular de t con la computadora, porque solo necesita la multiplicación repetida de la matriz **A**.

Repaso de la sección

En cada uno de los siguientes problemas, encuentre los vectores característicos, la matriz modal y la forma canónica de Jordan para la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, cuya matriz **A** está dada. Determine si los vectores característicos son linealmente independientes o no. Obtenga la solución desacoplando las ecuaciones.

7-34 $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(*Respuesta:* $\lambda = -2, -6$; $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$; y linealmente independientes, $x_1 = 2c_1e^{-2t} - 2c_2e^{-6t}$, $x_2 = c_1e^{-2t} + c_2e^{-6t}$.)

7-35 $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(*Respuesta:* $\lambda = 2, 2$ $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; linealmente dependientes. $x_1 = c_1e^{2t} - c_2e^{2t} - c_1te^{2t}$, $x_2 = c_2e^{2t} + c_1te^{2t}$.)

7-8 ▪ MÉTODOS COMPUTACIONALES

Los programas de cómputo disponibles comúnmente pueden encontrar valores y vectores característicos así como la matriz de transición (matriz exponencial) tanto en forma simbólica como numérica (excepto MATLAB, que tiene solo capacidad numérica en ausencia de los accesorios MuPAD y Symbolic Math Toolbox). Sin embargo, para matrices grandes, tal vez no sea viable obtener una solución simbólica, y aun cuando lo sea, podría ser demasiado aparatosa e inútil. Como no hay alguna fórmula disponible para las raíces de una ecuación polinomial de grado mayor de cuatro, usted puede esperar que este sea el límite para resultados simbólicos. La ventaja de los métodos matriciales es que pueden manejar sistemas con un gran número de ecuaciones, y esto requiere una solución numérica para los valores característicos y los vectores característicos.

Estos programas también pueden resolver numéricamente conjuntos grandes de ecuaciones sin necesidad de mucha programación. Su facilidad de uso proviene en parte porque usan la forma estándar de matriz de variables. Estos métodos se tratan más adelante en esta sección.

Valores característicos y vectores característicos Usaremos lo siguiente como nuestro caso de prueba:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Los valores característicos con cuatro cifras decimales son -2.618, -0.3820, y los vectores característicos son

$$\begin{pmatrix} -0.5257 \\ 0.8507 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0.8507 \\ 0.5257 \end{pmatrix}$$

Diferentes programas normalizarán los vectores característicos de distintas formas. Una manera común es ajustar las componentes del vector de modo que su magnitud (su longitud geométrica) sea 1. Este es el caso aquí, porque $\sqrt{(-0.5257)^2 + (0.8507)^2}$

= 1. Los resultados de vectores característicos también pueden normalizarse de modo que uno de los componentes de cada vector característico sea 1. Los comandos mostrados en la tabla 7-1 presentan una lista en la que se señalan en primer lugar los valores característicos, seguidos de los vectores característicos. Una excepción es MATLAB, que indica los vectores característicos en la variable `v` y los valores característicos como los elementos diagonales de la matriz `Lambda`. MATLAB también puede calcular la forma canónica de Jordan tecleando `[v,J] = jordan(A)`. La matriz `v` contiene los vectores característicos, y **J** es la matriz de Jordan. Para la matriz **A** antes dada, obtenemos

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -2.6180 & 0 \\ 0 & -0.3820 \end{pmatrix}$$

Matriz de transición (matriz exponencial) Para nuestro caso de prueba usamos la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Su matriz de transición es

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

La tabla 7-2 muestra cómo obtener esta matriz. Observe que la función MATLAB `expm(A)` calcula numéricamente $e^{\mathbf{A}}$ y, por tanto, *no* calcula la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$.

TABLA 7-1

Valores característicos y vectores característicos de la matriz.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

MATLAB

```
A = [-1,1;1,-2];
[v, Lambda] = eig(A)
```

Symbolic Math Toolbox

```
A = [-1,1;1,-2];
[v, Lambda] = eig(A)
```

MuPAD

Para resultados simbólicos:

```
A := matrix([[-1,1],[1,-2]])
linalg::eigenvectors(A)
```

Para resultados numéricos:

```
A := matrix([[-1,1],[1,-2]])
numeric::eigenvectors(A)
```

Maple

```
with(LinearAlgebra)
A := matrix([[-1,1;1,-2]]);
Eigenvectors(A)
```

Mathematica

```
A = {{-1,1},{1,-2}}
Eigensystem[A]
```

TABLA 7-2

Matriz de transición para

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Symbolic Math Toolbox

```
syms t
A = [0 1; -1 0];
expm(A*t);
simplify(ans)
```

Maple

```
with(LinearAlgebra)
A := Matrix([[0,1],[-1,0]])
MatrixExponential(A*t)
```

Mathematica

```
A = {{0,1},{-1,0}}
MatrixExp[A t]
```

Forma estándar de variable de estado Los conjuntos de orden superior de ecuaciones diferenciales no tienen soluciones sencillas (fáciles de usar), de modo que deben resolverse numéricamente. Aunque los métodos de resolución numérica contenidos en el capítulo 9 pueden resolver cualquier ecuación diferencial o conjuntos de ecuaciones, MATLAB y otros programas comerciales aprovechan el hecho de que la *forma* de las soluciones de ecuaciones *lineales* siempre puede determinarse, por lo menos en parte, especialmente cuando los coeficientes son constantes. Esto se debe a que las raíces características siempre pueden obtenerse numéricamente, y estas raíces determinan parte de la forma de la solución. Por esta razón, MATLAB y otros programas contienen funciones específicamente diseñadas para resolver ecuaciones lineales. La ventaja es que estas funciones son más eficientes y fáciles de usar que los métodos más generales que se tratan en el capítulo 9.

Como la forma de matriz de variables de estado

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{7-133}$$

puede representar *cualquier* conjunto de ecuaciones lineales, forma la base para especificar tales ecuaciones para resolución por computadora. Podemos usar los símbolos que escojamos para las variables de estado y las funciones de entrada o funciones de fuerza, pero una selección común es x_i para las variables de estado y u_i para las funciones de entrada. Sea n el número de variables de estado y m el número de entradas. De modo que las dimensiones de los vectores y las matrices son así:

- El *vector de estado* **x** es un vector columna que tiene n renglones.
- La *matriz de sistema* **A** es una matriz cuadrada que tiene n renglones y n columnas.
- El *vector de entrada* **u** es un vector columna que tiene m renglones.
- La *matriz* de *control* o *entrada* **B** tiene n renglones y m columnas.

Sin embargo, a veces no queremos trazar todas las variables en la solución, por lo que necesitamos una manera de especificar cuáles variables van a trazarse. Algunos programas y ciertos métodos de diseño necesitan que usted defina un *vector de salida*, usualmente simbolizado como **y**. El vector de salida contiene las variables de interés para el problema específico. Estas variables no son necesariamente de estado, pero pueden ser alguna combinación de las variables de estado y las entradas. Por ejemplo, en el modelo de resorte-masa-amortiguador, podríamos estar interesados en la fuerza total $f - kx - ck'$ que actúa sobre la masa, y en el momento mx'. En este caso, el vector de salida tiene dos elementos. Si las variables de estado son $x_1 = x$ y $x_2 = x'$ y el vector de entrada $\mathbf{u}$ es la fuerza escalar f, el vector de salida es

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f - kx - cx' \\ mx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f - kx_1 - cx_2 \\ mx_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k & -c \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} f = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

donde $$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -k & -c \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este es un ejemplo de la forma general:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \tag{7-134}$$

Esta es la forma estándar de matriz vectorial de la ecuación de salida, donde el número de salidas es p, el de variables de estado es n y el de entradas es m. Las dimensiones son las siguientes:

- El *vector de salida* $\mathbf{y}$ es un vector columna que tiene p renglones.
- La *matriz de salida de estado* $\mathbf{C}$ tiene p renglones y n columnas.
- La *matriz de control de salida* $\mathbf{D}$ tiene p renglones y m columnas.

Las matrices $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ siempre pueden encontrarse cada vez que el vector de salida seleccionado $\mathbf{y}$ sea una combinación lineal de las variables de estado y las entradas. Sin embargo, si la salida es una función no lineal, entonces la forma estándar (ecuación 7-134) no se aplica. Este sería el caso, por ejemplo, si se decide que la salida sea la energía cinética del sistema: $m(x')^2/2$.

Ahora ilustramos estos métodos usando MATLAB, pero la forma de la variable de estado es la notación que se usa universalmente para programas que manejan sistemas lineales. Cuando las matrices de coeficientes $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son constantes, el conjunto de ecuaciones se llama objeto *invariante en tiempo lineal* (LTI). Para crear un objeto LTI a partir de un modelo de estado, se usa la función `ss(A, B, C, D)`, donde `ss` significa “state space” (espacio de estado), y los argumentos matriciales de la función son las matrices en la forma estándar de un modelo de estado dado por las ecuaciones 7-133 y 7-134.

Por ejemplo, para crear un objeto LTI en forma de modelo de estado para el sistema descrito por

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = -4x_1 - 7x_2 + 5f(t)$$

donde x_1 es la salida deseada, el código de MATLAB es:

```
A = [0, 1; -4, -7];
B = [0; 5];
C = [1, 0];
D = 0;
sys1 = ss(A,B,C,D);
```

donde `sys1` es un nombre escogido arbitrariamente para el objeto LTI creado por la función `ss`.

El Control System Toolbox de MATLAB proporciona diversas herramientas de resolución para modelos lineales expresados en la forma de variable de estado. Estas herramientas de resolución se clasifican por el tipo de función de entrada que pueden aceptar: entrada cero, entrada de impulsos, entrada por pasos y una función general de entrada. La función `initial` calcula y grafica la respuesta libre de un modelo de estado. Esta respuesta a veces se llama *respuesta de condiciones iniciales* o *respuesta no controlada* (*undriven response*, en inglés) en la documentación de MATLAB. La sintaxis básica es `initial(sys,x0)`, donde *sys* es el objeto LTI en forma de variable de estado, y `x0` es el vector de condiciones iniciales. El intervalo y el número de puntos de solución se seleccionan automáticamente. Ésta es una característica muy útil.

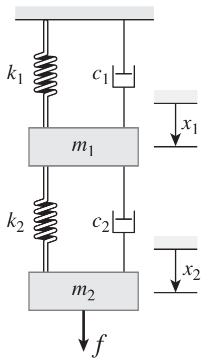


FIGURA 7-54
Modelo de un sistema de dos masas con una fuerza aplicada $f(t)$.

EJEMPLO 7-31 Respuesta libre de un modelo de dos masas

Las ecuaciones de movimiento para el sistema de dos masas que se muestra en la figura 7-54 se reducen a las siguientes ecuaciones para los valores específicos de los coeficientes: $m_1 = 5$, $m_2 = 3$, $c_1 = 4$, $c_2 = 8$, $k_1 = 1$ y $k_2 = 4$.

$$5x_1'' + 12x_1' + 5x_1 - 8x_2' - 4x_2 = 0$$

$$3x_2'' + 8x_2' + 4x_2 - 8x_1' - 4x_1 = f(t)$$

Grafique $x_1(t)$ y $x_1{}'(t)$ de respuesta libre para las condiciones iniciales $x_1(0) = 5$, $x_1'(0) = -3$, $x_2(0) = 4$ y $x_2'(0) = 2$.

Solución Eligiendo que las variables de estado sean x_1, x_2, $x_3 = x_1'$, $x_4 = x_2'$, las ecuaciones de estado son

$$x_1' = x_3 \quad x_2' = x_4$$

$$x_3' = \frac{1}{5}(-5x_1 + 4x_2 - 12x_3 + 8x_4)$$

$$x_4' = \frac{1}{3}(4x_1 - 4x_2 + 8x_3 - 8x_4) + \frac{1}{3}f(t)$$

Las matrices del sistema y de entrada son

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{4}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Debemos relacionar las condiciones iniciales dadas en términos de las variables originales con las variables de estado. Se puede ver que $x_3(0) = x_1'(0) = -3$ y $x_4(0) = x_2'(0) = 2$. En seguida debemos seleccionar correctamente las matrices de salida. Como se nos pidió que grafiquemos $x_1(t)$ y $x_3(t)$, el vector de salida $\boldsymbol{y}$ es $(x_1, x_3)^T$. Como la entrada es un valor escalar, $u = f(t)$, la ecuación de salida es

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} f(t)$$

Entonces,
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El programa de MATLAB es el siguiente:

```
A = [0, 0, 1, 0; 0,0,0,1;-1,4/5,-12/5,8/5;...
      4/3,-4/3,8/3,-8/3];
B = [0; 0; 0; 1/3];
C = [1, 0, 0, 0;0,0,1,0]; D = [0;0];
sys2 = ss(A, B, C, D);
initial(sys2, [5, 4, -3, 2])
```

La gráfica de $x_1(t)$ y $x_3(t)$ se mostrará en pantalla usando las etiquetas estándar de ejes y títulos, como se muestra en la figura 7-55. La primera salida (x_1) se muestra en la gráfica superior, y la segunda salida (x_3) en la gráfica inferior. Observe que el intervalo se elige automáticamente por un algoritmo basado en las raíces características, que determinan el tiempo de respuesta. Las respuestas de estado uniforme se muestran en líneas punteadas.

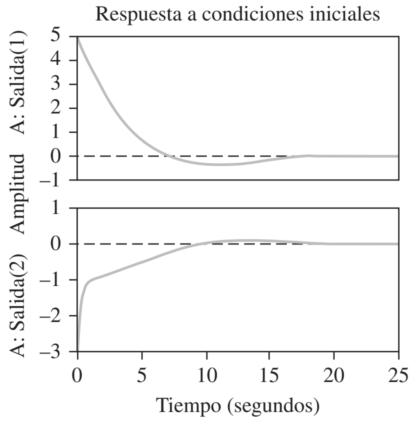


FIGURA 7-55
Respuesta libre para el ejemplo 7-31.

Para especificar el tiempo final, digamos `tfinal`, use la sintaxis `initial(sys, x0, tfinal)`. Para establecer un vector de tiempos en la forma `t = [0:dt:tfinal]`, en el cual debe obtenerse la solución, use la sintaxis `initial (sys, x0, t)`. Cuando se llama con argumentos del lado izquierdo, como `[y, t] = initial (sys, x0)`, la función devuelve la respuesta de salida `y` y el tiempo vector `t` usado para la simulación. No se traza ninguna gráfica. El formato `y` es ($q \times p \times m$) donde q es `length (t)`, p es el número de salidas y m el de entradas.

MATLAB proporciona las funciones `impulse, step` y `lsim` para usarse con modelos de variables de estado. Una entrada de impulso es una entrada que se aplica y suspende rápidamente; se describe en el capítulo 8. Si el área bajo su curva es una unidad, entonces se llama impulso *unitario*. La respuesta a un impulso unitario que comienza en $t = 0$ se encuentra tecleando `impulse (sys)`. Si la entrada tiene un área A, teclee `impulse (A*sys)`. La respuesta a un impulso unitario de pasos comenzando en $t = 0$ se encuentra tecleando `step (sys)`. Si el impulso de pasos tiene una magnitud M, teclee `step (M*sys)`.

La función `lsim` puede usarse para graficar la solución de un modelo LTI con cualquier función de entrada `u` que pueda programarse. La sintaxis es `lsim (sys, u, t, x0)`. El vector de condición inicial `x0` solo se necesita si las condiciones iniciales son diferentes de cero. Por ejemplo, para graficar $x_1(t)$ y $x_3(t)$ del modelo `sys2` dado en el ejemplo 7-29 cuando la entrada es $f(t) = 4$ sen $7t$, $0 \leq t \leq 30$ usando un tamaño de paso de 0.01, el código de MATLAB es

```
A = [0, 0, 1, 0; 0,0,0,1;-1,4/5,-12/5,8/5;...
     4/3,-4/3,8/3,-8/3];
B = [0; 0; 0; 1/3];
C = [1, 0, 0, 0;0,0,1,0]; D = [0;0];
sys2 = ss(A, B, C, D);
t = 0:0.01:30;
u = 4*sin(7*t);
x0 = [5, 4, -3, 2];
lsim(sys2,u,t,x0)
```

La sintaxis extendida de las funciones `impulse, step` y `lsim` con argumentos del lado izquierdo, como `[y, t]`, es la misma que la de la función `initial`.

Tanto Maple como Mathematica tienen funciones para simular conjuntos de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes descritas en la forma estándar de variables de estado, ecuaciones 7-133 y 7-134.

Simulación de sistemas lineales en Maple El programa DynamicSystems en Maple es una colección de procedimientos para crear, manipular, simular y graficar modelos de sistemas lineales que se definen en términos de matrices de espacio de estado. Es posible crear funciones de entrada tales como seno, rampa y funciones de paso usando comandos de generación de señales tales como `Step (height, t0)`. Las herramientas estándar de trazado de gráficas tales como `ResponsePlot (sys, input, opts)` pueden usarse para graficar objetos LTI.

Simulación de sistemas lineales en Mathematica El accesorio Control System Professional de Mathematica tiene funciones para crear, manipular, simular y graficar modelos de sistemas lineales que se diseñan en términos de matrices de espacio de estado. Cree un objeto LTI `sys` con `StateSpace (A, B, C, D)`. Luego use `SimulationPlot [sys, u, {t, t, max}]` para graficar las respuestas de la variable de estado a la función de entrada `u`.

7-9 ▪ RESUMEN

Los sistemas de ecuaciones diferenciales se presentan en forma natural en el análisis de muchos problemas prácticos que incluyen dos o más sistemas físicamente acoplados. Las funciones incógnitas de tales sistemas son interdependientes, y deben determinarse simultáneamente. Los sistemas de ecuaciones simultáneas incluyen las derivadas de dos o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, usualmente el tiempo t. Las ecuaciones diferenciales que forman un sistema pueden ser de órdenes diferentes. Sin embargo, para dar uniformidad al tratamiento de sistemas de ecuaciones diferenciales, es práctica común transformar tales sistemas en un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden. Cualquier ecuación diferencial de orden n siempre puede transformarse en un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden.

Clasificación Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales es *lineal* si cada ecuación individual del sistema lo es; que un sistema es *no lineal* si, al menos, una sola ecuación incluye un solo término no lineal; que un sistema lineal de ecuaciones diferenciales es *homogéneo* si cada ecuación individual del sistema es homogénea; que un sistema es *no homogéneo* si, al menos, una sola ecuación incluye un solo término no homogéneo; que un sistema de ecuaciones diferenciales tiene *coeficientes constantes* si cada ecuación en el sistema en la forma estándar tiene coeficientes constantes, y que un sistema tiene *coeficientes variables* si, al menos, una sola ecuación tiene un coeficiente variable (una función de la variable independiente).

Procedimientos de solución Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales puede resolverse usando un procedimiento sistemático, pero aun los sistemas lineales pueden ser difíciles de resolver si incluyen coeficientes variables porque es común que la solución en tales casos incluya series infinitas. Por tanto, en este capítulo se enfatizaron los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

Tanto el método de eliminación como el de valores característicos tratados en el capítulo 6 son operativamente sencillos, pero no son prácticos para sistemas con más de dos o tres ecuaciones. Se vuelven extremadamente tediosos y complicados al aumentar el número de ecuaciones en el sistema. Los sistemas grandes pueden resolverse en forma más eficiente y sistemática con el *método matricial*, también llamado *método de vectores característicos*.

Forma estándar de matriz La notación matricial ofrece gran ventaja al resolver sistemas grandes de ecuaciones algebraicas o diferenciales. La forma general de un conjunto lineal de ecuaciones es $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}(t)$. La matriz $\mathbf{A}$ que contiene todos los coeficientes de las incógnitas se llama *matriz de coeficientes*. El vector $\mathbf{x}$ que contiene todas las incógnitas se llama *vector de incógnitas*. El vector $\mathbf{r}$ que contiene todos los términos que no incluyen como factor ninguna incógnita se llama *vector de términos independientes* en sistemas de ecuaciones algebraicas, y *vector no homogéneo* en sistemas de ecuaciones diferenciales. Si $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ se dice que el sistema de ecuaciones es *homogéneo*; de no ser así, se dice que es *no homogéneo*.

Unicidad y linealidad Si los coeficientes y los términos no homogéneos son continuos en un intervalo $t_1 < t < t_2$ que contiene el punto t_0, entonces el sistema de n ecuaciones lineales de primer orden $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{r}(t)$ tiene una *solución única* en ese intervalo, que satisface un conjunto dado de condiciones iniciales en t_0. Si dos o más funciones vectoriales son soluciones de un sistema lineal homogéneo, también lo es su combinación lineal.

Independencia lineal Un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales homogéneas siempre tiene n soluciones linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n$ en un intervalo $t_1 < t < t_2$ en el que los elementos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ son continuos. Además, la *solución general* de este sistema en ese intervalo puede expresarse como una combinación lineal de estas n soluciones como

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

donde $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ son constantes arbitrarias. También, si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son soluciones de las n ecuaciones diferenciales lineales homogéneas del sistema en un intervalo $t_1 < t < t_2$ en el que los elementos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ son continuos, entonces el wronskiano de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ es siempre cero (lo cual indica que estas n soluciones son linealmente dependientes) o nunca cero (lo cual indica que estas n soluciones son linealmente independientes) en ese intervalo. Esto se conoce como *identidad de Abel*. La solución general de sistemas no homogéneos se obtiene sumando una solución particular a la solución general del sistema homogéneo asociado.

Valores característicos reales y distintos Cuando los n valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ de un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con coeficientes constantes con n incógnitas son reales y distintos, entonces los n vectores característicos asociados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ siempre son reales y linealmente independientes.

Entonces, los vectores solución $\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$ también son linealmente independientes, y la solución general de este sistema puede expresarse como

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \qquad \textbf{(7-73)}$$

Valores característicos complejos Cuando la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es real, cualesquiera valores característicos complejos y sus correspondientes vectores característicos deben aparecer en pares complejos conjugados. Si $\mathbf{v} = \mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$ son los vectores característicos correspondientes a los valores característicos $\lambda = \alpha \pm i\beta$, entonces los dos vectores solución de valor real linealmente independientes correspondientes a éstos pueden expresarse como

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\operatorname{sen}\beta t) \qquad \textbf{(7-76}\boldsymbol{a}\textbf{)}$$

y

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\operatorname{sen}\beta t - \mathbf{b}\cos\beta t) \qquad \textbf{(7-76}\boldsymbol{b}\textbf{)}$$

Valores característicos repetidos Cuando un valor característico de multiplicidad k tiene menos de k vectores característicos linealmente independientes asociados con éste, hay menos de k vectores solución linealmente independientes de la forma $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ asociados con dicho valor característico. En ese caso, debemos buscar soluciones en otra forma para compensar el déficit en el número de soluciones linealmente independientes asociadas con dicho valor característico. Dos vectores solución linealmente independientes correspondientes a un valor característico λ de multiplicidad 2 con un solo vector característico linealmente independiente $\mathbf{v}$ asociado con dicho valor se expresan como

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t} \qquad \textbf{(7-77)}$$

y

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{v}te^{\lambda t} + \mathbf{u}e^{\lambda t} \qquad \textbf{(7-78)}$$

donde el vector constante $\mathbf{u}$ se determina a partir de

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{v} \qquad \textbf{(7-80}\boldsymbol{b}\textbf{)}$$

Hay tres posibilidades asociadas con un valor característico λ de multiplicidad 3. Si el triple valor característico λ tiene tres vectores característicos linealmente independientes $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ asociados con éste, las tres soluciones linealmente independientes correspondientes al valor son simplemente

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda t}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 e^{\lambda t} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{v}_3 e^{\lambda t} \qquad \textbf{(7-83)}$$

Si el valor característico triple λ tiene dos vectores característicos linealmente independientes $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ asociados con el valor, las tres soluciones linealmente independientes correspondientes con el valor se vuelven

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda t}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 e^{\lambda t} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{v}_3 te^{\lambda t} + \mathbf{u}e^{\lambda t}$$

donde el vector constante $\mathbf{u}$ se determina a partir de la ecuación 7-80b usando la combinación lineal $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$ para $\mathbf{v}$.

Si el triple valor característico λ tiene un solo vector característico linealmente independiente $\mathbf{v}$ asociado, entonces las tres soluciones linealmente independientes asociadas con dicho valor son

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}e^{\lambda t}, \mathbf{x}_2 = \mathbf{v}te^{\lambda t} + \mathbf{u}e^{\lambda t} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{v}t^2 e^{\lambda t} + \mathbf{u}te^{\lambda t} + \mathbf{w}e^{\lambda t}$$

donde los vectores constantes $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ se determinaron a partir de

$$(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{y} \quad (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{u} \qquad \textbf{(7-89)}$$

Soluciones particulares El método de coeficientes indeterminados para determinar una solución particular es esencialmente idéntico tanto para ecuaciones individuales no homogéneas como para sistemas de ecuaciones no homogéneos. Pero en sistemas, los coeficientes se consideran vectores constantes en vez de escalares constantes; además, en las ecuaciones individuales, cuando un término no homogéneo es una solución de la ecuación homogénea asociada, la forma básica de la solución particular se multiplica por la potencia k de t, donde t es la variable independiente y k es el entero más pequeño que elimina toda duplicidad entre la solución homogénea y la solución particular. Pero en sistemas, multiplicamos la forma básica de la solución particular por un polinomio de grado k en t, en vez de hacerlo solamente por la potencia k de t. El método de coeficientes indeterminados es práctico solo cuando todas las ecuaciones del sistema tienen coeficientes constantes y los términos no homogéneos pueden incluir como factores solo polinomios, funciones exponenciales y funciones de seno y coseno.

Cuando la solución homogénea $\mathbf{x}_h$ y, por tanto, la matriz fundamental $\mathbf{F}$ están disponibles, la solución particular de un sistema homogéneo puede obtenerse directamente con el método de variación de parámetros como

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{F}(t)\int \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t)\,dt + \mathbf{F}(t)\mathbf{k} \qquad \textbf{(7-99)}$$

donde el vector constante arbitrario $\mathbf{k}$ puede tomarse como cero o como cualquier otro vector constante conveniente. Cuando se establece un conjunto de condiciones iniciales, la solución de un sistema no homogéneo que satisfaga estas condiciones iniciales puede determinarse directamente a partir de

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\left[\mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{r}(t)\,dt\right] \qquad \textbf{(7-106)}$$

donde $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ es el conjunto específico de condiciones iniciales en $t = t_0$. Entonces, el método de variación de parámetros nos permite determinar la solución de sistemas no homogéneos con un conjunto de condiciones iniciales directamente de manera sistemática.

Modos y variables modales Los vectores característicos pueden usarse para definir un nuevo conjunto de variables, que se llaman variables modales o modos, en el que la matriz de coeficientes es diagonal si los valores característicos son distintos, y casi diagonal si algunos de los valores característicos se repiten. Esto resulta en la llamada forma canónica de Jordan para la matriz de coeficientes; esta representación proporciona una mejor comprensión de la respuesta total del sistema. Este procedimiento también suministra otra forma de obtener la matriz de transición, que puede usarse para obtener las respuestas libre y forzada del sistema de una manera ordenada.

Función de los métodos de computadora La ventaja de los métodos matriciales es que pueden manejar sistemas con un gran número de ecuaciones, y para esto se necesita una solución numérica para los valores característicos y los vectores característicos. Los programas de cómputo comúnmente disponibles pueden encontrar los valores característicos, los vectores característicos y la matriz de transición (matriz exponencial) en forma tanto simbólica como numérica. Sin embargo, para matrices grandes tal vez no pueda obtenerse una solución simbólica y, aun cuando sea posible, quizá sea demasiado aparatosa para ser útil. Como no hay fórmula disponible para las raíces de un polinomio de grado mayor de cuatro, usted puede esperar que éste sea el límite para resultados simbólicos.

PROBLEMAS

Sección 7-1 Repaso de matrices

7-36C ¿Dos matrices tienen que ser del mismo tamaño para sumarse? ¿Tienen que ser del mismo tamaño para multiplicarse?

7-37C ¿Cómo se define la inversa de una matriz? ¿Cuándo es singular una matriz? ¿Cuándo es no singular?

7-38C ¿Cómo se define la derivada de una función matricial? ¿Cómo se define la integral de una función matricial?

7-39 Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

determine *a)* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, *b)* $2\mathbf{A}$, *c)* $3\mathbf{A} - \mathbf{B}$ y *d)* $-3\mathbf{AB}$.

7-40 Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

determine *a)* $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, *b)* $-4\mathbf{A}$, *c)* $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ y *d)* $2\mathbf{BA}$.

7-41 Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 11 & -9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

determine *a)* $5\mathbf{A}$, *b)* $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$, *c)* $2\mathbf{AB}$ y *d)* $\det \mathbf{A}$.

7-42 Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

determine *a)* $-4\mathbf{A}$, *b)* $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$, *c)* $2\mathbf{AB}$ y *d)* $\det \mathbf{A}$.

7-43 Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

determine *a)* $\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$, *b)* $\mathbf{AB}$, *c)* $\mathbf{BA}$ y *d)* $\det \mathbf{A}$.

7-44 Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

determine *a)* $4\mathbf{A}$, *b)* $\mathbf{AB}$ y *c)* $\mathbf{A}^T + 2\mathbf{B}$.

7-45 Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 11 & -9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

verifique que *a)* $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, *b)* $2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ y *c)* $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

7-46 Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

verifique que *a)* $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$, *b)* $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ y *c)* $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

7-47 Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

verifique que *a)* $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$, *b)* $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ y *c)* $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

7-48 Si

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 - 1 & 2\cos 2t \\ e^{-t} & 0 \end{pmatrix}$$

determine si *a)* $\int_0^t \mathbf{A}(t)dt$ y *b)* $d\mathbf{A}(t)/dt$.

7-49 Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-t} & 3\,\text{sen}\,3t \\ e^{-2t} & t+1 \end{pmatrix}$$

determine si *a)* $\int_0^t \mathbf{A}(t)dt$ y *b)* $d\mathbf{A}(t)/dt$.

7-50 Si

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 2 & e^t \\ e^{-t} & \cos 2t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

determine *a)* $\mathbf{B}\int_0^1 \mathbf{A}(t)dt$, *b)* $\int_0^1 \mathbf{BA}(t)dt$, *c)* $\mathbf{B}d\mathbf{A}(t)/dt$ y *d)* $d[\mathbf{BA}(t)]/dt$

7-51 Si

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & e^{-t} \\ e^t & \text{sen}\,2t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

determine *a)* $\mathbf{B}\int_0^1 \mathbf{A}(t)dt$, *b)* $\int_0^1 \mathbf{BA}(t)dt$, *c)* $\mathbf{B}d\mathbf{A}(t)/dt$ y *d)* $d[\mathbf{BA}(t)]/dt$

7-52 Si

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} t+1 & e^{-t} \\ e^t & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & e^t \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

determine *a*) $\mathbf{B}\int_0^1 \mathbf{A}(t)dt$, *b*) $\int_0^1 \mathbf{B}(t)\mathbf{A}(t)dt$, *c*) $\mathbf{B}(t)d\mathbf{A}/dt$ y *d*) $d[\mathbf{B}(t)\mathbf{A}(t)]/dt$

Sección 7-2 Modelos en forma matricial

7-53 Considere el sistema que se muestra en la parte *a*) de la figura P7-53. Los diagramas de cuerpo libre se muestran en la parte *b*) de la figura. Obtenga la ecuación de movimiento, seleccione un conjunto adecuado de variables de estado $\mathbf{x}$ y encuentre las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ necesarias para poner la ecuación de movimiento en la forma $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}f(t)$.

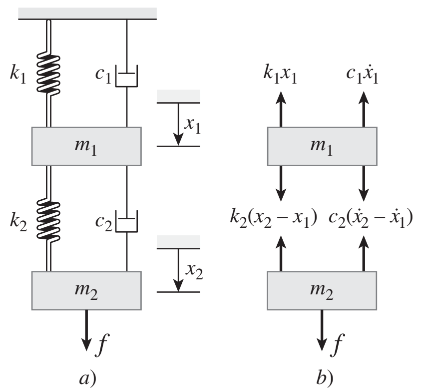


FIGURA P7-53

7-54 La figura P7-54 muestra dos péndulos acoplados por un resorte. Las ecuaciones de movimiento para pequeños ángulos son

$$m_1L_1^2\theta_1'' = -m_1g_1L_2\theta_1 - kL_1(L_1\theta_1 - L_1\theta_2)$$
$$m_2L_2^2\theta_2'' = -m_2gL_2\theta_2 + kL_1(L_1\theta_1 - L_1\theta_2)$$

Seleccione un conjunto adecuado de variables de estado $\mathbf{x}$ y encuentre las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ necesarias para poner las ecuaciones de movimiento en la forma $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

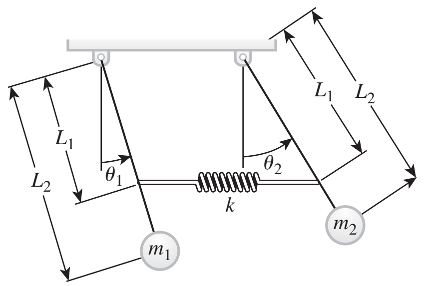


FIGURA P7-54

Sección 7-3 Valores característicos y vectores característicos

7-55C ¿Qué operaciones en la matriz aumentada se conocen como operaciones con renglones? ¿A qué corresponden en un sistema de ecuaciones lineales algebraicas? ¿Cuál es el propósito de las operaciones con renglones en la matriz aumentada? ¿Podemos tener operaciones en columna en analogía con las operaciones con renglones?

7-56 ¿Cómo se determina la inversa de una matriz mediante reducción por renglones?

7-57C ¿Qué puede usted decir acerca de la solución de un sistema lineal de ecuaciones algebraicas *a*) homogéneas y *b*) no homogéneas, si la matriz de coeficientes del sistema es no singular?

7-58C ¿Puede un sistema de ecuaciones algebraicas homogéneas tener una solución no trivial única?

7-59C Considere dos vectores de igual tamaño. ¿Cómo determinaría usted si son linealmente dependientes o independientes? Responda la misma pregunta para funciones vectoriales en un intervalo específico.

7-60C Considere una matriz cuadrada constante $\mathbf{A}$ de orden n y un solo valor característico λ. ¿Cómo se determina el vector característico $\mathbf{v}$ de esta matriz correspondiente a λ? ¿Cuántos vectores característicos correspondientes a λ puede tener esta matriz? ¿Cuántos de estos vectores característicos pueden ser linealmente independientes?

7-61C ¿Cuál es el número de vectores característicos linealmente independientes de una matriz $\mathbf{A}$ asociados con un valor característico λ de multiplicidad k? Responda la misma pregunta para el caso especial de que $\mathbf{A}$ sea una matriz simétrica real.

7-62C Considere dos valores característicos λ_1 y λ_2 que son complejos conjugados entre sí. Si el vector característico correspondiente a λ_1 es $\mathbf{v}_1$, ¿cuál cree usted que será el vector característico correspondiente a λ_2?

7-63C Demuestre que n vectores, cada uno con m componentes, son linealmente dependientes si $m < n$.

Para los siguientes problemas, primero determine si existe la inversa de las siguientes matrices y, si existe, obténgala:

7-64 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

7-65 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7-66 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

7-67 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & -6 \\ -5 & 3 & -7 & 0 \\ -8 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

7-68 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

7-69 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 11 & -9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7-70 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

7-71 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

7-72 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

7-73 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

7-74 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Para los siguientes problemas, primero determine si los siguientes sistemas de ecuaciones algebraicas tienen soluciones y, de ser así, encuentre todas las soluciones:

7-75 *a*) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 6x_2 &= 5 \end{aligned}$ *d*) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$

7-76 *a*) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= -4 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 &= 11 \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= -4 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \end{aligned}$ *d*) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$

7-77 *a*) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= -4 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= -4 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 8 \end{aligned}$ *d*) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= -4 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 4 \end{aligned}$

7-78 *a*) $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= -4 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 12 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= -4 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 12 \\ 2x_1 - 5x_3 &= 10 \end{aligned}$ *d*) $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= -4 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 12 \\ x_1 + x_3 &= 5 \end{aligned}$

7-79 *a*) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 7 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= -10 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= -17 \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 7 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= -14 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= -17 \end{aligned}$ *d*) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 7 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= -14 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$

7-80 *a*) $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - 2x_3 &= -7 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_2 - 2x_3 &= 5 \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 21 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -14 \end{aligned}$ *d*) $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - 2x_3 &= -7 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_2 - 2x_3 &= 5 \end{aligned}$

Determine si los conjuntos de vectores en los siguientes problemas son linealmente dependientes o independientes:

7-81 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

7-82 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

7-83 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7-84 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

7-85 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Determine si los conjuntos de vectores en los siguientes problemas son linealmente dependientes o independientes para $-\infty < t < \infty$.

7-86 $\mathbf{v}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -2e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ -4e^t \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3(t) = \begin{pmatrix} -e^t \\ 4e^t \\ e^t \end{pmatrix}$

7-87 $\mathbf{v}_1(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3(t) = \begin{pmatrix} 4e^{-t} \\ e^{-t} \\ 5e^{-t} \end{pmatrix}$

7-88 $\mathbf{v}_1(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 4t^3 \\ -2t^3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 4t^2 \\ -2t^2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4t \\ -2t \end{pmatrix}$

7-89 $\mathbf{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ e^t \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 3t \\ -2e^t \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2t \\ -e^t \end{pmatrix}$

Determine todos los valores característicos y vectores característicos de las siguientes matrices:

7-90 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

7-91 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7-92 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

7-93 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

7-94 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

7-95 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7-96 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

7-97 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

7-98 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

7-99 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

7-100 *a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Sección 7-4 Teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

7-101C Dado un sistema de *n* ecuaciones lineales homogéneas de primer orden con *n* funciones incógnitas con *n* condiciones iniciales específicas, ¿en qué condiciones se garantiza que este sistema tiene una solución única en un intervalo $t_1 < t < t_2$?

7-102C ¿Cómo determinaría usted la solución general de un sistema de *n* ecuaciones lineales homogéneas de primer orden en un intervalo en el que la matriz de coeficientes es continua? ¿Cuál sería su respuesta si algunas de las ecuaciones del sistema fueran no homogéneas?

7-103C Dados *n* vectores de solución de orden *n* de un sistema de *n* ecuaciones lineales homogéneas de primer orden, ¿cómo determinaría usted si estas *n* soluciones son linealmente dependientes o independientes?

7-104C Pruebe el teorema 7-4 (teorema de Abel) para un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes con dos incógnitas. *Sugerencia:* sea el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

y sean $\mathbf{x}_1 = [x_{11} \quad x_{21}]^T$ y $\mathbf{x}_2 = [x_{12} \quad x_{22}]^T$ dos soluciones del sistema. Compruebe que

$$\mathbf{W}' = (x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})' = \begin{vmatrix} \frac{dx_{11}}{dt} & \frac{dx_{12}}{dt} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ \frac{dx_{21}}{dt} & \frac{dx_{22}}{dt} \end{vmatrix}$$

Luego sustituya $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ en $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ para comprobar que $\mathbf{W}' = (a_{11} + a_{22})\mathbf{W}$ y, por tanto, $\mathbf{W} = Ke^{(a_{11} + a_{22})t}$.

Para los siguientes problemas, verifique que los vectores dados son la solución del sistema dado y determine si los vectores solución son linealmente independientes. Si lo son, obtenga la solución general del sistema dado en $-\infty < t < \infty$.

7-105 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ -3e^t \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$

7-106 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

7-107 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4e^t \\ -2e^t \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 6e^t \\ -3e^t \end{pmatrix}$

7-108 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$

7-109 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{pmatrix}$

7-110 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$

7-111 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ -2e^t \\ 3e^t \end{pmatrix}$,

$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2e^t \\ 4e^t \\ -6e^t \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -e^t \\ 2e^t \\ -3e^t \end{pmatrix}$

7-112 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} e^{6t} \\ e^{6t} \\ e^{6t} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2e^{-3t} \\ 0 \\ -e^{-3t} \end{pmatrix}$

y $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix}$

7-113 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2e^{-3t} \\ 0 \\ -2e^{-3t} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3e^{-3t} \\ 3e^{-3t} \end{pmatrix}$

y $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ e^{-3t} \\ -2e^{-3t} \end{pmatrix}$

7-114 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -6e^t \\ -3e^t \\ 0 \end{pmatrix}$

y $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \\ -3e^{-2t} \end{pmatrix}$

Verifique que el vector de solución particular es la solución del sistema dado:

7-115 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4e^{-t} \\ 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}_p = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3e^{-t} + 2 \\ e^{-t} - 4 \end{pmatrix}$

7-116 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 6t^2 - 1 \\ t \end{pmatrix}$;

$\mathbf{x}_p = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -9t^2 + 21t - 1 \\ -9t^2 - 6t - 7 \end{pmatrix}$

7-117 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -3e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}_p = -\frac{3}{7}\begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

7-118 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}_p = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2t + 1 \\ 2t + 5 \end{pmatrix}$

7-119 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

7-120 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -e^{-t} \\ e^{-t} - 1/2 \end{pmatrix}$

Sección 7-5 Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

7-121 ¿Cómo se define la matriz fundamental de un sistema lineal homogéneo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$? ¿Puede el determinante de la matriz fundamental ser negativo? ¿Puede ser cero? ¿Cómo pueden expresarse las constantes arbitrarias en la solución general del sistema en términos de la matriz fundamental y las condiciones iniciales?

7-122 Considere un sistema de n ecuaciones lineales homogéneos con coeficientes constantes expresado como $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. ¿Cómo determinaría usted dos vectores de solución linealmente independientes correspondientes a un valor característico doble λ de $\mathbf{A}$ si hay solo un vector característico linealmente independiente asociado con éste?

7-123 Considere un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con constantes coeficientes expresado como $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. ¿Cómo determinaría usted tres vectores solución linealmente independientes correspondientes a un valor característico triple λ de $\mathbf{A}$ si solo hay un vector característico linealmente independiente asociado con éste?

Usando el método matricial, determine la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden:

7-124 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-125 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-126 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-127 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-128 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-129 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-130 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-131 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-132 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-133 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-134 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-135 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-136 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Usando el método de matrices, determine la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden con las condiciones iniciales específicas:

7-137 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7-138 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}_0(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

7-139 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}_0(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

7-140 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}_0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

7-141 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}_0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7-142 En el ejemplo 7-22, sea $m_1 = m_2 = k_1 = k_2 = 1$. Encuentre los valores característicos y los vectores característicos de la matriz A dada en ese ejemplo.

Sección 7-6 Sistemas lineales no homogéneos

7-143C En sistemas de ecuaciones, ¿cómo se determina la forma apropiada de la solución particular correspondiente a un término no homogéneo por el método de coeficientes indeterminados si el término no homogéneo aparece en la solución homogénea?

7-144C Una vez que la matriz fundamental está disponible, ¿cómo se determina la solución particular de un sistema lineal no homogéneo por el método de variación de parámetros?

7-145C Una vez que la matriz fundamental está disponible, ¿cómo se determina la solución de un sistema lineal no homogéneo (que satisface el conjunto dado de condiciones iniciales) por el método de variación de parámetros?

Usando a) el método de coeficientes indeterminados y b) el método de variación de parámetros, determine la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden (emplee el método matricial para obtener la solución homogénea):

7-146 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ 3t + 2 \end{pmatrix}$

7-147 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}$

7-148 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$

7-149 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2te^t \\ -e^t \end{pmatrix}$

7-150 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$

7-151 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t + 2 \\ 3t - 1 \end{pmatrix}$

7-152 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -37 \\ 5 \end{pmatrix}$

7-153 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \cos 3t \end{pmatrix}$

7-154 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 16/5 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3e^{-3t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$

7-155 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

7-156 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4t^3 - 14t - 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

7-157 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t + 3 \\ 3t - 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

7-158 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ -5e^t \\ 0 \end{pmatrix}$

Usando a) el método de coeficientes indeterminados y b) el método de variación de parámetros, determine la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden con las condiciones iniciales específicas (emplee el método matricial para obtener la solución homogénea):

7-159 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4e^t \end{pmatrix}; \ \mathbf{x}_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7-160 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ -4 \end{pmatrix}; \ \mathbf{x}_0(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

7-161 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t + 1 \\ 2t - 3 \end{pmatrix}; \ \mathbf{x}_0(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

7-162 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}; \ \mathbf{x}_0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

7-163 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \operatorname{sen} t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}; \ \mathbf{x}_0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sección 7-7 Formas canónicas y matriz de transición

7-164 Encuentre los vectores característicos, la matriz modal y la forma canónica de Jordan para la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, cuya matriz $\mathbf{A}$ está dada en cada una de las siguientes expresiones. Si aparecen valores característicos complejos, obtenga en lugar de esto la forma canónica modificada. También determine si los vectores característicos son linealmente independientes o no. Obtenga la solución desacoplando las ecuaciones:

a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *d*) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ *f*) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

g) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -9 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ *h*) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$

7-165 El *teorema de Cayley-Hamilton* establece que toda matriz $\mathbf{A}$ satisface su propia ecuación característica, $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$.

Suponga $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Entonces $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ y,
por tanto, $\mathbf{A}^2 - 6\mathbf{A} + 5\mathbf{I} = 0$.

a) El teorema proporciona una manera de expresar cualquier potencia de $\mathbf{A}$ en términos de una combinación lineal de potencias menores de $\mathbf{A}$. Use este hecho para encontrar $\mathbf{A}^3$.

b) Use el teorema para encontrar $\mathbf{A}^{-1}$ en términos de $\mathbf{A}$.

7-166 La amortiguación viscosa limita la amplitud de vibración cerca de las frecuencias de resonancia, pero a menudo cambia las frecuencias de resonancia solo ligeramente con respecto a sus valores no amortiguados. Considere el sistema que se muestra en la parte *a*) de la figura P7-166. Los diagramas de cuerpo libre se muestran en la parte *b*) de la figura. La forma matricial de la ecuación de movimiento se obtuvo en la solución del problema 7-53.

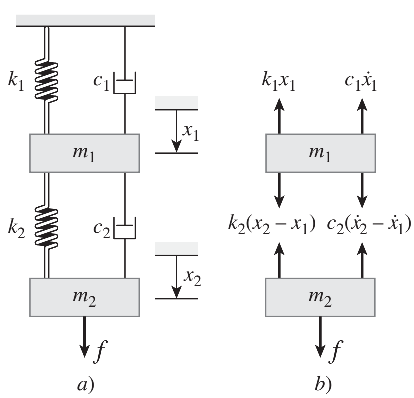


FIGURA P7-166

Sea $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ y $m_1 = m_2 = 1$.

a) Sea $c_1 = c_2 = 0$. Encuentre los vectores característicos y los valores característicos del sistema.

b) Sea $c_1 = c_2 = 0.1$. Encuentre los valores y vectores característicos del sistema y compare con los encontrados en la parte *a*). ¿Cómo afecta la amortiguación las frecuencias de resonancia?

7-167 Determine la controlabilidad de cada modo del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{f}(t)$ para el caso en que

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7-168 Derive la expresión de serie para la matriz de transición (ecuación 7-132) y compruebe que es la solución a la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

7-169 Tome el ejemplo 7-30 como referencia. Utilice la expresión de las series para la matriz de transición (ecuación 7-132) para calcular la matriz hasta el término t^2. Compare este resultado con la solución exacta obtenida en el ejemplo.

Sección 7-8 Métodos de computadora

7-170 Use una computadora para obtener los valores característicos y los vectores característicos de las matrices dadas en el problema 7-164.

7-171 Use una computadora para obtener la matriz de transición para las matrices dadas en las partes *a*), *b*), *c*) y *d*) del problema 7-164.

7-172 Dado el modelo de variable de estado:

$$x_1' = -5x_1 + 3x_2 + 2u_1$$
$$x_2' = -4x_2 + 6u_2$$

use un software para encontrar el polinomio característico y las raíces características.

7-173 Use un software para crear un modelo de variable de estado para las siguientes ecuaciones. Obtenga las expresiones para las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ para las entradas y salidas dadas.

a) Las salidas son x_1 y x_2. La entrada es u.

$$x_1' = -5x_1 + 3x_2$$
$$x_2' = x_1 - 4x_2 + 5u$$

b) La salida es x_1. Las entradas son u_1 y u_2.

$$x_1' = -5x_1 + 3x_2 + 4u_1$$
$$x_2' = x_1 - 4x_2 + 5u_2$$

7-174 Use un software para obtener un modelo de estado de las siguientes ecuaciones. Obtenga las expresiones para las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$. En ambos casos, la entrada es $f(t)$; la salida es y.

a) $2y''' + 5y'' + 4y' + 7y = f(t)$

b) $3y'' + 6y' + 10y = 6f(t)$

7-175 Para el siguiente modelo, la salida es x_1 y la entrada es $f(t)$.

$$x_1' = -5x_1 + 3x_2$$
$$x_2' = x_1 - 4x_2 + 5f(t)$$

a) Use un software para calcular y graficar la respuesta libre para $x_1(0) = 3$ y $x_2(0) = 5$.

b) Use un software para calcular y graficar la respuesta unitaria de paso para condiciones iniciales cero.

c) Use un software para calcular y graficar la respuesta para condiciones iniciales cero con la entrada $f(t) = 3$ sen $10\,\pi t$ para $0 \le t \le 2$.

7-176 Dado el modelo de variable de estado:

$$x_1' = -5x_1 + 3x_2 + 2u_1$$
$$x_2' = -4x_2 + 6u_2$$

use un software para encontrar el polinomio característico y las raíces características.

7-177 Las ecuaciones de movimiento para el modelo de dos masas de cuarto de carro del sistema de suspensión que se muestra en la figura P7-177 son

$$m_1x_1'' = c_1(x_2' - x_1) + k_1(x_2 - x_1)$$
$$m_2x_2'' = -c_1(x_2' - x_1) - k_1(x_2 - x_1) + k_2(y - x_2)$$

Suponga que los valores de los coeficientes son $m_1 = 240$ kg, $m_2 = 36$ kg, $k_1 = 1.6 \times 10^4$ N/m, $k_2 = 1.6 \times 10^5$ N/m y $c_1 = 98$ N · s/m.

a) Ponga las ecuaciones en forma de matriz de variables de estado. Use un software para crear un modelo de estado. La entrada es $y(t)$; las salidas son x_1 y x_2.

b) Use un software para encontrar el polinomio característico y las raíces características.

c) Use un software para calcular y graficar la respuesta de x_1 y x_2 si las condiciones iniciales son cero y si la entrada $y(t)$ representa una sola protuberancia que se describe a continuación. Suponga que el vehículo encuentra una protuberancia de medio metro de altura, alrededor de un metro de longitud, mientras se mueve a 18 m/s (alrededor de 40 mph). El perfil de la protuberancia está dado por

$$y(z) = 5.437e^{-4z}$$

donde z es la distancia horizontal que viaja el vehículo mientras pasa por encima de la protuberancia. El desplazamiento $y(t)$ que siente la suspensión está relacionado con $y(z)$ a través de la velocidad del vehículo, como sigue: $z = vt$, donde $v = 18$ m/s. Sustituya z en la expresión para $y(z)$ y obtenga

$$y(t) = 97.858te^{-72t}$$

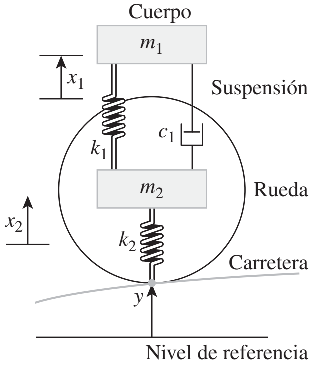


FIGURA P7-177

Modelo de dos masas de un sistema de suspensión de un vehículo.

7-178 Aun cuando un conjunto de ecuaciones sea lineal y de segundo orden, puede ser difícil de resolver si la función de fuerza es una función complicada. Las ecuaciones para un motor de corriente directa (CD) controlado por armadura son las siguientes: la corriente del motor es i y su velocidad de rotación es ω.

$$L\frac{di}{dt} = -Ri - K_b\omega + v(t)$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = K_Ti - c\omega$$

donde L, R e I son la inductancia, la resistencia y la inercia; K_T y K_b son la constante de par de torsión y la constante de contra-fem; c es una constante de amortiguación viscosa, y $v(t)$ es el voltaje aplicado. Use los valores $R = 0.8\ \Omega$, $L = 0.003$ H, $K_T = 0.05$ N · m/A, $K_b = 0.05$ V · s/rad, $c = 0$ e $I = 8 \times 10^{-5}$ kg · m^2.

a) Suponga que el voltaje aplicado es 20 V. Grafique la velocidad del motor y la corriente contra el tiempo. Elija un tiempo final suficientemente largo para mostrar cómo se hace constante la velocidad del motor.

b) Suponga que el voltaje aplicado es trapezoidal y está descrito por

$$v(t) = \left\{\begin{array}{cc} 400t & 0 \le t < 0.05 \\ 20 & 0.05 \le t \le 10.2 \\ -400(t-0.2) + 20 & 0.2 < t \le 0.25 \\ 0 & t > 0.25 \end{array}\right\}$$

Grafique la velocidad del motor contra el tiempo para $0 \le t \le 0.3$ s. También grafique el voltaje aplicado contra el tiempo. ¿Qué tan bien sigue la velocidad del motor un perfil trapezoidal?

7-179 La figura P7-179 representa un edificio de dos pisos. Las masas de los pisos son m_1 y m_2. Cada piso está apoyado en seis columnas. Cuando el suelo se mueve horizontalmente debido a un temblor, los pisos también se mueven horizontalmente, y las columnas actúan como resortes y resisten el movimiento. Las rigideces horizontales totales de cada conjunto de seis columnas son k_1

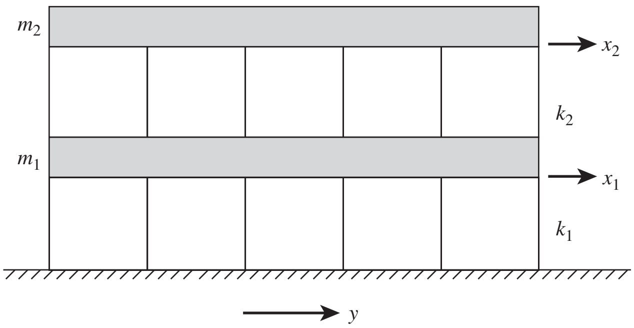


FIGURA P7-179

Edificio de dos pisos. Las masas de los pisos son m_1 y m_2. El movimiento horizontal del suelo es y. Las rigideces horizontales totales de cada conjunto de seis columnas son k_1 y k_2.

y k_2. El movimiento horizontal del suelo es y. Las ecuaciones del movimiento son

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_2(x_1 - x_2) + k_1(y - x_1)$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = k_2(x_1 - x_2)$$

Considere el caso en que las masas son idénticas ($m_1 = m_2 = m$) y las rigideces son idénticas ($k_1 = k_2 = k$). Suponga que $k/m = 4$, y el movimiento del suelo está descrito por $y(t) = \text{sen } 3t$. Grafique la respuesta de x_1 y x_2 suponiendo condiciones iniciales cero.

Problemas de repaso

7-180 Una pequeña bola de cobre a 80 °C se deja caer a un pequeño tanque lleno de mercurio a 20 °C. Después se coloca el sistema combinado en un tanque muy grande, lleno de agua helada a 0 °C, como se muestra en la figura P7-180. El calor se transfiere de la bola de cobre al mercurio con un coeficiente de transferencia de calor de h_1, y del mercurio al agua helada con un coeficiente de transferencia de calor de h_2. Como resultado, la temperatura de la bola $T_2(t)$ comienza a disminuir; la temperatura del mercurio $T_1(t)$ también cambia con el tiempo durante el proceso, pero permanece esencialmente uniforme en el tiempo, debido a su alta conductividad térmica. Demuestre que las variaciones de la temperatura del mercurio y del cobre durante este proceso de enfriamiento están regidas por

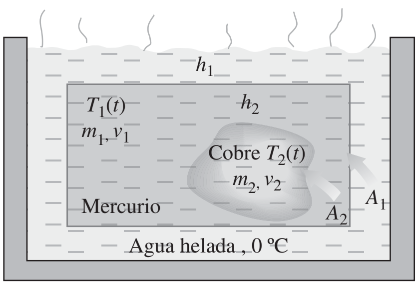


FIGURA P7-180

$$\frac{dT_1}{dt} = -\frac{A_1h_1}{\rho_1c_1V_1}T_1 - \frac{A_2h_2}{\rho_1c_1V_1}(T_1 - T_2)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{A_2h_2}{\rho_2c_2V_2}(T_1 - T_2)$$

donde ρ, c, V y A representan la densidad, el calor específico, el volumen y el área superficial, respectivamente. Los subíndices 1 y 2 se usan para representar las propiedades correspondientes al mercurio y la bola de cobre. También determine la variación de las temperaturas del mercurio y de la bola de cobre con el tiempo, suponiendo $(A_1h_1)/(\rho_1c_1V_1) = 0.1$, $(A_2h_2)/(\rho_1c_1V_1) = 0.001$ y $(A_2h_2)/(\rho_2c_2V_2) = 1/900$. (*Sugerencia:* vea el ejemplo 1-3.)

7-181 Considere las dos masas m_1 y m_2 y dos resortes lineales con constantes de resorte k_1 y k_2 conectados en serie, como se muestra en la figura 7-181. Inicialmente, ambas masas están en reposo y en sus posiciones de equilibrio. En consecuencia, los resortes no están ni estirados ni comprimidos en $t = 0$. Posteriormente se aplica a m_2 una fuerza periódica exterior $f(t) = 5 \text{ sen } 2t$, haciendo que ambas masas se pongan en movimiento. Si hacemos que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representen las posiciones de las dos masas en relación con sus posiciones de equilibrio, los movimientos de m_1 y m_2 estarán regidos por el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales:

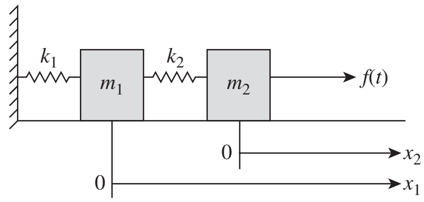


FIGURA P7-181

$$m_1x_1'' + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0$$
$$m_2x_2'' + k_2(x_2 - x_1) = f(t)$$

con $\quad x_1(0) = x_1'(0) = x_2(0) = x_2'(0)0$

Considerando $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 2$ y $k_2 = 1$ en las unidades apropiadas, el sistema de dos ecuaciones diferenciales se reducirá a

$$2x_1'' + 2x_1 - (x_2 - x_1) = 0$$
$$x_2'' + (x_2 - x_1) = f(t)$$

o

$$2x_1'' + 3x_1 - x_2 = 0$$
$$x_2'' + x_2 - x_1 = f(t)$$

Determine los movimientos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ resolviendo este sistema de dos problemas de valor inicial.

Usando el método matricial, determine la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden para los siguientes problemas y las constantes arbitrarias en la solución general cuando se establecen las condiciones iniciales:

7-182 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 3 \end{pmatrix}$

7-183 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 + 5 \end{pmatrix}$

7-184 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}\mathbf{x}\,;\ x_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

7-185 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -4 \text{ sen } t \\ \cos t - 3 \text{ sen } t \end{pmatrix}$

7-186 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-187 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4e^{-3t} \end{pmatrix};\ \mathbf{x}_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7-188 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4te^t + 3e^t \\ -4e^t \end{pmatrix}$

7-189 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-190 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^3 - 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \mathbf{x}_0(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

7-191 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^2 + 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

7-192 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2 \end{pmatrix}$

7-193 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{8t} \text{ sen } t \\ 0 \end{pmatrix}$

7-194 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-195 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{x};\ \mathbf{x}_0(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7-196 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

7-197 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2te^{t} - 1 \\ -t - 3 \end{pmatrix}$

7-198 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x};\ \mathbf{x}_0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

7-199 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t \\ 3t - 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

7-200 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{t} \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$

7-201 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t \\ -t + 1 \end{pmatrix};\ \mathbf{x}_0(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

7-202 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7-203 Las siguientes ecuaciones son el modelo de la dinámica rotacional de un proyectil (ver figura P7-203):

$$\delta' = u$$
$$\omega' = -\frac{1}{\tau}\omega + \frac{b}{\tau}\delta$$
$$\varphi' = \omega$$

donde δ = deflexión del alerón, b = constante de eficacia del alerón, u = señal de los comandos al actuador del alerón, φ = ángulo de rotación y ω = rapidez de rotación. Usando los valores específicos $b = 10\ \text{s}^{-1}$ y $\tau = 1$ s, *a*) obtenga la ecuación característica y las raíces características, y *b*) despeje las tres variables de estado como funciones del tiempo para el caso en que $u = 1$.

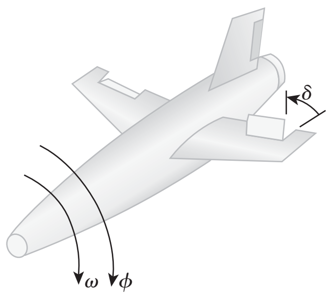


FIGURA P7-203

7-204 Encuentre las frecuencias naturales y las relaciones modales, e interprete las relaciones modales para el sistema de péndulos acoplados mostrado en la figura P7-204. Use los valores $m_1 = 1$, $m_2 = 4$, $L_1 = 2$, $L_2 = 5$ y $k = 2$. Las ecuaciones de movimiento para ángulos pequeños son

$$m_1 L_2^2 \theta_1'' = -m_1 g_1 L_2 \theta_1 - kL_1(L_1\theta_1 - L_1\theta_2)$$
$$m_2 L_2^2 \theta_2'' = -m_2 g L_2 \theta_2 + kL_1(L_1\theta_1 - L_1\theta_2)$$

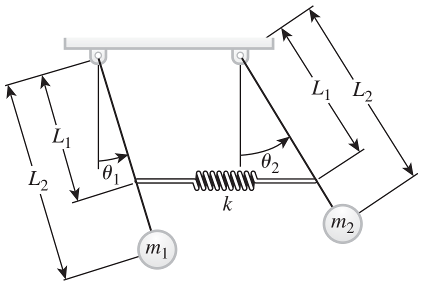


FIGURA P7-204

7-205 Para cualquier conjunto ortogonal de coordenadas de cuerpo, la relación general entre el vector de momento angular **M** de un cuerpo rígido y su velocidad angular ω es $\mathbf{M} = \mathbf{I}\omega$, donde **I** es la matriz de momento de inercia:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

El elemento I_{ii} es el momento de inercia alrededor del eje i, e I_{ij} es el producto de inercia alrededor de los ejes ij. Considere que la matriz **I** es simétrica, de modo que $I_{ij} = I_{ji}$. Los *ejes principales* de un cuerpo rígido son un conjunto de ejes tal que **M** es paralela a ω. Entonces, $\mathbf{M} = I_p\omega$, donde I_p es un escalar llamado *momento principal de inercia*. Los ejes principales y los momentos principales son los vectores característicos y los valores característicos de la matriz **I** y pueden encontrarse a partir del problema de valor característico:

$$\mathbf{I}\omega = \mathbf{I}_p\omega$$

Encuentre los momentos principales y los ejes principales de una placa cuadrada delgada con longitud de lado *b*. Para los ejes que se muestran en la figura P7-205, la matriz **I** es

$$\mathbf{I} = mb^2\begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

donde m es la masa de la placa.

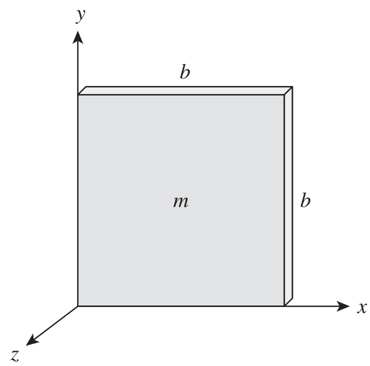


FIGURA P7-205

7-206 Los ingenieros deben ser capaces de predecir la rapidez de pérdida de calor a través de una pared de edificio para determinar los requisitos de los sistemas de calefacción. La sección transversal de pared que se muestra en la figura P7-206*a* consiste en cuatro capas, una capa interior de placa de yeso de 10 mm de espesor, una capa de aislamiento de fibra de vidrio de 125 mm de espesor, una capa de madera de 60 mm de espesor y una capa exterior de ladrillo de 50 mm de espesor.

Suponemos que toda la masa en cada capa está concentrada en la línea central de su capa respectiva y asignamos la mitad de la resistencia térmica a la ruta de flujo de calor a la izquierda y la mitad a la ruta a la derecha de la masa concentrada. La representación se muestra en la figura P7-206*b*. Por tanto, sean

$$R_a = \frac{R_1}{2}\, R_b = \frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{2}$$

$$R_c = \frac{R_2}{2} + \frac{R_3}{2}\, R_d = \frac{R_3}{2} + \frac{R_4}{2}\, R_e = \frac{R_4}{2}$$

En la figura 7-206*c* se muestra un circuito eléctrico equivalente para quienes encuentren ventajosa dicha analogía. Para la capacitancia térmica C_1, la conservación de la energía da

$$C_1 T_1' = \frac{T_i - T_1}{R_a} - \frac{T_1 - T_2}{R_b}$$

Para C_2, $$C_2 T_2' = \frac{T_1 - T_2}{R_b} - \frac{T_2 - T_3}{R_c}$$

Para C_3,

$$C_3 T_3' = \frac{T_2 - T_3}{R_c} - \frac{T_3 - T_4}{R_d}$$

Finalmente, para C_4,

$$C_4 T_4' = \frac{T_3 - T_4}{R_d} - \frac{T_4 - T_O}{R_e}$$

a) Presente estas cuatro ecuaciones en la forma de variable de estado $\mathbf{T}' = \mathbf{AT} + \mathbf{Bu}$ y encuentre las expresiones para las matrices **A** y **B**, donde

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} T_i \\ T_o \end{pmatrix}$$

b) Para los materiales dados, las resistencias para un área de pared de 1 m^2 son $R_1 = 0.036$, $R_2 = 4.01$, $R_3 = 0.408$ y $R_4 = 0.038$ °C/W. Los valores de capacitancia son $C_1 = 8\,720$, $C_2 = 6\,210$, $C_3 = 6\,637$ y $C_4 = 2.08 \times 10^4$ J/°C. Grafique las temperaturas contra el tiempo para el caso en que la temperatura interior sea constante en $T_i = 20$°C y la temperatura exterior T_0 disminuya linealmente de 5 a -10°C en 1 hora. La temperatura inicial de la pared es 10°C.

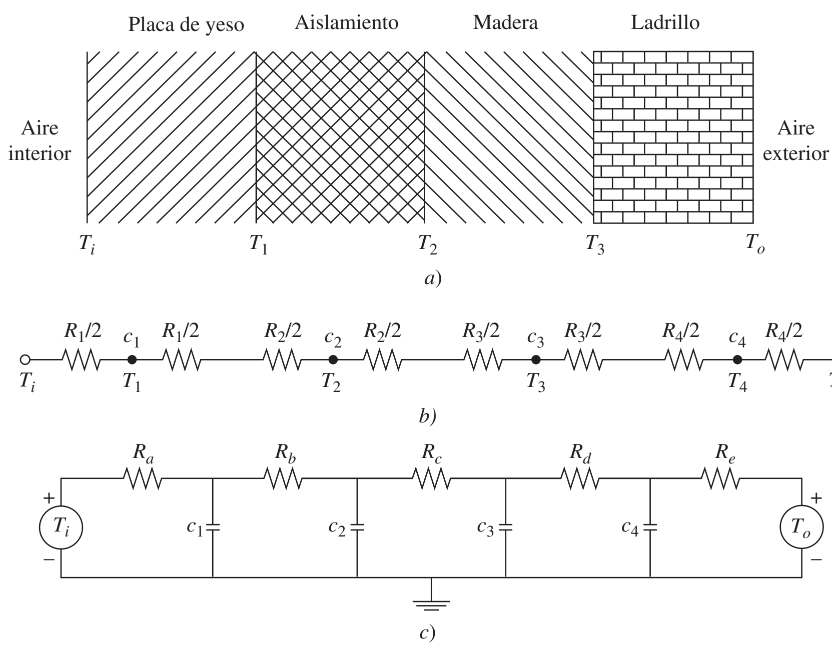


FIGURA P7-206

CAPÍTULO

8

TRANSFORMADA DE LAPLACE

En general, las ecuaciones diferenciales son mucho más difíciles de resolver que las ecuaciones algebraicas; por tanto, es natural preguntarse si hay un modo de transformar las ecuaciones diferenciales en algebraicas. La respuesta es: sí; de hecho, hay más de una manera de transformar una ecuación diferencial en algebraica. Tales conversiones, en general, implican multiplicar cada término de una ecuación diferencial por una función adecuada llamada *núcleo* e integrar cada término dentro del dominio de la ecuación diferencial con respecto a la variable independiente. El resultado es una ecuación que no incluye ninguna derivada de la variable independiente. Entonces, la función incógnita se determina resolviendo algebraicamente la función transformada y aplicando la transformación inversa. Como todas estas transformaciones incluyen integraciones, se llaman *transformadas integrales*. Cada una de ellas tiene ciertas limitaciones asociadas y es aplicable a ciertos tipos de problemas.

En este capítulo hablaremos de la *transformada de Laplace*, una de las transformadas integrales más conocidas. Es particularmente adecuada para problemas cuya variable independiente cambia de cero a infinito, tales como los problemas de valor inicial en el tiempo y los problemas de valor límite en geometrías semiinfinitas. Usaremos la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y sistemas de tales ecuaciones. Usted verá que la transformada de Laplace a menudo permite simplificar de manera considerable la solución de ecuaciones diferenciales, en especial cuando estas incluyen términos no homogéneos con discontinuidades de salto. Tales problemas frecuentemente surgen en el análisis de circuitos, en vibraciones mecánicas y otros campos. Son bastante incómodos para manejarlos con los métodos anteriores y exigen armar soluciones válidas en diferentes intervalos.

OBJETIVOS

Al terminar este capítulo usted deberá ser capaz de:

1. Obtener la transformada de Laplace de una función dada de una tabla estándar, usando las propiedades de la transformada si la función no está dada en la tabla.
2. Conseguir la transformada inversa de Laplace de una función dada de una tabla estándar, usando la expansión de fracción parcial o el teorema de convolución si la función no está dada en la tabla.
3. Usar la transformada de Laplace para resolver una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes.
4. Obtener las funciones de transferencia de un conjunto dado de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.
5. Usar un software para obtener transformadas de Laplace, transformadas inversas y resolver ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes.

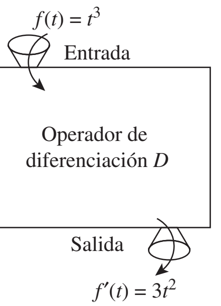


FIGURA 8-1
La diferenciación ordinaria es un operador que convierte una función $f(t)$ en su derivada $f'(t)$.

8-1 ▪ TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE FUNCIONES

La transformada de Laplace se llama así por el matemático y físico francés P.S. Laplace (1749-1827), quien la estudió por primera vez en 1782. Pero el crédito principal por el desarrollo y la aplicación del método es de Oliver Heaviside (1850-1925), ingeniero eléctrico inglés que la usó extensamente.

Usted ya está familiarizado con algunos operadores que transforman una función a una forma más deseable. La *diferenciación* ordinaria, por ejemplo, puede considerarse como un operador que transforma la función $f(t)$ en $f'(t)$. Si el operador de diferenciación se representa como D, esta transformación puede expresarse como (figura 8-1)

$$D\{f(t)\} = f'(t) \tag{8-1}$$

Otro operador con el que estamos familiarizados es la integración, que puede representarse como I y se expresa como

$$I\{f(t)\} = \int_0^a f(t)\,dt \tag{8-2}$$

La integración invierte la diferenciación y, por tanto, puede considerarse como la conversión inversa de la diferenciación. Observe que la conversión integral en la ecuación 8-2 convierte la función $f(t)$, que depende de t, en la función $f(a)$, que se subordina al parámetro a pero es independiente de t.

La **transformada de Laplace** es simplemente una conversión integral con los límites de integración 0 e ∞, y el núcleo e^{-st}. Se representa como L, y la transformada de Laplace de una función $f(t)$ se define como

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \tag{8-3}$$

Observe que la definición de la transformada de Laplace incluye una integral en un *intervalo ilimitado*; por tanto, es una *integral impropia*. Como tal, debe interpretarse como

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} f(t)\,dt \tag{8-4}$$

La transformada de Laplace de una función existe si y solo si la integral impropia converge por lo menos para algunos valores de s. Se dice que una integral impropia *converge* si existe el límite cuando $R \to \infty$ (figura 8-2); en caso contrario, que *diverge* o se vuelve infinita. La variable de integración t es una variable ficticia y es posible reemplazarla por cualquier otro símbolo.

Es posible hacer dos observaciones respecto a la definición de la transformada de Laplace. La primera es que la transformada de Laplace incluye integraciones para todos los valores positivos de la variable independiente t, desde 0 hasta ∞. Esta integración puede realizarse solamente si la función $f(t)$ está definida para todos los valores positivos de t. Si, por ejemplo, $f(t)$ está definida en $0 \leq t \leq 5$ pero no está definida en $5 < t < \infty$, entonces, obviamente, no podemos realizar esta integración y, por tanto, tampoco es posible hablar de la transformada de Laplace de esta función. Esta observación reafirma que las únicas ecuaciones diferenciales que pueden resolverse por el método de la transformada de Laplace son aquellas cuyos dominios incluyen todos los valores positivos de la variable independiente.

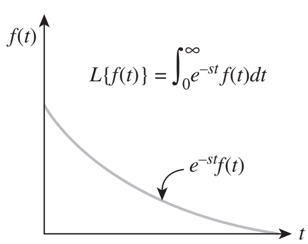


FIGURA 8-2
Transformada de Laplace de una función.

La segunda observación que puede hacerse respecto a esta definición es que la transformada de Laplace de una función $f(t)$ ya no es una función de la variable independiente t, ya que ninguno de los dos límites de integración es función de t. Sin embargo, por convención, siempre será una función de s, ya que el integrando $e^{-st}f(t)$ contiene el parámetro s.

Por convención, siempre que sea posible usaremos letras minúsculas para representar una función dada, y la mayúscula de la misma letra para representar su transformada de Laplace. Se usan llaves sinópticas ({ }) para encerrar las funciones de t. Por ejemplo, la transformada de Laplace de una función $f(t)$ se expresará como (figura 8-3)

$$L\{f(t)\} = F(s) \tag{8-5}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

FIGURA 8-3
Transformada de Laplace.

Ahora comprobamos la determinación de la transformada de Laplace con algunos ejemplos.

EJEMPLO 8-1 Transformadas de Laplace de algunas funciones comunes

Determine la transformada de Laplace de las siguientes funciones que están definidas para toda $t \geq 0$: *a)* $f(t) = 1$, *b)* $f(t) = t$, *c)* $f(t) = e^{at}$ y *d)* $f(t) = \cos at$.

Solución Todas estas funciones están definidas para todos los valores positivos de t, entonces, sus transformadas de Laplace pueden obtenerse por la ecuación 8-4 siempre y cuando la integral converja. Usaremos tablas estándar de integrales cuando sea necesario e indicaremos el intervalo de s para el cual converge la integral.

a)
$$\begin{aligned} L\{1\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}1dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-st}1dt \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-sR}}{s}\right] + \frac{1}{s} \\ &= 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}, \text{ para } s > 0 \end{aligned} \tag{8-6}$$

b)
$$\begin{aligned} L\{t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}t\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-st}t\,dt \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s^2}(st+1)\right]_0^R \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-sR}}{s^2}(Rs+1)\right] + \frac{1}{s^2} = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}, \text{ para } s > 0 \end{aligned} \tag{8-7}$$

c)
$$\begin{aligned} L\{e^{at}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-(s-a)t}dt \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{s^{-(s-a)R}}{s-a}\right] + \frac{1}{s-a} \\ &= 0 + \frac{1}{s-a} = \frac{1}{s-a}, \text{ para } s > a \end{aligned} \tag{8-8}$$

d)
$$\begin{aligned} L\{\cos at\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}\cos at\,dt = \lim_{R\to 0}\int_0^{R} e^{-st}\cos at\,dt \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(s\cos at + a\,\text{sen}\,at)\right]_0^R \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-sR}}{s^2+a^2}(s\cos aR + a\,\text{sen}\,aR)\right] + \frac{s}{s^2+a^2} \\ &= 0 + \frac{s}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2}, \text{ para } s > 0 \end{aligned} \tag{8-9}$$

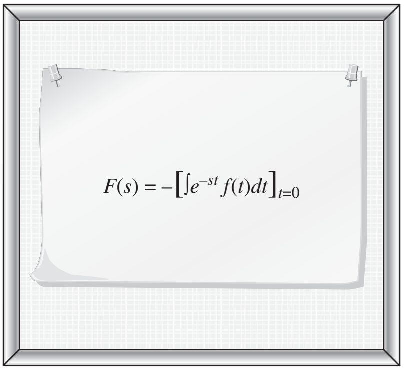


FIGURA 8-4
La transformada de Laplace de una función continua que converge cuando $t \to \infty$ es simplemente el negativo del valor de la integral definitoria en $t = \infty$.

Observe que todas las funciones consideradas en el ejemplo 8-1 son continuas en $0 \le t < \infty$, y sus integrales de transformada de Laplace desaparecen en el límite superior. Para tales funciones, la transformada de Laplace simplemente se convierte en el negativo del valor de la integral en el límite inferior, $t = 0$ (figura 8-4).

No es necesario ni práctico recurrir a la definición de una transformada de Laplace cada vez que queremos determinar la transformada de una función. Un enfoque más práctico es determinar una vez la transformada de las funciones que se encuentran frecuentemente y enlistarlas en una tabla, como la tabla 8-1. Así es posible determinar la transformada de una función simplemente buscándola en la tabla, tal como una búsqueda en una tabla de integrales. Ninguna tabla es suficientemente grande para contener las transformadas de todas las funciones concebibles, y a menudo se necesita expresar la función en una forma que exista en la tabla. Las propiedades de la transformada de Laplace que se explican más adelante serán muy útiles a este respecto. Algunas de las transformadas de la tabla 8-1 se tratan en detalle en las siguientes secciones de este capítulo.

TABLA 8-1

Transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s) = L\{f(t)\}$
$C_1f(t) + C_2g(t)$	$C_1F(s) + C_2G(s)$
$e^{kt}f(t)$	$F(s-k)$
$f(kt)$	$\frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right)$
$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(s)ds$
$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$t^a, a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
$t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
$t^n, n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^ne^{at}, n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$e^{kt}\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{(s-k)^2+a^2}$

TABLA 8-1 (continuación)

Transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s) = L\{f(t)\}$
$t\,\text{sen}\,at$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
$e^{kt}\cos at$	$\dfrac{s-k}{(s-k)^2+a^2}$
$t\cos at$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\text{senh}\,at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$u(t-t_0)$	$\dfrac{e^{-t_0 s}}{s}$
$u(t-t_0)f(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}F(s)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}$
$f(t)$, periódica con periodo p	$\dfrac{1}{1-e^{-ps}}\displaystyle\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
$\displaystyle\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$

Repaso de la sección

8-1 Determine la transformada de Laplace de las siguientes funciones que están definidas para toda $t \geq 0$.

a) $f(t) = 5$ *b)* $f(t) = e^{3t}$ *c)* $f(t) = \text{senh }at$

(*Respuestas: a)* $\dfrac{5}{s}$ $s > 0$, *b)* $\dfrac{1}{s-3}$ $s > 3$ y *c)* $\dfrac{a}{s^2-a^2}$, $s > a$.)

8-2 ▪ EXISTENCIA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

La integral que define la transformada de Laplace (ecuación 8-3) no puede realizarse para cualquier función $f(t)$ y, por tanto, no todas las funciones tienen una transformada de Laplace. Entonces usted podría preguntar: ¿qué clases de funciones tienen transformadas de Laplace? En palabras sencillas, cualquier función para la cual exista la integración de la ecuación 8-3 tiene una transformada de Laplace. Para que exista dicha integral, 1) la función $f(t)$ debe estar definida para toda $t \geq 0$; 2) la función $f(t)$ debe ser integrable y 3) esta integral impropia debe converger.

La primera condición es obvia; ni siquiera intentaríamos integrar una función si no está definida en todo el dominio de integración. La segunda condición la satisface cualquier función continua, ya que todas las funciones continuas son integrables.

De hecho, para ser integrable, basta con que la función sea solo **continua por partes**, lo cual se define así:

Una función $f(t)$ es continua por partes en un intervalo definido $a \leq t \leq b$ si este intervalo puede subdividirse en un número finito de subintervalos de manera que $f(t)$ sea continua en cada subintervalo y tenga límites finitos en los puntos extremos.

En otras palabras, $f(t)$ no debe divergir cuando t tiende a cualquiera de los dos puntos terminales de un subintervalo desde el interior del subintervalo.

Observe que una función continua por partes puede contener un número finito de *discontinuidades de salto*, como se muestra en la figura 8-5, pero la función sigue siendo definida en todos los puntos de discontinuidad; y que tanto el límite izquierdo como el derecho de cualquier punto terminal son finitos, pero generalmente no son iguales. De hecho, el valor de la función en un punto terminal puede ser diferente de cualquiera de los dos límites en ese punto terminal. Solo las funciones continuas tienen límites izquierdo y derecho idénticos en cualquier punto $a \leq t \leq b$, ambos iguales al valor de la función en ese punto. Entonces, una función continua es un caso especial de una función continua por partes, y cualquier función continua en un intervalo dado necesariamente es continua por partes en ese intervalo. Cualquier función continua por partes en un intervalo dado es integrable en ese intervalo.

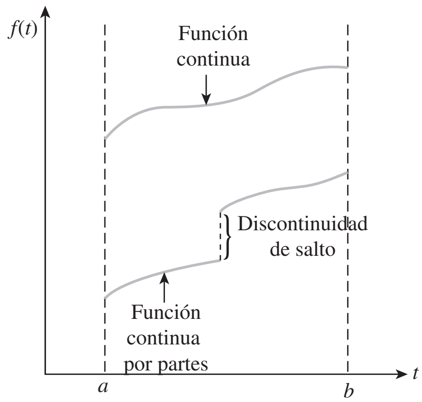


FIGURA 8-5
Una función continua y una función continua por partes en un intervalo específico.

El límite superior de la integral es infinito, lo cual sugiere que la integral puede divergir cuando t tiende a infinito. Por tanto, para que la transformada de Laplace exista, el integrando $e^{-st}f(t)$ debe convergir. Esto limita no solo la función $f(t)$, sino también los valores del parámetro s.

Una integración que converge en un intervalo finito $0 \leq t \leq a$ puede divergir cuando $a \to \infty$, lo cual sucede cuando el valor del integrando aumenta al aumentar t, y diverge cuando t tiende a infinito. Entonces, necesitamos alguna condición sobre la rapidez de crecimiento del integrando cuando $t \to \infty$. Para que exista una integral impropia de esta clase, el integrando debe ser convergente. Es decir, el límite del integrando cuando $t \to \infty$ debe ser un número finito. Esta condición suena muy restrictiva, ya que muchas funciones de interés práctico como t, t^2, t^n, e^{kt} divergirán cuando $t \to \infty$, pero no lo es porque el requisito de convergencia se refiere al integrando $e^{-st}f(t)$, no a $f(t)$ sola. Observe que, para valores positivos de s, el factor e^{-st} desaparecerá cuando $t \to \infty$, y forzará a convergir a todo el integrando. Sin embargo, este será el caso solo si $f(t)$ no diverge con mayor rapidez que la rapidez con que converge e^{-st}. Entonces la función e^{-st} sirve como factor de amortiguación.

Por ejemplo, la función $f(t) = t$ diverge (es decir, se vuelve infinita) cuando $t \to \infty$. Pero te^{-st} converge cuando $t \to \infty$, ya que por la regla de L'Hôpital, tenemos

$$\lim_{t\to\infty} te^{-st} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{st}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{se^{st}} = 0, \quad \text{para } s > 0$$

Observe que existe un límite finito solo para valores positivos de s. (Para valores negativos de s, el límite diverge.) También podemos comprobar que el integrando desaparece para $f(t) = t^n$ para cualquier valor de n cuando $t \to \infty$.

Cuando $f(t)$ es una función exponencial como e^{at}, el integrando resulta $e^{-st} f(t) = e^{-st} e^{at} = e^{-(s-a)t}$, que desaparecerá cuando $t \to \infty$ si $s > a$. Entonces concluimos que una función $f(t)$ tendrá una transformada de Laplace si $|f(t)| < e^{at}$, donde a es un número positivo arbitrario. Se dice que tales funciones son de **orden exponencial** y se definen así:

Una función $f(t)$ es de orden exponencial si existe una constante a tal que $\lim_{t\to\infty} e^{-at}|f(t)| = M$, donde M es una constante positiva finita o cero, para todas las t para las que está definida $f(t)$.

Si $f(t)$ no es de orden exponencial, entonces este límite divergirá (figura 8-6).

Observe que una función $f(t)$ que es no acotada cuando $t \to \infty$ todavía puede ser de orden exponencial si *no* aumenta más rápidamente que la función Me^{at}. En otras palabras, una función es de orden exponencial si no crece más rápidamente que la función exponencial e^{at}, donde a es una constante que puede seleccionarse para que sea del tamaño que se necesite.

Cualquier función acotada como sen ωt o cos ωt es de orden exponencial si $a = 0$. Cualquier polinomio $P(t)$ es de orden exponencial si $a = 1$. Cualquier función exponencial con un exponente lineal como e^{-kt} es de orden exponencial de $a = k$. Pero una función exponencial con un exponente cuadrático o de orden superior (como e^{t^2}) no es de orden exponencial, ya que el límite en la definición del orden exponencial diverge en este caso, sin que importe el valor de a.

Podemos resumir estas explicaciones con el siguiente teorema.

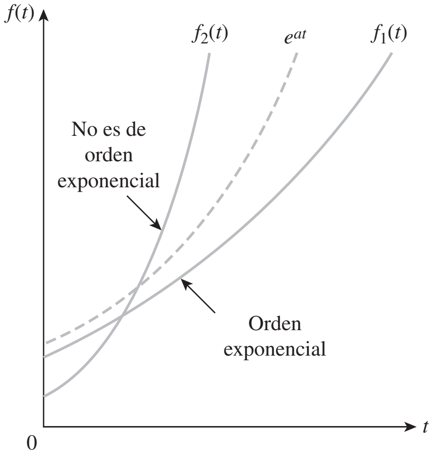


FIGURA 8-6
La función $f_2(t)$ no es de orden exponencial porque aumenta más rápidamente que la función exponencial e^{at}.

Teorema 8-1 Teorema de existencia para transformadas de Laplace

Si una función $f(t)$ es continua por partes para $t \geq 0$ y es de orden exponencial cuando $t \to \infty$, entonces existe su transformada de Laplace (figura 8-7).

Observe que tener continua por partes y tener orden exponencial son condiciones suficientes para que una función $f(t)$ tenga una transformada de Laplace; *no* son condiciones necesarias. Algunas funciones que no satisfacen estas condiciones todavía tienen transformadas de Laplace. Por ejemplo, la función $f(t) = t^{-1/2}$ no es continua por partes, ya que es no acotada cuando $t \to 0$, pero su transformada de Laplace existe y es posible comprobar que es $\sqrt{\pi/s}$ para $s > 0$.

Repaso de la sección

Los problemas marcados con una "C" son conceptuales para discusión

8-2C ¿Cuál es la diferencia entre funciones continuas y funciones continuas por partes?

8-3 Determine si las siguientes funciones tienen una transformada de Laplace:

a) $f(t) = \dfrac{1}{t}$ *b*) $f(t) = e^{-2t^3}$

c) senh $5t$ *d*) $f(t) = \begin{Bmatrix} 1, & t \leq 3 \\ t^2, & t > 3 \end{Bmatrix}$

(*Respuestas: a*) sí; *b*) sí; *c*) sí; *d*) no.)

8-3 ▪ PROPIEDADES BÁSICAS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Podemos obtener la transformada de Laplace de muchas funciones aplicando reiteradamente su definición, ecuación 8-3; pero esto sería muy tedioso y requeriría mucho tiempo. Es mucho más práctico determinar directamente la transformada de Laplace de algunas funciones básicas y obtener la transformación de Laplace de otras funciones usando las propiedades de la transformada de Laplace. Ahora explicamos algunas de estas propiedades, que se resumen en la tabla 8-2.

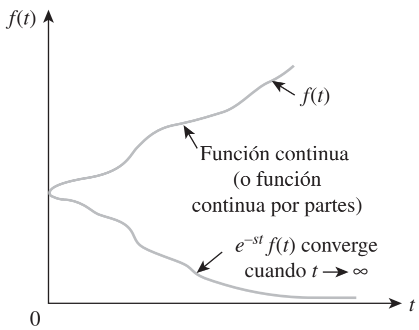


FIGURA 8-7
Función $f(t)$ cuya transformada de Laplace existe.

Propiedad 1: Linealidad de la transformada de Laplace

Como la transformada de Laplace se define como una integral definida, tiene las propiedades de las integrales definidas; por ejemplo, la integral de la suma de dos funciones es la suma de las integrales de esas dos funciones. Es decir,

$$\int_a^b [f(t) + g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

Asimismo, la integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función. O sea

$$\int_a^b Cf(t)dt = C\int_a^b f(t)dt$$

donde C es una constante arbitraria.

Entonces la integración es un operador *lineal*. Esto también es verdad para la transformada de Laplace. La linealidad de la transformada de Laplace puede expresarse como

$$L\{C_1f_1(t) + C_2f_2(t)\} = C_1L\{f_1(t)\} + C_2L\{f_2(t)\} \tag{8-10}$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes cualesquiera. Esta la propiedad más significativa de la transformada de Laplace.

EJEMPLO 8-2 **Transformada de Laplace de senh kt**

Determine la transformada de Laplace de senh kt, donde k es una constante.

Solución En el ejemplo 8-1 determinamos que $L\{e^{at}\} = 1/(s - a)$. También sabemos que $\operatorname{senh} at = (e^{at} - e^{-at})/2$. Entonces, por la linealidad de la transformada de Laplace,

$$\begin{aligned} L\{\operatorname{senh} kt\} &= L\left\{\frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}\right\} = \frac{1}{2}L\{e^{kt}\} - \frac{1}{2}L\{e^{-kt}\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-(-k)}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{(s+k)-(s-k)}{(s-k)(s+k)}\right] \\ &= \frac{k}{s^2-k^2}, \quad s > k \end{aligned} \tag{8-11}$$

TABLA 8-2

Propiedades básicas de la transformada de Laplace

1	$L\{C_1f_1(t) + C_2f_2(t)\} = C_1L\{f_1(t)\} + C_2L\{f_2(t)\}$
2	$L\{e^{kt}f(t)\} = F(s-k)$
3	$L\{t^nf(t)\} = (-1)^n\dfrac{d^nF(s)}{ds^n}$
4	$L\left\{\dfrac{1}{t}f(t)\right\} = \displaystyle\int_s^\infty F(s)ds$
5	$L\left\{\displaystyle\int_o^t f(t)dt\right\} = \dfrac{1}{s}F(s)$
6	$L\{f(kt)\} = \dfrac{1}{k}F\left(\dfrac{s}{k}\right)$

Propiedad 2: Propiedad de translación (o corrimiento)

Si se conoce la transformada de Laplace de una función $f(t)$, entonces la transformada de Laplace de la función $e^{kt} f(t)$, donde k es una constante, se determina fácilmente por la propiedad de translación, que puede expresarse como

$$L\{e^{kt}f(t)\} = F(s - k) \tag{8-12}$$

Aquí $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, y $F(s - k)$ se obtiene reemplazando cada aparición de s en $F(s)$ por $s - k$. La prueba es sencilla:

$$L\{e^{kt}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{kt}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-k)t}f(t)\,dt = F(s - k)$$

EJEMPLO 8-3 Transformada de Laplace de e^{3t} senh ωt

Determine la transformada de Laplace de $e^{3t}\text{senh}\,\omega t$.

Solución En el ejemplo 8-2 determinamos que $L\{\text{senh}\,\omega t\} = \omega/(s^2 - \omega^2)$. Entonces, aplicando la propiedad de translación con $k = 3$, obtenemos

$$L\{e^{3t}\text{senh}\,\omega t\} = \frac{\omega}{(s-3)^2 - \omega^2}, \quad s > \omega + 3 \tag{8-13}$$

Propiedad 3: Transformada de Laplace de $t^n f(t)$

Volvamos a examinar la integral definitoria de la transformada de Laplace, ecuación 8-3,

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

La derivación sucesiva de ambos lados de esta ecuación con respecto a s nos da

$$\frac{dF(s)}{ds} = (-1)^1\int_0^\infty e^{-st}\,tf(t)\,dt = L\{tf(t)\},$$

$$\frac{d^2F}{ds^2} = (-1)^2\int_0^\infty e^{-st}t^2f(t)\,dt,$$

y

$$\frac{d^nF(s)}{ds^n} = (-1)^n\int_0^\infty e^{-st}t^nf(t)\,dt \tag{8-14}$$

La última integral en el lado derecho es la transformada de Laplace de la función $t^nf(t)$. Entonces, la ecuación 8-14 puede expresarse como

$$L\{t^nf(t)\} = (-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n} \tag{8-15}$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$.

La ecuación 8-15 es muy importante en la determinación de las transformadas de Laplace de funciones que incluyen potencias de la variable independiente.

EJEMPLO 8-4 **Transformada de Laplace de t^2**

Determine la transformada de Laplace de t^2.

Solución La función dada puede considerarse como $t^2 f(t)$, donde $f(t) = 1$. En el ejemplo 8-1 determinamos que $F(s) = L\{1\} = 1/s$. Entonces, por la ecuación 8-15, la transformada de Laplace de t^2 se determina obteniendo la segunda derivada de $F(s)$, como

$$L\{t^2\} = (-1)^2 \frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{2}{s^3},\ s > 0 \quad \textbf{(8-16)}$$

Propiedad 4: Transformada de Laplace de $f(t)/t$

Reconsidere la integral definitoria de la transformada de Laplace (ecuación 8-3) como

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Integrando ambos lados de esta ecuación desde s hasta ∞ con respecto a s obtenemos

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(s)\, ds &= \int_s^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\, ds \\ &= \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-st} ds\right] f(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{t} f(t)\, dt = L\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\}\end{aligned}$$

ya que el orden de la integración doble puede intercambiarse. También aprovechamos que

$$\int_s^\infty e^{-st} ds = \left.\frac{e^{-st}}{-t}\right|_{s=s}^{\infty} = 0 - \frac{e^{-st}}{-t} = \frac{e^{-st}}{t}$$

Entonces concluimos que

$$\boxed{L\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} = \int_s^\infty F(s)\, ds} \quad \textbf{(8-17)}$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$.

EJEMPLO 8-5 Transformada de Laplace de $1/t$

Determine la transformada de Laplace de $1/t$.

Solución La función dada puede considerarse como $f(t)/t$, donde $f(t) = 1$. En el ejemplo 8-1 determinamos que $F(s) = L\{1\} = 1/s$. Entonces, por la ecuación 8-17, la transformada de Laplace de $1/t$ se determina integrando $F(s)$ de s a ∞, como

$$L\left\{\frac{1}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)\,ds = \lim_{R\to\infty}\int_s^R \frac{1}{s}\,ds = \lim_{R\to\infty}\big[\ln s\big]_s^R = \lim_{R\to\infty}\ln R - \ln s = \infty$$

Por tanto, la transformada de Laplace de $1/t$ no existe porque la integral diverge.

Propiedad 5: Transformada de Laplace de $\int_0^t f(t)\,dt$

Por la definición de la transformada de Laplace (ecuación 8-3), tenemos

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \int_0^\infty\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right]e^{-st}dt$$

Tomando $u = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ y $dv = e^{-st}dt$, e integrando por partes, obtenemos

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

$$= 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \frac{1}{s}F(s)$$

ya que el término entre corchetes desaparece tanto en $t = 0$ como cuando $t \to \infty$ (porque $f(t)$ es una función continua por partes de orden exponencial). Entonces, concluimos que

$$L\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s}F(s) \tag{8-18}$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$. El resultado es muy útil para resolver ecuaciones diferenciales que incluyen integrales.

Propiedad 6: Cambio de escala

Si se conoce la transformada de Laplace de una función $f(kt)$, la transformada de Laplace de la función $f(kt)$ (donde k es una constante) se determina fácilmente por la propiedad de *cambio de escala*, que puede expresarse como

$$L\{f(kt)\} = \frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right) \tag{8-19}$$

Aquí $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, y $F(s/k)$ se obtiene reemplazando cada aparición de s en $F(s)$ por s/k. La prueba es sencilla:

$$L\{f(kt)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(kt)\,dt = \frac{1}{k}\int_0^{\infty} e^{-sx/k} f(x)\,dx = \frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right)$$

donde transformamos la variable de integración a $x = kt$.

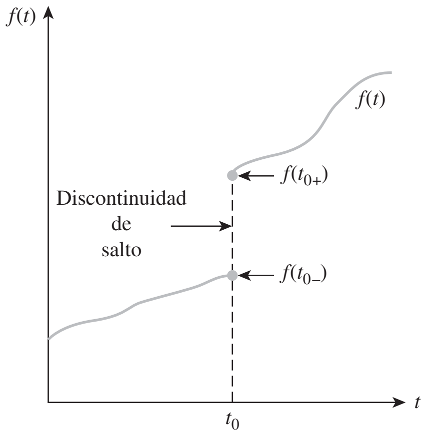


FIGURA 8-8
Muchas funciones de interés práctico incluyen discontinuidades de salto (cambios abruptos en el valor de la función en algún punto).

Repaso de la sección

8-4 Determine la transformada de Laplace de las siguientes funciones usando las propiedades básicas de la transformada y la tabla 8-1:

a) $f(t) = t^2 \operatorname{sen} 2t$ *b)* $f(t) = 3t^2 - \operatorname{sen} 3t$

(*Respuestas: a)* $\dfrac{4(3s^2 - 4)}{(s^2 + 4)^3}$ y *b)* $\dfrac{6}{s^3} - \dfrac{3}{s^2 + 9}$.)

8-4 ▪ TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE FUNCIONES ESCALONADAS, PERIÓDICAS Y DE IMPULSO

Aunque una función no necesita ser continua para tener una transformada de Laplace, hasta ahora se ha puesto énfasis en las funciones continuas debido a su uso extenso y a su simplicidad. Pero algunos problemas de interés práctico incluyen funciones que tienen *discontinuidades de salto*, lo cual las hace continuas por partes. Tales funciones se presentan frecuentemente en el análisis de ciertos circuitos eléctricos, sistemas mecánicos e incluso sistemas térmicos, entre otros campos (figura 8-8). Afortunadamente, existe la transformada de Laplace de funciones con discontinuidades de salto (es decir, funciones continuas por partes), y la técnica de la transformada de Laplace se convierte en una herramienta invaluable para resolver ecuaciones diferenciales que incluyen tales funciones. Pero primero necesitamos desarrollar las herramientas matemáticas necesarias para describir con exactitud las funciones con discontinuidades de salto. Para este propósito, definiremos la *función de escalón unitario* $u(t - t_0)$ y la *función de impulso unitario* $\delta(t - t_0)$. Considerando que la transformada de Laplace se define en el intervalo $0 \le t < \infty$, limitaremos la exposición a valores no negativos de t.

Función de escalón unitario

Probablemente la función más sencilla que incluye una discontinuidad de salto es la **función de escalón unitario** $u(t - t_0)$, también conocida como *función de Heaviside*, que se define como

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \ge t_0 \end{cases} \tag{8-20}$$

donde $t = t_0$ es la ubicación del salto, como se muestra en la figura 8-9. Para el caso especial de $t_0 = 0$, la función de escalón unitario se vuelve simplemente $u(t - 0) = 1$ para $t \ge 0$, y su transformada de Laplace es

$$L\{u(t)\} = L(1) = \frac{1}{s} \tag{8-21}$$

La función de escalón unitario $u(t - t_0)$ es simplemente la translación de $u(t)$ en la cantidad t_0. Su transformada de Laplace se determina fácilmente introduciendo la variable ficticia $x = t - t_0$, como

$$L\{u(t - t_0)\} = \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} u(t - t_0)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-s(x+t_0)} u(x)\,dx$$

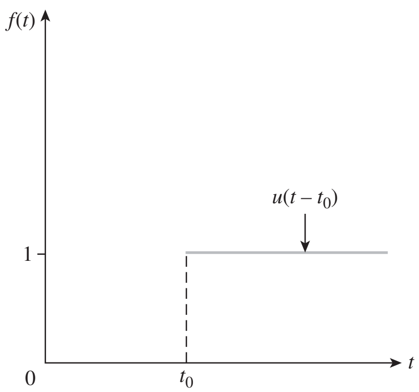


FIGURA 8-9
Función de escalón unitario $u(t - t_0)$.

$$= e^{-t_0 s}\int_0^{\infty} e^{-sx}u(x)dx = e^{-t_0 s}L\{1\} = \frac{e^{-t_0 s}}{s}$$

Entonces,
$$L\{u(t - t_0)\} = \frac{e^{-t_0 s}}{s} \qquad \textbf{(8-22)}$$

Ahora veamos lo que sucede cuando multiplicamos una función dada $f(t)$ por la función de escalón unitario (figura 8-10). Cuando $t_0 = 0$, tenemos

$$u(t - t_0)f(t) \equiv f(t) \qquad \textbf{(8-23)}$$

ya que $u(t - 0) = 1$ para $t \geq 0$. Entonces, la función de escalón unitario no tiene efecto sobre la función $f(t)$ si $t_0 = 0$. Pero cuando $t_0 \neq 0$,

$$u(t - t_0)f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ f(t), & t \geq t_0 \end{cases} \qquad \textbf{(8-24)}$$

Es decir, multiplicando una función $f(t)$ por la función de escalón unitario $u(t - t_0)$ hace que desaparezca la parte de $f(t)$ en $0 \leq t < t_0$; pero no tiene efecto en la parte restante de $f(t)$.

Ahora suponga que no queremos suprimir esa parte de $f(t)$ en $0 \leq t < t_0$. En vez de esto, queremos posponer el inicio de $f(t)$ a $t = t_0$. Esto se logra corriendo a la derecha $f(t)$ en t_0 unidades y multiplicándola por $u(t - t_0)$ para suprimirla para $t < t_0$, como se muestra en la figura 8-10. Entonces,

$$\boxed{u(t - t_0)f(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ f(t - t_0), & t \geq t_0 \end{cases}} \qquad \textbf{(8-25)}$$

La función de escalón unitario $u(t - t_0)$ puede considerarse como un switch que “apaga” la función acompañante hasta que $t = t_0$ y la “enciende” después.

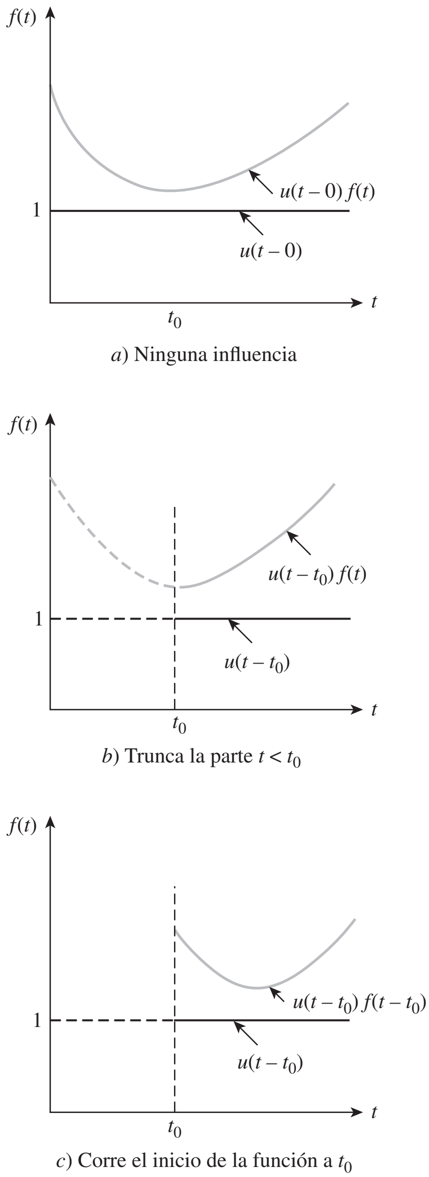


FIGURA 8-10
Influencia de la función de escalón unitario $u(t - t_0)$ sobre una función $f(t)$.

EJEMPLO 8-6 Transformada de Laplace de funciones corridas

Determine la transformada de Laplace de lo siguiente:

a) $f(t) = t^2$

b) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ t^2, & t \geq 3 \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ (t - 3)^2, & t \geq 3 \end{cases}$

Solución Las tres funciones se grafican en la figura 8-11. Este ejemplo tiene por objeto ilustrar las particularidades de la transformación de Laplace de funciones que son diferentes pero tienen el mismo comportamiento general.

a) Por la tabla 8-1, tenemos $L\{f(t)\} = L\{t^2\} = 2/s^3$.

b) Utilizando la función de escalón unitario, vemos que esta función puede expresarse como $f(t) = u(t - 3)t^2$. Por la definición de la transformada de Laplace, tenemos

$$F(s) = L\{u(t - 3)t^2\} = \int_0^{\infty} e^{-st}u(t - 3)t^2dt = \int_0^{\infty} e^{-st}t^2dt$$

TABLA 8-3

Corrimiento en el dominio de *t* con la transformada de Laplace

$L\{u(t - 0)\} = \dfrac{1}{s}$
$L\{u(t - t_0)\} = \dfrac{e^{-t_0 s}}{s}$
$L\{u(t - t_0)f(t)\} = e^{-t_0 s}L\{f(t + t_0)\}$
$L\{u(t - t_0)f(t - t_0)\} = e^{-t_0 s}L\{f(t)\}$

ya que la función es cero para $t \leq 3$. Para restaurar a cero los límites inferiores de integración, definimos una nueva variable $x = t - 3$ y sustituimos:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s(x+3)}(x + 3)^2 dx = e^{-3s}\int_0^\infty e^{-3x}(x + 3)^2 dx$$

$$= e^{-3s}L\{x^2 + 6x + 9\} = e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right)$$

c) Utilizando la función de escalón unitario, esta función puede expresarse como $f(t) = u(t - 3)\,(t - 3)^2$. Entonces, nuevamente por la definición de la transformada de Laplace, obtenemos

$$F(s) = L\{u(t - 3)(t - 3)^2\} = \int_0^\infty e^{-st}u(t - 3)(t - 3)^2 dt = \int_3^\infty e^{-st}(t - 3)^2 dt$$

ya que la función es cero para $t \leq 3$. Para restaurar a cero el límite inferior de integración, definimos una nueva variable $x = t - 3$ y sustituimos:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s(x+3)}x^2 dx = e^{-3s}\int_0^\infty e^{-sx}x^2 dx = e^{-3s}L\{x^2\} = \frac{2e^{-3s}}{s^3}$$

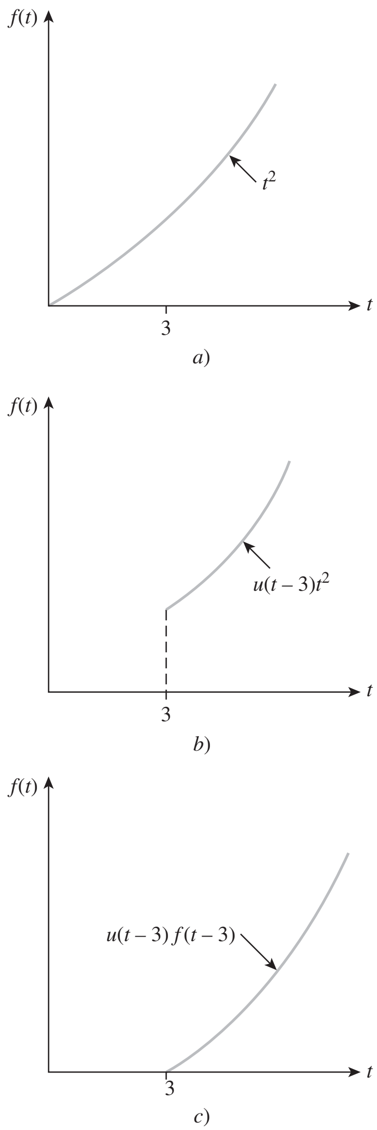


FIGURA 8-11
Funciones descritas en el ejemplo 8-6.

A la luz de la explicación y el ejemplo anterior, llegamos a la siguiente conclusión respecto a la transformada de Laplace de las funciones escalonadas:

1. $$L\{u(t - 0)\} = \frac{1}{s} \qquad \textbf{(8-21 repetida)}$$

2. $$L\{u(t - t_0)\} = \frac{e^{-t_0 s}}{s} \qquad \textbf{(8-22 repetida)}$$

3. $$L\{u(t - t_0)f(t)\} = e^{-t_0 s}L\{f(t - t_0)\} \qquad \textbf{(8-26)}$$

4. $$L\{u(t - t_0)f(t - t_0)\} = e^{-t_0 s}L\{f(t)\} \qquad \textbf{(8-27)}$$

Estas relaciones se resumen en la tabla 8-3.

EJEMPLO 8-7 **Transformada de Laplace de pulso rectangular**

Obtenga una ecuación matemática y determine la transformada de Laplace de la función

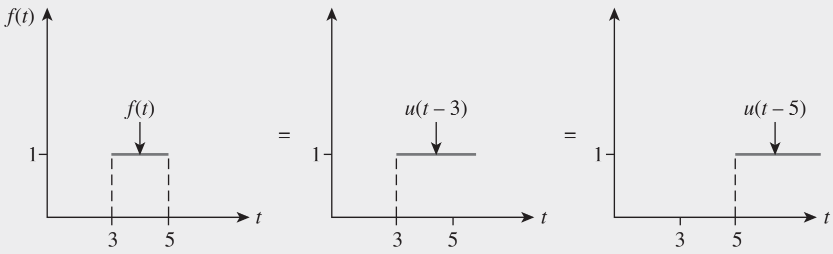
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ 1, & 3 \leq t \leq 5 \\ 0, & t > 5 \end{cases}$$

Solución Esta función puede considerarse como la diferencia entre dos funciones de escalón unitario, como se muestra en la figura 8-12, y puede expresarse como

$$f(t) = u(t-3) - u(t-5)$$

La transformada de Laplace de esta función (de la ecuación 8-22) es

$$F(s) = L\{u(t-3) - u(t-5)\} = L\{u(t-3)\} - L\{(t-5)\} = \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s}$$



Formación de las funciones descritas en el ejemplo 8-7 utilizando las funciones de escalón unitario.

FIGURA 8-12
Formación de las funciones descritas en el ejemplo 8-7 utilizando funciones de escalón unitario.

EJEMPLO 8-8 Transformada de Laplace de un pulso semisinusoidal

Obtenga una sola ecuación para describir la siguiente función y determine su transformada de Laplace:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2\pi \\ \operatorname{sen} t, & 2\pi \le t \le 3\pi \\ 0, & t > 3\pi \end{cases}$$

Solución Esta función puede considerarse como el producto de sen t por la diferencia entre dos funciones de escalón unitario, como se muestra en la figura 8-13, y puede expresarse como

$$f(t) = \operatorname{sen} t\Big[u(t-2\pi) - u(t-3\pi)\Big]$$

La transformada de Laplace de esta función es, por la ecuación 8-26,

$$\begin{aligned} F(s) &= L\{\operatorname{sen} t\big[u(t-2\pi) - u(t-3\pi)\big]\} \\ &= L\{u(t-2\pi)\operatorname{sen} t\} - L\{u(t-3\pi)\operatorname{sen} t\} \\ &= e^{-2\pi s}L\{\operatorname{sen}(t+2\pi)\} - e^{-3\pi s}L\{\operatorname{sen}(t+3\pi)\end{aligned}$$

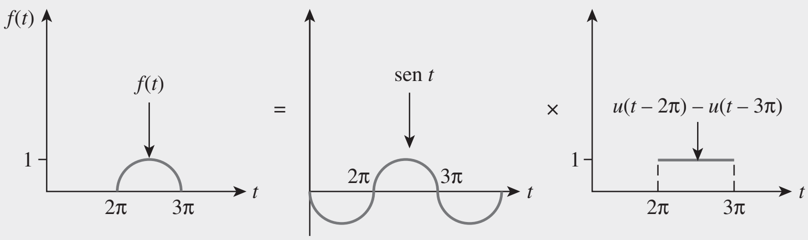


FIGURA 8-13
Formación de la función descrita en el ejemplo 8-8 usando funciones de escalón unitario.

Pero sen $(t + 2\pi) = \text{sen } t$, y sen $(t + 3\pi) = \text{sen }(-t) = -\text{sen } t$. Por tanto,

$$F(s) = e^{-2\pi s}L\{\text{sen } t\} - e^{-3\pi s}L\{-\text{sen } t\} = (e^{-2\pi s} + e^{-3\pi s})L\{\text{sen } t\}$$
$$= \frac{e^{-2\pi s} + e^{-3\pi s}}{s^2 + 1}$$

Funciones periódicas

Como las funciones periódicas se presentan frecuentemente en la práctica merecen atención especial. Se dice que una función $f(t)$ es **periódica** con periodo p si existe un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para cada valor positivo de t, siendo p el número más pequeño número que cumpla esta definición (figura 8-14). Observe que cualquier múltiplo entero de p tal como $2p$, $3p$ y $4p$ también satisfará la relación de periodicidad. Por ejemplo, las bien conocidas funciones trigonométricas sen t y cos t son periódicas con periodo 2π.

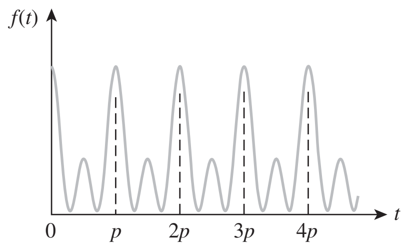


FIGURA 8-14
Función periódica con periodo p.

Para la transformada de Laplace de una función periódica, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 8-2 Existencia de transformadas de Laplace de funciones periódicas

Si $f(t)$ es una función periódica continua por partes con periodo p para $t \geq 0$, su transformada de Laplace existe y se determina por

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt, \quad s > 0 \qquad \textbf{(8-28)}$$

Comprobación Este es un teorema importante, ya que nos permite determinar la transformada de Laplace de una función periódica integrando la función en un solo periodo. Iniciamos la prueba dividiendo el intervalo de la integral definitoria de la transformada de Laplace en segmentos de longitud p,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$
$$= \int_0^p e^{-st}f(t)\,dt + \int_p^{2p} e^{-st}f(t)\,dt + \cdots + \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st}f(t)\,dt + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{np}^{(n+1)p} e^{-st}f(t)\,dt$$

Ahora cambiamos la variable de integración a $x = t - np$. Sustituyendo, tenemos

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^p e^{-s(x+np)}f(x + np)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nps}\int_0^p e^{-sx}f(x)\,dx$$
$$= (1 + e^{-ps} + e^{-2ps} + e^{-3ps} + \cdots + e^{-nps} + \cdots)\int_0^p e^{-sx}f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-sx} f(x)\,dx$$

ya que, para funciones periódicas, $f(x + np) = f(x)$ y

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

para la serie geométrica con $x = e^{-ps} < 1$. Observe que $e^{-ps} < 1$, ya que tanto p como s son positivas.

EJEMPLO 8-9 Transformada de Laplace de sen ωt

Determine la transformada de Laplace de sen ωt.

Solución La función sen ωt es periódica, con periodo $p = 2\pi/\omega$. Entonces, su transformada de Laplace puede determinarse a partir de la ecuación 8-28, con ayuda de tablas de integrales.

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} \operatorname{sen} \omega t\,dt$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-ps}} \left[\frac{e^{-st}(-s \operatorname{sen} \omega t - \omega \cos \omega t)}{s^2 + \omega^2} \right]_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-ps}} \frac{\omega(1 - e^{-2\pi/\omega})}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

que es el mismo resultado dado en la tabla 8-1.

EJEMPLO 8-10 Transformada de Laplace de un tren de pulsos rectangulares

Determine la transformada de Laplace de la siguiente función periódica con periodo $t = 6$:

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 3 \\ -2, & 3 \le t < 6 \end{cases}$$

Solución Esta es una función de onda cuadrada con una amplitud de 2 y un periodo de $p = 6$, como se muestra en la figura 8-15. Por la ecuación 8-28, tenemos

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-6s}} \left[\int_0^3 e^{-st}(2)\,dt + \int_3^6 e^{-st}(-2)\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-6s}} \left[2 \left| -\frac{e^{-st}}{s} \right|_0^3 -2 \left| -\frac{e^{-st}}{s} \right|_3^6 \right]$$

$$= \frac{2(1 - 2e^{-3s} + e^{-6s})}{s(1 - e^{-6s})} = \frac{2(1 - e^{-3s})^2}{s(1 - e^{-3s})(1 + e^{-3s})}$$

$$= \frac{2(1 - e^{-3s})}{s(1 + e^{-3s})} = \frac{2}{s} \tanh 3s \qquad \textbf{(8-29)}$$

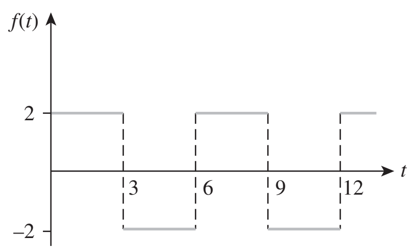


FIGURA 8-15
Función periódica descrita en el ejemplo 8-10.

Solución alternativa La función de onda cuadrada dada, de amplitud $a = 2$ y periodo $p = 6$, puede expresarse en términos de las funciones de escalón unitario como

$$f(t) = 2\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t-3n)\right]$$

La transformada de Laplace de esta función se determina con facilidad de

$$\begin{aligned} F(s) &= 2\left[L\{1\} + L\left\{2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t-3n)\right\}\right] \\ &= 2\left[L\{1\} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n L\{u(t-3n)\}\right] \\ &= 2\left[\frac{1}{s} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-3ns}}{s}\right] \\ &= \frac{2}{s}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-3ns}\right] \end{aligned} \quad \textbf{(8-30)}$$

Se deja al lector como ejercicio comprobar que las ecuaciones 8-29 y 8-30 son idénticas.

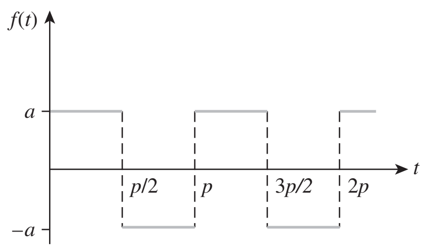


FIGURA 8-16
Función general de onda cuadrada, amplitud a y periodo p.

En general, para una función de onda cuadrada de amplitud a y periodo p, su transformada de Laplace puede expresarse como (figura 8-16)

$$f(t) = \begin{cases} a & 0 \le t < p/2 \\ -a & p/2 \le t < p \end{cases} \quad \textbf{(8-31)}$$

y

$$F(s) = \frac{a(1-e^{-ps/2})}{s(1+e^{-ps/2})} = \frac{a}{s}\tanh\frac{ps}{2} = \frac{a}{s}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-pns/2}\right] \quad \textbf{(8-32)}$$

Funciones de impulso

Algunos problemas físicos incluyen fuerzas de gran magnitud representadas por funciones que actúan durante un periodo muy corto, como los picos de voltaje o la fuerza de un golpe sobre un cuerpo. Una gráfica de tales funciones aparece como una efusión de altos picos en un tiempo y cero en el resto del tiempo. Debido a su naturaleza inusual, tales funciones necesitan tratarse en forma diferente que las funciones ordinarias.

Considere, por ejemplo, un deportista que patea un balón. El pie del jugador toca el balón en el tiempo t_0, aplica una fuerza grande y repentina $f(t)$ durante un periodo muy corto (digamos ε) y pierde contacto con el balón. La integral de la fuerza en el intervalo ε se llama **impulso** I de la fuerza. Este es el mismo concepto que el del impulso que aparece en el principio de momento de impulso que se estudia en la dinámica, el cual establece que el cambio en el momento es igual al impulso, que es el área bajo la curva fuerza-tiempo.

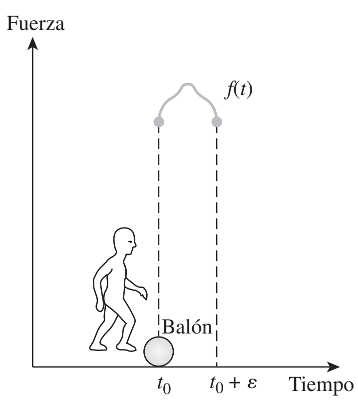


FIGURA 8-17
Variación en el tiempo de la fuerza aplicada sobre un balón al patearlo un futbolista.

Representando esta fuerza de naturaleza impulsiva por $i(t)$, puede describirse como (figura 8-17)

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ f(t), & t_0 \le t \le t_0 + \varepsilon \\ 0, & t > t_0 + \varepsilon \end{cases} \quad \textbf{(8-33)}$$

Esta descripción es bastante exacta y razonable, pero no es práctica; en principio, no es fácil medir el intervalo ε ni la forma funcional de la fuerza $f(t)$ durante ε. Sin embargo, no necesitamos saber el valor preciso de ε ni la forma exacta de $f(t)$. En la mayoría de los casos, lo que realmente importa es el impulso de la fuerza (es decir, el área I debajo de la curva fuerza-tiempo):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} i(t)\,dt = \int_{-\infty}^{t_0} 0\,dt + \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} f(t)\,dt + \int_{t_0+\varepsilon}^{\infty} 0\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} f(t)\,dt \quad \textbf{(8-34)}$$

Entonces, es razonable suponer que toda la fuerza actúa en el instante t_0, con una intensidad que es igual al impulso I. Ahora, con esta idealización haremos lo mismo que antes para las funciones escalonadas al definir la función de escalón unitario $u(t - t_0)$. Pero lo haremos para las funciones de impulso, definiendo la **función de impulso unitario** o la **función Dirac delta** $\delta(t - t_0)$. Se describe en una forma poco convencional como

$$\delta(t - t_0) = 0, \quad t \neq t_0 \quad \textbf{(8-35a)}$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t - t_0)\,dt = 1 \quad \textbf{(8-35b)}$$

La función delta se entiende mejor y tiene más sentido cuando se estudia en combinación con una función; por ejemplo, el impulso $i(t)$ que acabamos de explicar puede expresarse con la ayuda de una función delta como (figura 8-18)

$$i(t) = I\delta(t - t_0) \quad \textbf{(8-36)}$$

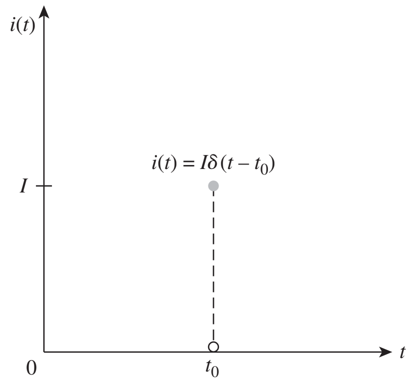


FIGURA 8-18
Descripción idealizada de una función de naturaleza impulsiva en términos de la función delta.

Puede considerarse que significa que el valor de $i(t)$ es igual a cero para todas las t salvo t_0, donde es igual a I.

El valor real de la función delta se hace evidente cuando aparece bajo el signo integral. Por ejemplo, tenemos

$$\int_0^{\infty} i(t)\delta(t - t_0)\,dt = i(t_0) = I$$

O, para una función general $f(t)$, como

$$\int_0^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,dt = f(t_0) \quad \textbf{(8-37)}$$

Usaremos la función delta en este contexto, y esta ecuación puede tomarse como la *definición* de la función delta. Los límites de integración no importan mientras el intervalo incluya el punto t_0. Observe que la función delta no es una función en el sentido ordinario; se parece más a un *operador* que selecciona el valor de la función en t_0 de acuerdo con la integral en la ecuación 8-37.

Observando la similitud de la ecuación 8-37 con la definición de la transformada de Laplace, la transformada de Laplace de la función delta se determina fácilmente reemplazando $f(t)$ en la ecuación 8-37 con e^{-st}. Obtenemos (figura 8-19)

$$L\{\delta(t - t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t - t_0)\,dt = e^{-st_0} \quad \textbf{(8-38)}$$

Para el caso especial de $t_0 = 0$, tenemos

$$L\{\delta(t - 0)\} = e^0 = 1 \quad \textbf{(8-39)}$$

$$L\{I\delta(t - t_0)\} = Ie^{-st_0}$$
$$L\{I\delta(t - 0)\} = I$$

FIGURA 8-19
Transformada de Laplace de una función de impulso con un impulso de magnitud I.

Señalamos que la variable dependiente no necesita ser una fuerza y que la variable independiente t no es necesariamente el tiempo; también puede ser la variable de

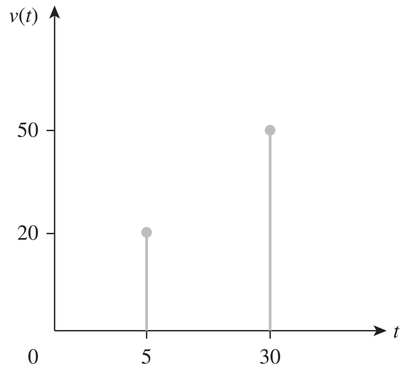


FIGURA 8-20
Función de voltaje descrita en el ejemplo 8-11.

espacio. Por ejemplo, la disipación continua de calor desde un alambre delgado de resistencia en medio de un cilindro grueso puede representarse como $P\delta(r - 0)$, donde r es la variable espacial en la dirección radial y P es la magnitud del calor disipado.

EJEMPLO 8-11 **Respuesta de impulso de un circuito**

Un circuito eléctrico experimenta dos sobrevoltajes, uno de 20 V en el tiempo $t = 5$ s y otro de 50 V en el tiempo $t = 30$ s. Obtenga una ecuación matemática para el voltaje de impulso $v(t)$ y determine su transformada de Laplace.

Solución La función de voltaje $v(t)$ puede expresarse en forma apilada como (figura 8-20)

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 5 \\ 20, & t = 5 \\ 0, & 5 < t < 30 \\ 50, & t = 30 \\ 0, & t > 30 \end{cases}$$

Usando funciones delta, podemos también expresar $v(t)$ en forma compacta como

$$v(t) = 20\delta(t - 5) + 50\delta(t - 30)$$

La transformada de Laplace de esta función (por la ecuación 8-38) es

$$V(s) = L\{[20\delta(t - 5) + 50\delta(t - 30)]\} = 20e^{-5s} + 50e^{-30s}$$

Repaso de la sección

8-5C Explique en qué se distinguen las funciones $u(t - t_0)f(t)$ y $u(t - t_0)f(t - t_0)$ de $f(t)$.

8-5 ▪ TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE DERIVADAS Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Nuestro objetivo principal en este capítulo es resolver ecuaciones diferenciales con la transformada de Laplace. Pero no podemos intentar tomar la transformada de Laplace de ecuaciones diferenciales a menos que conozcamos la transformada de Laplace de derivadas.

La transformada de Laplace de una derivada se obtiene tratando la derivada como una función ordinaria y aplicando la definición de la transformada. Por ejemplo, la transformada de Laplace de la derivada n de la función $y(t)$ puede determinarse por

$$L\{f^{(n)}(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f^{(n)}(t)\,dt \tag{8-40}$$

si esta integral converge para algunos valores de s. Entonces, la función derivada $f^{(n)}(t)$ debe satisfacer ciertos requisitos para que exista la transformada de Laplace.

Teorema 8-3 Transformada de Laplace de una derivada

Si $f(t)$ es una función continua de orden exponencial en $t \geq 0$ y su derivada $f'(t)$ es por lo menos continua por partes, entonces

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \tag{8-41}$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ y $f(0)$ es el valor de $f(t)$ en el $t = 0$. (Si $f(t)$ no es continua en $t = 0$, entonces $f(0) = f(0+)$, donde $f(0+)$ es el límite de $f(t)$ cuando t tiende a cero desde la derecha.)

Comprobación Elegimos una función continua para $f(t)$ en $t \geq 0$, como se muestra en la figura 8-21, y graficamos su derivada en la misma figura. Observe que aunque $f(t)$ es continua, su derivada $f'(t)$ no lo es, ya que la derivada de una función en un punto específico representa la pendiente de la función en ese punto, y la pendiente de $f(t)$ cambia abruptamente en $t = t_0$. En consecuencia, $f'(t)$ tiene un salto finito en $t = t_0$, lo cual la hace continua por partes. Observe que las funciones continuas con pendientes gradualmente cambiantes (tales como t^3 o sen ωt) tienen derivadas continuas. Por la definición de la transformada de Laplace, tenemos

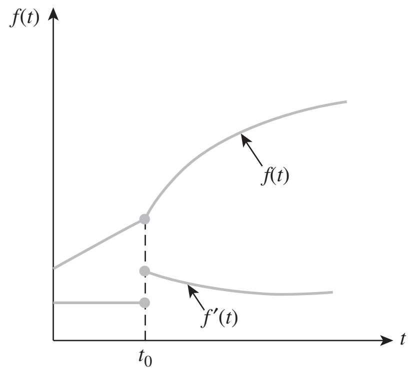


FIGURA 8-21
Función continua con una derivada continua por partes.

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{t_0} e^{-st} f'(t)\,dt + \int_{t_0}^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$$

Ahora los integrandos de las dos integrales del lado derecho son continuos. Entonces, la integración por partes es aplicable. Tomando $u = e^{-st}$ y $dv = f'(t)\,dt$, tenemos $du = -se^{-st}$ y $v = f(t)$. Entonces la integración por partes da

$$L\{f'(t)\} = \left[e^{-st}f(t)\Big|_0^{t_0} - \int_0^{t_0}(-se^{-st})f(t)\,dt\right]$$

$$+\left[e^{-st}f(t)\Big|_{t_0}^{\infty} - \int_{t_0}^{\infty}(-se^{-st})f(t)\,dt\right]$$

$$= e^{-st_0}f(t_{0-}) - f(0) + \lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) - e^{-st_0}f(t_{0+}) + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

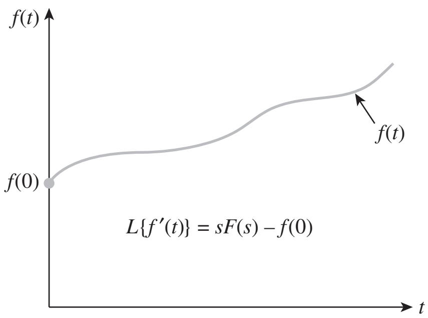
$$= e^{-st_0}[f(t_{0-}) - f(t_{0+})] - f(0) + sF(s) \qquad \textbf{(8-42)}$$

$$= sF(s) - f(0)$$

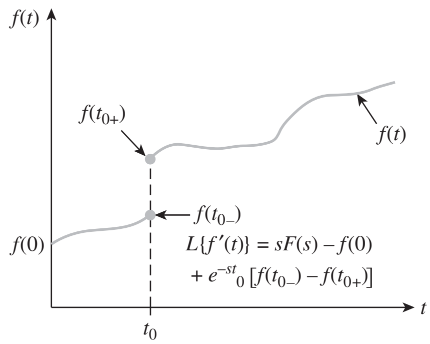
ya que $f(t_{0-}) = f(t_{0+})$ y $\lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) = 0$. Observe que la primera condición es verdad solo para funciones continuas, y esta es la razón por la que necesitamos que la función $f(t)$ sea continua. La segunda condición es una consecuencia directa de que $f(t)$ sea de orden exponencial. Esta condición se satisface haciendo que s sea mayor que a si $f(t)$ es una función de orden exponencial a.

Hay otra observación relacionada con esta prueba. La función $f(t)$ no tiene que ser continua para tener una transformada de Laplace; basta con que sea continua por partes. Pero en este caso, su transformada de Laplace incluirá los saltos en los puntos de discontinuidad, como se dan en la ecuación 8-42 (figura 8-22).

Por simplicidad en la prueba, supusimos que $f'(t)$ tiene una sola discontinuidad de salto. Obtendríamos el mismo resultado si repitiéramos la prueba con $f'(t)$ con cualquier número de discontinuidades de salto.



a) $f(t)$ es continua



b) $f(t)$ es continua por partes

FIGURA 8-22
La transformada de Laplace de la primera derivada de *a)* una función continua y *b)* una función continua por partes.

Corolario 1 del teorema 8-3

Si $f(t)$ y $f'(t)$ son funciones continuas de orden exponencial en $t \leq 0$ y $f''(t)$ es por lo menos continua por partes, entonces

$$L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{8-43}$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, y $f(0)$ y $f'(0)$ son los valores de $f(t)$ y $f'(t)$ en $t = 0$, respectivamente.

Comprobación Esta es una extensión directa del teorema 8-3, y es posible probar fácilmente definiendo $g(t) = f'(t)$ y aplicando el teorema 8-2 dos veces:

$$\begin{aligned} L\{f''(t)\} &= L\{g'(t)\} \\ &= sL\{g(t)\} - g(0) \\ &= sL\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Corolario 2 del teorema 8-3

Si $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, . . . , $f^{(n-1)}(t)$ son funciones continuas de orden exponencial en $t \geq 0$ y $f^{(n)}(t)$ es al menos continua por partes, entonces la transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$ existe y está dada por

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{8-44}$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, y $f(0)$, $f'(0)$, . . . , $f^{(n-1)}(0)$ son los valores iniciales de $f(t)$ y sus derivadas.

Comprobación Este corolario puede probarse fácilmente por inducción matemática o por aplicación sucesiva del teorema 8-3 n veces, como hicimos en el corolario 1.

Transformada de Laplace y ecuaciones diferenciales

La transformada de Laplace de una ecuación diferencial se obtiene tomando la transformada de Laplace de cada término en cada lado de la ecuación y aplicando la linealidad de la transformada; es decir, por el principio de que la transformada de Laplace de una suma es la adición de las transformadas de Laplace. Esto se ilustra ahora con un ejemplo.

En el ejemplo 8-12, la ecuación diferencial se convirtió en una ecuación algebraica en $Y(s)$, que es la transformada de Laplace de la función incógnita $y(t)$.

EJEMPLO 8-12 **Transformada de Laplace de dos ecuaciones diferenciales**

Determine la transformada de Laplace de las ecuaciones diferenciales *a*) $y'' - 2y' + 3y = 0$ y *b*) $y' = te^{3t}$, y despeje $Y(s)$ en cada caso.

Solución Suponemos que las derivadas satisfacen las condiciones del teorema 2, y por tanto, sus transformadas de Laplace existen. Dado que la transformada de Laplace de cero es cero, y usando las relaciones de la transformada de Laplace para derivadas, obtenemos lo siguiente:

a) $L\{y''-2y'+3y\} = L\{y''\} - 2L\{y'\} + 3L\{y\}$

$$= [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 2[sY(s) - y(0)] + 3Y(s)$$

$$= (s^2 - 2s + 3)Y(s) - y'(0) - (s - 2)y(0) = 0$$

Despejando $Y(s)$, obtenemos

$$Y(s) = \frac{y'(0) + (s-2)y(0)}{s^2 - 2s + 3}$$

b) $L\{y' - te^{3t} - 2\} = L\{y'\} - L\{te^{3t}\} - 2L\{1\}$

$$= [sY(s) - y(0)] - \frac{1}{(s-3)^2} - \frac{2}{s} = 0$$

Despejando $Y(s)$, obtenemos

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-3)^2} + \frac{2}{s^2} + \frac{y(0)}{s}$$

En ambas soluciones, $y(0)$ y $y'(0)$ son las condiciones iniciales específicas.

En ambos casos obtuvimos soluciones explícitas para $Y(s)$. Ahora la cuestión es determinar la función cuya transformada de Laplace se conoce; en otras palabras, encontrar la *transformada inversa de Laplace* de una función $F(s)$. Esto se explica en la siguiente sección.

Observe que la función $Y(s)$ ya contiene las condiciones iniciales; entonces, la inversión nos da directamente la solución del problema (figura 8-23). Esto contrasta con el método ordinario de solución que implica obtener la solución general de una ecuación diferencial y luego aplicar las condiciones iniciales o en la frontera para obtener la solución para el problema particular de que se trata.

Ecuación diferencial

$$ay'' + by' + c = 0$$

Transformada de Laplace

$$Y(s) = \frac{(as+b)y(0) + ay'(0)}{as^2 + bs + c}$$

FIGURA 8-23
La transformada de Laplace de una ecuación diferencial también incorpora las condiciones iniciales.

Repaso de la sección

8-6 Determine la transformada de Laplace de las siguientes ecuaciones diferenciales y obtenga una relación para la transformada de la función incógnita, $Y(s)$.

a) $y''' - 2y' + 5y = 0$ *b)* $y'' = 3te^{2t}$

(*Respuestas: a)* $Y(s) = \dfrac{(s^2 - 2)y(0) + sy'(0) + y''(0)}{s^3 - 2s + 5}$ y

b) $Y(s) = \dfrac{(s-2)^2y'(0) + s(s-2)^2y(0) + 3}{s^2(s-2)^2}$.)

8-6 ▪ TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Propiedades básicas de la transformada inversa de Laplace
1 $L^{-1}\{C_1F_1(s) + C_2F_2(s)\} = C_1L^{-1}\{F_1(s)\} + C_2L^{-1}\{F_2(s)\}$
2 $L^{-1}\{F(s-k)\} = e^{kt}L^{-1}\{F(s)\}$
3 $L^{-1}\{sF(s)\} = \frac{d}{dt}L^{-1}\{F(s)\}$
4 $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t L^{-1}\{F(s)\}dt$
5 $L^{-1}\left\{\frac{d^nF(s)}{ds^n}\right\} = (-t)^nL^{-1}\{F(s)\}$
6 $L^{-1}\{e^{t_0s}F(s)\} = u(t-t_0)f(t-t_0)$

La solución de ecuaciones diferenciales mediante la transformada de Laplace necesita primero la determinación de la transformada de la solución $Y(s)$, que es fácil y clara, y luego la determinación de la función $y(t)$ cuya transformada es $Y(s)$, lo cual es mucho más difícil. Determinar la función original a partir de su transformada se llama *encontrar la inversa de la función transformada* (o *invertir la función transformada*). La **transformada inversa de Laplace** se representa con el símbolo L^{-1}:

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) \tag{8-45}$$

La manera más rápida y fácil de encontrar la transformada inversa es ver una tabla de transformadas de Laplace y leer la función que corresponde a la transformada dada. Suponiendo, por supuesto, que pueda encontrarla en la tabla. En la literatura hay amplia variedad disponible de tablas de transformadas; pero muy probablemente la transformada que usted tiene no estará en la tabla a menos que sea una función muy simple u ordinaria. Es posible obtener directamente la función inversa, pero implica integración en el dominio complejo, lo cual no es fácil de hacer sin suficiente preparación en variables complejas. Entonces, la única alternativa que nos queda es usar el teorema de convolución o expresar la transformada dada como una suma de fracciones sencillas que pueden encontrarse en la tabla de transformadas. Ambos enfoques se explican en las siguientes secciones, pero primero explicaremos las propiedades de la transformada inversa de Laplace, que se resumen en la tabla 8-4. Se deducen directamente de las propiedades de la transformada de Laplace que explicamos y comprobamos en la sección 8-3.

1. $$L^{-1}\{C_1F_1(s) + C_2F_2(s)\} = C_1L^{-1}\{F_1(s)\} + C_2L^{-1}\{F_2(s)\}$$

(linealidad) **(8-46)**

Es decir, la transformada inversa de Laplace es un operador lineal, igual que la transformada misma. Por ejemplo,

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{3}{s+5}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\} = 2 - 3e^{-5t}$$

2. $$L^{-1}\{F(s-k)\} = e^{kt}L^{-1}\{F(s)\}$$ (propiedad de corrimiento) **(8-47)**

Es decir, la inversa de una transformada de Laplace en $s - k$ (donde k es una constante) puede encontrarse reemplazando todas las apariciones de $s - k$ por s, determinando la inversa y multiplicando dicha inversa por e^{kt}. Por ejemplo,

$$L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2 - w^2}\right\} = e^{-3t}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - w^2}\right\} = e^{-3t}\cosh wt$$

3. $$L^{-1}\{sF(s)\} = \frac{d}{dt}L^{-1}\{F(s)\} \tag{8-48}$$

Es decir, la transformada inversa de Laplace que contiene los factores puede encontrarse omitiendo el factor s, determinando la inversa de la parte que queda y deribando dicha inversa con respecto a t. Por ejemplo,

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} = \frac{d}{dt}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\text{sen}\,3t}{3}\right) = \cos 3t$$

4. $$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t L^{-1}\{F(s)\}dt \tag{8-49}$$

Es decir, la inversa de una transformada de Laplace que contiene el factor $1/s$ puede encontrarse omitiendo dicho factor, determinando la inversa de la parte que queda e integrando la inversa con respecto t de 0 a t. Por ejemplo,

$$L^{-1}\left\{\frac{6}{s(s-2)}\right\} = \int_0^t L^{-1}\left\{\frac{6}{s-2}\right\}dt = 6\int_0^t e^{2t}dt = 6\frac{e^{2t}}{2}\bigg|_0^t = 3e^{2t} - 3$$

5. $$L^{-1}\left\{\frac{d^nF(s)}{ds^n}\right\} = (-t)^n L^{-1}\{F(s)\} \tag{8-50}$$

Es decir, la inversa de la derivada n de una transformada de Laplace puede encontrarse determinando la inversa de la transformada y multiplicándola por la potencia n de $-t$. Por ejemplo,

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{d^2\left(\frac{1}{s}\right)}{ds^2}\right\} = (-t)^2 L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = t^2 \times 1 = t^2$$

ya que $2/s^3$ es la segunda derivada de $1/s$.

6. $$L^{-1}\{e^{-t_0 s}F(s)\} = u(t-t_0)f(t-t_0) \tag{8-51}$$

Es decir, la transformada inversa de Laplace que contiene el factor $e^{-t_0 s}$ puede encontrarse omitiendo el factor $e^{-t_0 s}$, determinando la inversa de la parte que queda, reemplazando la variable t por $t - t_0$ y multiplicándola por la función de escalón unitario $u(t - t_0)$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{2e^{-3s}}{s^3}\right\} &= u(t-3)L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}\Big|_{t\to t-3} = u(t-3)(t^2)\big|_{t\to t-3} \\ &= u(t-3)(t-3)^2 \end{aligned}$$

7. $$L^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right) \quad \text{(propiedad de cambio de escala)} \tag{8-52}$$

Es decir, la inversa de una transformada de Laplace que es función de ks en vez de s puede encontrarse reemplazando todas las apariciones de ks por s, determinando su inversa, reemplazando todas las apariciones de t en la inversa por kt y dividiéndola entre k. Por ejemplo,

$$L^{-1}\left\{\frac{5s}{25s^2+9}\right\} = \frac{1}{5}\cos\frac{3t}{5}$$

ya que

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} = \cos 3t$$

Como propiedad básica adicional podemos mencionar la *unicidad* de la transformada inversa. La inversa de una función dada es una función continua única.

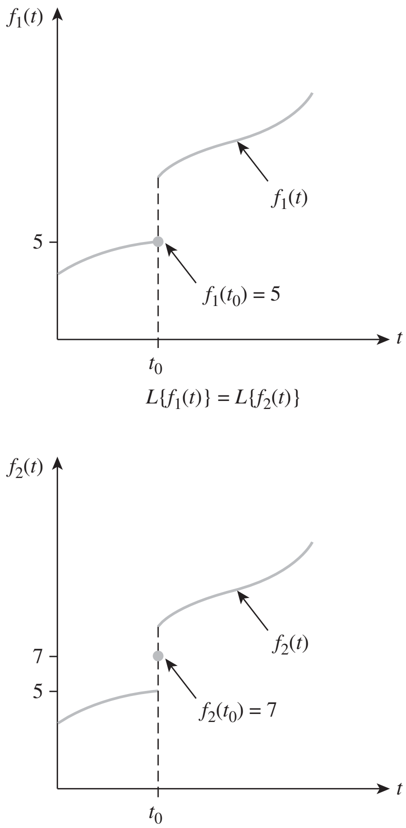


FIGURA 8-24
Dos funciones continuas por partes tendrán la misma transformada de Laplace si su única diferencia está en los puntos de discontinuidad.

Por tanto, dos funciones continuas son idénticas si tienen la misma transformada de Laplace. Es decir, hay una correspondencia uno a uno entre las funciones continuas y sus transformadas. Para funciones que son solo continuas por partes, la unicidad sigue siendo válida dentro de las secciones continuas de las funciones. Consecuentemente, dos funciones continuas por partes con la misma transformada de Laplace pueden diferir solo en sus puntos de discontinuidad (figura 8-24).

Cómo completar polinomios cuadráticos al cuadrado

Al resolver ecuaciones diferenciales con transformada de Laplace, a veces acabamos con un factor cuadrático en el *denominador*. Por ejemplo,

$$\frac{1}{s^2 + bs + c}$$

Esta forma no aparece en la tabla 8-1 de transformadas de Laplace. Por tanto, es preferible expresarla como

$$\frac{1}{(s + k)^2 + d}$$

que tiene una transformada inversa conocida. Esto se logra fácilmente sumando y restando $(b/2)^2$ como

$$s^2 + bs + c = s^2 + bs + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(s + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Entonces, tenemos la siguiente relación para completar hasta el cuadrado el polinomio cuadrático:

$$s^2 + bs + c = \left(s + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \tag{8-53}$$

Por ejemplo, la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{5}{s^2 + 8s + 10}$$

se determina fácilmente completando primero el polinomio cuadrático del denominador al cuadrado:

$$F(s) = \frac{5}{s^2 + 8s + 10} = \frac{5}{(s + 4)^2 + 10 - 16} = \frac{5}{(s + 4)^2 - 6}$$

Ahora, la transformada inversa de Laplace se determina por la tabla 8-1 como

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{5}{(s + 4)^2 - 6}\right\} = 5e^{-4t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 6}\right\} = \frac{5e^{-4t}\operatorname{senh}\sqrt{6}t}{\sqrt{6}}$$

Repaso de la sección

8-7 Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando las propiedades básicas de la transformada inversa de Laplace y la tabla 8-1.

a) $F(s) = 5 + \dfrac{1}{s - 2}$ *b)* $F(s) = \dfrac{s}{s^2 - 4}$ *c)* $F(s) = \dfrac{3}{s(s^2 + 1)}$

(*Respuestas: a)* $f(t) = 5\delta(t) + e^{2t}$, *b)* $f(t) = \cosh 2t$ y *c)* $f(t) = 3(1 - \cos t)$.)

8-7 ▪ FRACCIONES PARCIALES

Al resolver ecuaciones diferenciales con transformadas de Laplace, a menudo acabamos con una fracción racional complicada para la que no puede encontrarse ninguna transformada inversa de Laplace en las tablas de transformadas. Entonces es necesario descomponer la fracción racional complicada en fracciones más simples que puedan encontrarse en la tabla. Esto se logra con fracciones parciales.

Las fracciones parciales aparecen en el cálculo al determinar la integral de fracciones racionales complicadas. Por ejemplo, es mucho más fácil integrar

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}$$

que integrar su equivalente

$$\frac{1-x}{x(x+1)}.$$

El método de fracciones parcial es un procedimiento sistemático para expresar una función complicada como una suma de diversas fracciones simples.

Pero primero veamos algunas definiciones. Una función que se expresa como un cociente de dos polinomios se llama **fracción racional**. Una fracción racional se llama **fracción propia** si el grado de su numerador es menor que el grado del denominador; de otra manera, se llama una **fracción impropia**. Restringiremos la explicación solo a fracciones propias, ya que la solución de ecuaciones diferenciales típicamente da como resultado fracciones propias. Además, cualquier fracción impropia puede expresarse como la suma de un polinomio y una fracción propia con solo dividir su numerador entre el denominador.

Ahora consideremos y sumemos tres fracciones simples:

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x+2} + \frac{4}{x-3} = \frac{3x^2 + 13x - 6}{x(x+2)(x-3)}$$

donde $x(x+2)(x-3)$ es el *mínimo común denominador*. Obviamente, es algo simple y claro obtener una fracción complicada a partir de fracciones simples. ¿Pero qué tal el proceso inverso? ¿Podemos comenzar con una fracción complicada del lado derecho y obtener las fracciones simples de la izquierda? Bueno, sí, pero no tan fácilmente. Necesitamos observar algunas reglas importantes para lograrlo.

Regla 1 *Asegúrese de que la fracción dada es propia.* Es decir, verifique visualmente que el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Por ejemplo, la fracción

$$\frac{3x^2 + 13x - 6}{x(x+2)(x-3)}$$

es propia, ya que su numerador es un polinomio de *segundo* grado y el denominador es un polinomio de *tercer* grado.

Regla 2 *No le dé demasiada atención al numerador*. No tiene efecto en la selección de fracciones parciales.

Regla 3 *Simplifique los factores en el denominador tanto como sea posible.* Esto dará como resultado fracciones parciales más sencillas. Por ejemplo, de las dos fracciones equivalentes:

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x(x^2 + x - 6)} = \frac{x^2 - 3x + 1}{x(x-2)(x+3)}$$

la segunda dará fracciones más simples.

TABLA 8-5

Selección de fracciones parciales para corresponder a ciertos tipos de factores en el denominador

Factor en el denominador	Fracciones parciales correspondientes
x	$\dfrac{A}{x}$
$x - 3$	$\dfrac{A}{x-3}$
$5x + 7$	$\dfrac{A}{5x+7}$
$x^2 + 6$	$\dfrac{Ax+B}{x^2+6}$
$x^2 - 3x + 5$	$\dfrac{Ax+B}{x^2-3x+5}$
$3x^2 - 7$	$\dfrac{Ax+B}{3x^2-7}$
$x^3 - 5$	$\dfrac{Ax^2+Bx+C}{x^3-5}$
$x^3 - 3x^2 + 1$	$\dfrac{Ax^2+Bx+C}{x^3-3x^2+1}$
$2x^3 + 5x - 4$	$\dfrac{Ax^2+Bx+C}{2x^2+5x-4}$
x^3	$\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}$
$(x-7)^2$	$\dfrac{A}{x-7}+\dfrac{B}{(x-7)^2}$
$(x^2+3)^2$	$\dfrac{Ax+B}{x^2+3}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+3)^2}$

Regla 4 *Siempre tenga presente que las fracciones parciales de una fracción propia también son propias*. Es decir, el grado del numerador de cualquier fracción parcial es menor que el grado de su denominador. Por tanto, la siguiente fracción complicada puede expresarse como

$$\frac{3x^2 + 13x - 6}{x(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} \tag{8-54}$$

donde A, B y C son constantes arbitrarias (es decir, polinomios de grado cero) porque todos los factores en el denominador son polinomios de primer grado. La fracción parcial correspondiente a un factor lineal $ax + b$ en el denominador se toma como $A/(ax + b)$, donde A es una constante. La fracción parcial correspondiente a un factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ en el denominador se toma como

$$(Ax + B)/(ax^2 + bx + c)$$

y así sucesivamente (tabla 8-5).

Regla 5 *Trate los factores repetidos en el denominador como factores ordinarios, pero incluya un término para cada potencia del factor repetido*. Por ejemplo,

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 7}{x^3(x-5)^2(x^2+1)^2} = \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}\right) + \left[\frac{D}{x-5} + \frac{E}{(x-5)^2}\right] + \left[\frac{Fx+G}{x^2+1} + \frac{Hx+I}{(x^2+1)^2}\right]$$

Por supuesto, podríamos seleccionar $(Ax + B)/(x - 5)^2$ para corresponder al factor cuadrático $(x + 5)^2$, pero usar un término separado para cada potencia del término repetido da como resultado fracciones parciales más simples. Ambos enfoques pueden parecer diferentes, pero son idénticos:

$$\frac{Ax+B}{(x-5)^2} = \frac{A(x-5) + (5A+B)}{(x-5)^2} = \frac{A}{(x-5)} + \frac{5A+B}{(x-5)^2} = \frac{A}{x-5} + \frac{C}{(x-5)^2}$$

Estas reglas expresan claramente cuántas constantes necesitamos usar al descomponer una fracción complicada, pero siempre es bueno tener algunas reglas para verificar nuestro trabajo:

Regla de verificación 1 *El número de constantes arbitrarias introducidas para corresponder a un factor en el denominador es igual al grado de dicho factor (figura 8-25).*

Regla de verificación 2 *El número total de constantes arbitrarias en las fracciones parciales es igual al grado de todo el denominador.*

Como ejemplo, considere el siguiente proceso de descomposición:

$$\frac{3x^2 - 6x + 5}{x(x^2+3)(x-5)^2} = \left(\frac{A}{x}\right) + \left(\frac{Bx+C}{x^2+3}\right) + \left[\frac{D}{x-5} + \frac{E}{(x-5)^2}\right] \tag{8-55}$$

Podemos fácilmente verificar que este proceso de descomposición satisface ambas reglas de verificación, ya que el primer factor en el denominador es un polinomio

$$\frac{1}{\cdots(x^2+3)\cdots} = \cdots + \frac{Ax+B}{x^2+3} + \cdots$$

Grado del factor: 2

Número de las constantes introducidas: 2

FIGURA 8-25
El número de las constantes arbitrarias introducidas para corresponder a un factor en el denominador es igual al grado del factor (*verifique la regla* 1).

de primer grado y los otros dos factores son polinomios de segundo grado. Asimismo, todo el denominador es la forma de producto de un polinomio de quinto grado.

Determinación de constantes arbitrarias

Al descomponer una fracción complicada cuyo denominador es equivalente a un polinomio de n grado da por resultado n constantes arbitrarias. Estas constantes pueden determinarse mediante cualquiera de los métodos disponibles. Veremos ahora dos de ellos.

Método 1 Multiplique cada término en ambos lados de la ecuación por el denominador de la fracción original, reacomode, iguale los coeficientes de las potencias idénticas de x en ambos lados, y despeje de las ecuaciones resultados los coeficientes desconocidos.

Ahora comprobaremos este método aplicándolo al siguiente problema usando la ecuación 8-54:

$$\frac{3x^2 + 13x - 6}{x(x + 2)(x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 3}$$

Multiplicando cada término por $x(x + 2)(x - 3)$ y reacomodando, obtenemos

$$\begin{aligned} 3x^2 + 13x - 6 &= A(x + 2)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x + 2) \\ &= A(x^2 - x - 6) + B(x^2 - 3x) + C(x^2 + 2x) \\ &= (A + B + C)x^2 + (-A - 3B + 2C)x - 6A \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de x, tenemos

$$\begin{aligned} 3 &= A + B + C \\ 13 &= -A - 3B + 2C \\ -6 &= -6A \end{aligned}$$

Resolviendo estas tres ecuaciones para despejar las tres incógnitas A, B y C, obtenemos $A = 1$, $B = -2$ y $C = 4$. Sustituyendo, obtenemos

$$\frac{3x^2 + 13x - 6}{x(x + 2)(x - 3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x + 2} + \frac{4}{x - 3} \qquad \textbf{(8-56)}$$

El método que acabamos de describir es el estándar para determinar los coeficientes desconocidos; siempre funciona. Sin embargo, a veces es laborioso, ya que implica manipulaciones considerables y requiere la resolución simultánea de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales.

Método 2 Multiplique cada término de ambos lados de la ecuación por el denominador de las fracciones parciales, simplifique y reemplace todas las x por la raíz del denominador (figura 8-26). Este proceso a menudo elimina todas las constantes arbitrarias excepto una, que se evalúa con facilidad. Repita el proceso para las otras fracciones parciales.

Para comprobar este método, considere nuevamente la ecuación 8-54, como

$$\frac{3x^2 + 13x - 6}{x(x + 2)(x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 3}$$

Multiplicando ambos lados por el denominador de la primera fracción parcial x, tenemos

$$\frac{3x^2 + 13x - 6}{(x + 2)(x - 3)} = A + \frac{Bx}{x + 2} + \frac{Cx}{x - 3}$$

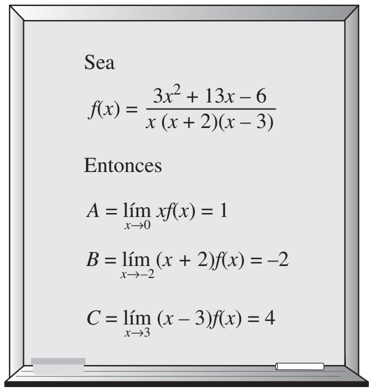


FIGURA 8-26
Manera alternativa de obtener las constantes arbitrarias en fracciones parciales.

Haciendo que $x = 0$, se eliminan los dos últimos términos y se obtiene A directamente, dando

$$A = \left.\frac{3x^2 + 13x - 6}{(x + 2)(x - 3)}\right|_{x=0} = \frac{-6}{-6} = 1$$

Repitiendo el proceso con los denominadores de los otros dos términos, $x + 2$ y $x - 3$, obtenemos

$$B = \left.\frac{3x^2 + 13x - 6}{x(x - 3)}\right|_{x=-2} = \frac{-20}{10} = -2$$

y

$$C = \left.\frac{3x^2 + 13x - 6}{x(x + 2)}\right|_{x=3} = \frac{60}{15} = 4$$

Este método da ecuaciones con una sola incógnita, y esto lo hace muy atractivo. Es útil para fracciones parciales con denominadores lineales, pero no tanto para fracciones parciales con denominadores cuadráticos o de mayor orden que tengan raíces repetidas. Sin embargo, siempre podemos usar este método para determinar al menos algunos de los coeficientes incógnitos. Las ecuaciones necesarias para determinar los demás coeficientes pueden determinarse aplicando el método 1 o simplemente sustituyendo algunos valores de x en ambos lados de la ecuación, ya que la ecuación es válida para cualquier valor de x. La sustitución de x por un valor dará por resultado una ecuación para los coeficientes incógnitos. La sustitución de x por otro valor dará por resultado otra ecuación. La sabia elección de los valores de x permite obtener simplificaciones considerables.

EJEMPLO 8-13 Método de fracciones parciales

Usando el método de fracciones parciales, determine la transformada inversa de

$$Y(s) = \frac{s}{(s + 1)(s^2 + 1)}$$

Solución La función dada puede expresarse en términos de fracciones parciales como

$$\frac{s}{(s + 1)(s^2 + 1)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1}$$

Aplicando el método 1, los coeficientes constantes incógnitos se determinan como

$$\begin{aligned} s &= A(s^2 + 1) + (Bs + C)(s + 1) = As^2 + A + Bs^2 + Bs + Cs + C \\ &= (A + B)s^2 + (B + C)s + (A + C) \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de la misma potencia de s en ambos lados, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \ \rightarrow\ A = -B \\ 1 &= B + C \\ 0 &= A + C \ \rightarrow\ A = -C \end{aligned}$$

Resolviendo estas tres ecuaciones se obtiene $A = -B = -C = -1/2$. Sustituyendo, obtenemos

$$\frac{s}{(s + 1)(s^2 + 1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s + 1} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2 + 1}$$

Escogiendo las transformadas inversas de la tabla 8-1, $y(t)$ se determina como

$$y(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t + \cos t - e^{-t})$$

Repaso de la sección

8-8 Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando el método de fracciones parciales siempre que sea necesario:

a) $F(s) = \dfrac{3s - 1}{s(s + 1)(s - 3)}$ *b)* $F(s) = \dfrac{s + 1}{s^3 - 1}$

(*Respuestas*: *a)* $f(t) = \frac{1}{3} - e^{-t} + \frac{2}{3}e^{3t}$ y *b)* $f(t) = \frac{2}{3}\left(e^t - e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.)

8-8 ▪ TEOREMA DE CONVOLUCIÓN

Al resolver ecuaciones diferenciales, frecuentemente acabamos con una expresión para $Y(s)$ que no es la transformada de ninguna función conocida, pero puede expresarse como el producto de dos funciones de s cuyas inversas se conocen. Es decir, $Y(s)$ puede expresarse como $Y(s) = F(s)\,G(s)$, donde $F(s)$ y $G(s)$ son las transformadas de las funciones conocidas $f(t)$ y $g(t)$. En tales casos, la transformada inversa de $Y(s)$ puede determinarse mediante el teorema de convolución, que puede expresarse como

Teorema 8-4 Teorema de convolución

La transformada inversa de Laplace del producto de dos funciones $F(s)$ y $G(s)$ puede determinarse por la integral:

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad \textbf{(8-57)}$$

donde τ es una variable ficticia.

Esta integral se llama *convolución de $f(t)$ y $g(t)$*, y a veces se representa como $f(t)*g(t)$. Observe que la variable t aparece tanto en el integrando como en el límite superior de la integral definida; por tanto, esta integración dará como resultado una función de t.

Comprobación Usando la definición de la transformada de Laplace con las variables ficticias u y τ, tenemos

$$F(s)G(s) = \int_{u=0}^{\infty} e^{-su}f(u)du \int_{\tau=0}^{\infty} e^{-s\tau}g(\tau)d\tau$$

$$= \int_{\tau=0}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty} e^{-s(u+\tau)}f(u)g(\tau)dud\tau$$

ya que los integrandos $e^{-su}f(u)$ y $e^{-s\tau}g(\tau)$ tienden a cero cuando $u \to \infty$ y $\tau \to \infty$, y cada integrando depende sólo de su propia variable.

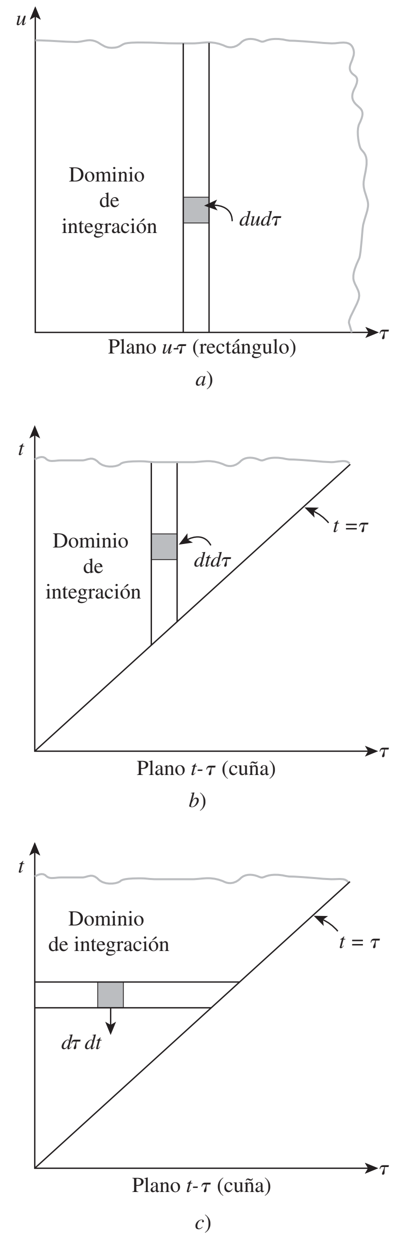


FIGURA 8-27
Manera de cambiar el dominio y el orden de la integración en la comprobación del teorema de convolución.

Ahora cambiamos la variable de la integral interna de u a $t = u + \tau$ para τ fija. Este cambio de variable modifica el dominio de integración de un rectángulo que se extiende hasta el infinito en ambas direcciones en el plano u-τ a una región en forma de cuña que se extiende hasta el infinito en el plano t-τ, como se muestra en la figura 8-27*b*. Dado que $du = dt$, tenemos

$$F(s)G(s) = \int_{\tau=0}^{\infty}\int_{t=\tau}^{\infty} e^{-st}f(t-\tau)g(\tau)\,dtd\tau$$

Finalmente, nos gustaría cambiar el orden de integración de esta doble integral. Esto no es tan sencillo como parece, sin embargo, ya que el límite inferior de la integral interior contiene la variable de la integral exterior. De modo que tenemos que volver a las bases. El integrando de la doble integral representa una superficie en el espacio y la doble integral representa el volumen bajo esta superficie con límites de integración que especifican las fronteras de su base (el dominio de integración); por tanto, podemos cambiar el orden y los límites de integración siempre y cuando cubramos la misma base. En este caso, podemos cubrir la misma base moviéndonos en la dirección τ, primero desde $\tau = 0$ a $\tau = t$, y luego avanzando una cantidad diferencial dt en la dirección t, cada vez desde $t = 0$ hasta el infinito, como se muestra en la figura 8-27*c*. Entonces

$$F(s)G(s) = \int_{t=0}^{\infty}\int_{\tau=0}^{t} e^{-st}f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau dt$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}\left[\int_{\tau=0}^{t} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right]dt$$

$$= L\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right\}$$

o

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

Esto termina la comprobación.

EJEMPLO 8-14 **Aplicación del teorema de convolución**

Usando el teorema de convolución, determine la transformada inversa de

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+1)}$$

Solución La función dada puede considerarse como un producto de $F(s)$ y $G(s)$, donde

$$F(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{y} \quad G(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

Las transformadas inversas de ambas funciones se dan en la tabla 8-1 como

$$f(t) = e^{-t} \text{ y } g(t) = \cos t$$

Entonces, por el teorema de convolución, tenemos

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-(t-\tau)}\cos\tau\, d\tau = e^{-t}\int_o^t e^{\tau}\cos\tau\, d\tau$$

Usando las tablas de integrales, $y(t)$ se determina como

$$y(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \operatorname{sen} t - e^{-t})$$

que es el mismo resultado obtenido en el ejemplo 8-13 usando el método de fracciones parciales.

Repaso de la sección

8-9 Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando el teorema de convolución:

a) $F(s) = \dfrac{2}{(s+1)(s+2)}$ *b*) $Y(s) = \dfrac{5}{s^2(s-1)^2}$

(*Respuestas: a*) $f(t) = -2(e^{-2t} - e^{-t})$ y *b*) $f(t) = 5te^t - 10e^t + 5t + 10$.)

8-9 ▪ RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR TRANSFORMADA DE LAPLACE

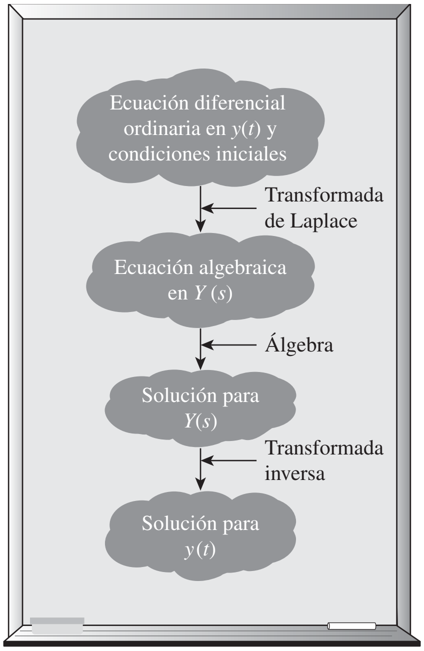


FIGURA 8-28
Pasos básicos de la resolución de ecuaciones diferenciales por transformada de Laplace.

La solución de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes por transformada de Laplace incluye tres pasos básicos (figura 8-28):

Paso 1 Aplique la transformada de Laplace a la ecuación diferencial: es decir, obtenga la transformada de Laplace de cada término de la ecuación diferencial. Esto dará como resultado una ecuación algebraica en $Y(s)$ que es la transformada de la función incógnita $y(t)$.

Paso 2 Despeje $Y(s)$. Esto usualmente da como resultado una fracción en s.

Paso 3 Determine la función incógnita $y(t)$ obteniendo la inversa de $Y(s)$. Este paso usualmente exige expresar $Y(s)$ en términos de fracciones simples y luego usar las tablas de transformadas.

Antes de ilustrar el procedimiento mediante varios ejemplos, hagamos algunos comentarios. Usted observará que la ecuación transformada incluye todas las condiciones establecidas en $t = 0$; por tanto, ya no necesitamos ocuparnos de los coeficientes desconocidos ni aplicar las condiciones en la frontera para determinar dichos coeficientes.

También observará que la ecuación transformada incluye valores específicos de la función incógnita y sus derivadas *solo en un punto fijo*, por lo general en $t = 0$. Sin embargo, el método puede modificarse para manejar determinadas condiciones en la frontera en algún tiempo que no sea $t = 0$.

EJEMPLO 8-15 Temperatura de una bola de cobre que se enfría

Una pequeña bola de cobre a 80°C se deja caer en un tanque grande lleno de agua helada a 0°C, como se muestra en la figura 8-29. Se transfiere calor de la bola de cobre al agua, haciendo que la temperatura de la bola comience a disminuir. El coeficiente de transferencia de calor entre la bola y el agua es tal que la variación de la temperatura de la bola con respecto al tiempo $T(t)$ está regida por

$$T' + 0.01T = 0$$

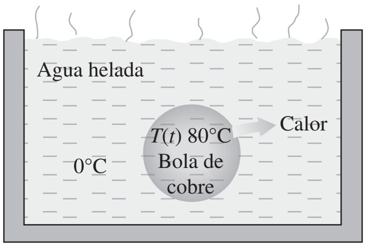


FIGURA 8-29
Esquema para el ejemplo 8-15.

con $T(0) = 80$. Determine la distribución de temperatura $T(t)$ resolviendo este problema de valor inicial mediante la transformada de Laplace.

Solución Tomando la transformada de Laplace de la ecuación diferencial, tenemos

$$L\{T'\} + L\{0.01T\} = L\{0\}$$

$$[sT(s) - T(0)] + [0.01T(s)] = 0$$

$$sT(s) - 80 + 0.01T(s) = 0$$

Despejando $T(s)$, tenemos

$$T(s) = \frac{80}{s + 0.01}$$

Determinando la transformada inversa, obtenemos

$$T(t) = 80e^{-0.01t}$$

que es la solución deseada. La temperatura de la bola en cualquier tiempo t puede determinarse sustituyendo t por un valor (en segundos) en esta ecuación.

Usted probablemente está pensando que podríamos haber resuelto este problema de manera más sencilla usando cualquiera de los métodos estándar que se explicaron en capítulos anteriores. Entonces, ¿cuál es el objeto de resolver la misma ecuación diferencial con un método más complicado? En esta etapa, estamos tratando de comprobar que el método funciona y que es una alternativa de los métodos existentes, aplicándolo a problemas sencillos.

No vale la pena estudiar un nuevo método a menos que ofrezca algunas ventajas sobre los ya existentes y bien establecidos. Como verá más adelante en este capítulo, el método de la transformada de Laplace ofrece considerable simplificación al resolver problemas de valor inicial con funciones de fuerza discontinua, así como sistemas de dichos problemas. La transformada de Laplace también se usa con buen éxito para reducir ciertas ecuaciones diferenciales parciales a ecuaciones diferenciales ordinarias.

EJEMPLO 8-16 Respuesta al impulso de un sistema resorte-masa-amortiguador

Se golpea con un martillo una masa estacionaria m que reposa encima de un resorte lineal (cuya constante de resorte es k) en el tiempo $t = 0$, con un impulso I, como se muestra en la figura 8-30. Como resultado de este impulso, la masa comienza a vibrar hacia arriba y hacia abajo. Escogiendo el eje x hacia abajo con su origen ubicado en el centro de gravedad de la masa cuando la masa está en equilibrio estático, la formulación matemática de este problema puede expresarse como

$$mx'' + kx = I\delta(t - 0)$$

con $x(0) = x'(0) = 0$.

Determine el movimiento de la masa $x(t)$ resolviendo este problema de valor inicial usando la transformada de Laplace.

Solución Dividiendo la ecuación diferencial entre m y obteniendo su transformada de Laplace, tenemos

$$L\{x''\} + L\left\{\frac{k}{m}x\right\} = L\left\{\frac{I}{m}\delta(t-0)\right\}$$

$$\left[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right] + \left[\frac{k}{m}X(s)\right] = \frac{I}{m} \times 1$$

$$s^2X(s) - 0 - 0 + \frac{k}{m}X(s) = \frac{I}{m}$$

Despejando $X(s)$, tenemos

$$X(s) = \frac{I}{m}\frac{1}{s^2 + k/m} = \frac{I}{m}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\sqrt{k/m}}{s^2 + k/m} = \frac{I}{\sqrt{mk}}\frac{\sqrt{k/m}}{s^2 + k/m}$$

Obteniendo la transformada inversa, tenemos

$$x(t) = \frac{I}{\sqrt{mk}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

que es la solución deseada. Entonces, la masa experimentará un movimiento periódico sinusoidal. El desplazamiento máximo es $I/\sqrt{mk}$.

En capítulos anteriores insistimos en la importancia de verificar siempre sus soluciones para ver si las condiciones iniciales se satisfacen. Al hacerlo con esta solución, obtenemos $x(0) = 0$, como se pedía, pero

$$x'(t) = \frac{I}{\sqrt{mk}}\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t = \frac{I}{m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Entonces, $x'(0) = I/m$, que no es una solución cero satisfactoria. La aparente contradicción puede resolverse al observar que el principio del momento de impulso de la dinámica establece que

$$mx'(0+) - mx'(0) = I$$

donde $x'(0+)$ es la velocidad inmediatamente después de desaparecer el impulso. Entonces, si $x'(0) = 0$, tenemos $x'(0+) = I/m$. El impulso desaparece tan pronto que no desplaza la masa, pero sí cambia la velocidad.

Al tratar funciones de fuerza de impulso, la solución da correctamente los valores de las variables dependientes en $t = 0+$. Estos se encuentran a partir de la solución considerando el límite cuando $t \to 0$. Estos valores pueden ser diferentes a los valores iniciales específicos, pero son correctos.

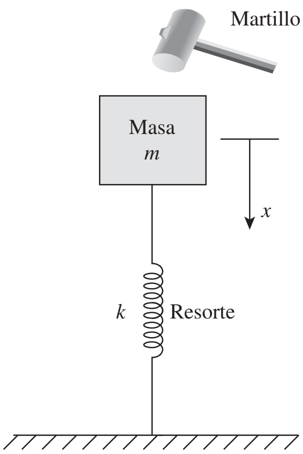


FIGURA 8-30
Sistema resorte-masa-amortiguador del ejemplo 8-16.

EJEMPLO 8-17 Respuesta de un circuito *RLC*

Considere un circuito *RLC* con inductancia $L = 1$, capacitancia $C = 0.002$ y resistencia $R = 60$ en unidades compatibles, como se muestra en la figura 8-31. Inicialmente, no hay carga en el capacitor ni fluye corriente en el circuito. Cuando se cierra el switch, se conecta al circuito una batería que suministra un voltaje $V_b = 10\ V$ durante 0.2 segundos; después de este tiempo se vuelve a abrir el switch. Obtenga la expresión para el voltaje del capacitor $v(t)$.

Solución La ley de Kirchhoff requiere que la suma de las caídas de voltaje a través de los componentes de un circuito sea igual al voltaje aplicado, $V_b(t)$.

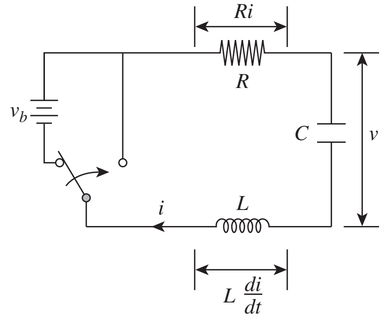


FIGURA 8-31
Circuito *RLC* para el ejemplo 8-17.

Representando la corriente en el tiempo t como $i(t)$, las caídas de voltaje a través de los tres componentes de este circuito son Ldi/dt, Ri y v, donde

$$v = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt + Q_0$$

y Q_0 es la carga inicial en el capacitor en el tiempo $t = 0$. Entonces la formulación matemática de este problema puede expresarse como

$$Ri + v + L\frac{di}{dt} = v_b$$

con $i(0) = 0$.

Derive una vez la relación del capacitor para obtener

$$\frac{dv}{dt} = \frac{i}{C}$$

que da $i = C\,dv/dt$. Derivando nuevamente se obtiene

$$\frac{di}{dt} = C\frac{d^2v}{dt^2}$$

Sustituya las últimas dos relaciones en la ecuación de voltaje del circuito para obtener

$$RC\frac{dv}{dt} + v + LC\frac{d^2v}{dt^2} = v_b$$

Reacomodando obtenemos

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = v_b$$

Dividiendo entre C y sustituyendo los valores de parámetros dados, obtenemos

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 60\frac{dv}{dt} + 500v = 500v_b = 500(10)[u(t) - u(t - 0.2)]$$

Dado que las condiciones iniciales implican que $v(0) = 0$ y $v'(0) = 0$, y aplicando la transformada de Laplace, tenemos

$$s^2V(s) + 60sV(s) + 500V(s) = 5\,000\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-0.2s}}{s}\right)$$

Despeje $V(s)$ y obtenga como factor común el término $1/s$:

$$V(s) = \frac{5\,000}{s(s^2 + 60s + 500)}(1 - e^{-0.2s})$$

Las raíces de $s^2 + 60s + 500 = 0$ son -50 y -10. Por tanto, $s^2 + 60s + 500 = (s + 50)(s + 10)$ y, usando fracciones parciales,

$$\frac{5\,000}{s(s^2 + 60s + 500)} = \frac{1}{s(s + 50)(s + 10)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 10} + \frac{C}{s + 50}$$

$$= \frac{10}{s} - \frac{12.5}{s + 10} + \frac{2.5}{s + 50}$$

Sustituyendo,

$$V(s) = \left(\frac{10}{s} - \frac{12.5}{s + 10} + \frac{2.5}{s + 50}\right) - e^{-0.2s}\left(\frac{10}{s} - \frac{12.5}{s + 10} + \frac{2.5}{s + 50}\right)$$

Obteniendo la transformada inversa,

$$v(t) = 10 - 12.5e^{-10t} + 2.5^{-50t} - u(t - 0.2)\left[10 - 12.5e^{-10t} + 2.5e^{-50t}\right]_{t \to t-2}$$

o $$v(t) = \begin{cases} 10 - 12.5e^{-10t} + 2.5^{-50t}, & t < 0.2 \\ -12.5e^{-10t} + 2.5^{-50t} + 12.5^{-10(t-0.2)} - 2.5^{-50(t-0.2)}, & t \geq 0.2 \end{cases}$$

que es la solución deseada. Se grafica en la figura 8-32.

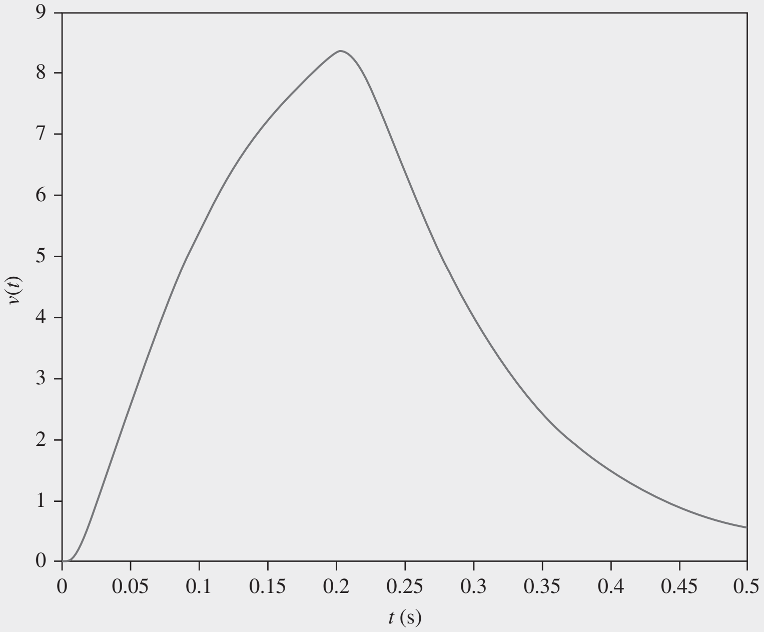


FIGURA 8-32
Gráfica de voltaje contra tiempo.

Solución con condiciones generales en la frontera

Aunque las propiedades de la derivada de la transformada de Laplace se expresan en términos de las condiciones en $t = 0$, podemos usar la transformada par resolver ecuaciones en las que se dan las condiciones en la frontera en algún otro valor de t, por ejemplo t_1. Como la transformada se usa para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes *constantes*, podemos introducir una nueva escala de tiempo que comience en t_1. Es decir, reemplazamos t por $t + t_1$.

Por ejemplo, considere el problema

$$x' + 3x = t \quad x(2) = 10$$

Corriendo el eje de tiempo en $t = t + 2$, sabemos que x y x' siguen siendo las mismas, y la ecuación se convierte en

$$x' + 3x = t + 2 \quad x(0) = 10$$

Esto se resuelve fácilmente como

$$sX(s) - x(0) + 3X(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}$$

o $$X(s) = \frac{10}{s+3} + \frac{1}{s^2(s+3)} + \frac{2}{s(s+3)}$$

Esto da

$$x(t) = \frac{85}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t + \frac{5}{9}$$

Ahora reemplazamos t por $t - 2$ para obtener la solución,

$$x(t) = \frac{85}{9}e^{-3(t-2)} + \frac{1}{3}(t - 2) + \frac{5}{9}$$

Observe que $x(2) = 10$.

Funciones de transferencia

La respuesta completa de una ecuación diferencial lineal ordinaria es la suma de las respuestas libre y forzada. Para condiciones iniciales cero, la respuesta libre es cero, y la respuesta completa es la misma que la respuesta forzada; entonces, podemos enfocar nuestro análisis solo en los efectos de la entrada tomando las condiciones iniciales como cero temporalmente. Cuando terminemos de analizar los efectos de la entrada, podremos sumar al resultado la respuesta libre debida a las condiciones iniciales diferentes de cero. El concepto de *función de transferencia* es útil para analizar los efectos de la entrada.

Considere la ecuación $x' + ax = bf(t)$ y suponga que $x(0) = 0$. Transformando ambos lados de la ecuación obtenemos $sX(s) + aX(s) = bF(s)$. Entonces despeje la relación $X(s)/F(s)$ y llámele $T(s)$:

$$T(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{b}{s + a}$$

La función $T(s)$ se llama **función de transferencia** de la ecuación diferencial. La función de transferencia es la transformada de la respuesta forzada dividida entre la transformada de la entrada. En otras palabras, es la transformada de la respuesta completa dividida entre la transformada de la entrada, suponiendo que todas las condiciones iniciales sean cero. Algunas veces decimos que la función de transferencia es la razón de la salida transformada sobre la entrada transformada.

La función de transferencia puede usarse como multiplicador para obtener la transformada de la respuesta forzada a partir de la transformada de la entrada; es decir, $X(s) = T(s)\,F(s)$. La función de transferencia es solo una propiedad del modelo del sistema y es independiente de la función de entrada y de las condiciones iniciales. El concepto de función de transferencia es extremadamente útil por varias razones.

1. *Funciones de transferencia y software.* Ciertas funciones de paquetes de software útiles tales como MATLAB no aceptan descripciones de sistemas expresadas como ecuaciones individuales de orden superior, pero sí aceptan descripciones basadas en la función de transferencia. Vea ejemplos en la sección 8-11.
2. *Equivalencia de ecuaciones diferenciales*. La función de transferencia es equivalente a la ecuación diferencial; contiene la misma información, y una puede encontrarse a partir de la otra. Si se nos da la función de transferencia podemos reconstruir la ecuación diferencial correspondiente. Por ejemplo, la función de transferencia

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{6s + 7}{3s^2 + 5s + 8}$$

corresponde a la ecuación $3x'' + 5x' + 8x = 6f'(t) + 7f(t)$. Obtener la función de transferencia es fácil porque se supone que las condiciones iniciales son cero cuando se trabaja con funciones de transferencia. Por la propiedad de la derivada notamos que para trabajar con una función de transferencia, usted puede usar las relaciones más simples $L(x') = sX(s)$, $L(x'') = s^2X(s)$, etcétera.

3. *Función de transferencia y raíces características.* Observe que el denominador de la función de transferencia es el polinomio característico. Entonces, la función de transferencia nos dice algo acerca del comportamiento intrínseco del modelo, aparte de los efectos de la salida y de los valores específicos de las condiciones iniciales.

A veces encontramos modelos de dispositivos o procesos que tienen más de una entrada; de ser así, el concepto de función de transferencia es útil para distinguir entre los efectos de varias entradas. Por ejemplo, la siguiente ecuación tiene dos entradas: $5x'' + 30x' + 40x = 6f(t) - 20g(t)$. Usando la propiedad de derivada con condiciones iniciales cero, podemos escribir inmediatamente la ecuación como

$$5s^2X(s) + 30sX(s) + 40X(s) = 6F(s) - 20G(s)$$

Despejando $X(s)$, obtenemos

$$X(s) = \frac{6}{5s^2 + 30s + 40}F(s) - \frac{20}{5s^2 + 30s + 40}G(s)$$

Cuando hay más de una entrada, la función de transferencia para una entrada específica puede obtenerse igualando temporalmente a cero las demás entradas (este es otro aspecto de la propiedad de superposición de las ecuaciones lineales). Entonces obtenemos

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{6}{5s^2 + 30s + 40} \quad \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{-20}{5s^2 + 30s + 40}$$

Observe que los denominadores de ambas funciones de transferencia tienen las mismas raíces: $s = -2$ y $s = 40$. Esto no sorprende, ya que el denominador proviene del lado izquierdo de la ecuación diferencial, el cual determina las raíces características.

Repaso de la sección

8-10 Resuelva los siguientes problemas de valor inicial usando el método de la transformada de Laplace:

$$y' - 4y = e^{3t},\ y(0) = 0$$

(*Respuesta:* $y(t) = e^{4t} - e^{3t}$.)

8-10 ▪ RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES POR TRANSFORMADA DE LAPLACE

Algunos problemas físicos que se encuentran en la práctica incluyen dos o más variables dependientes, todas ellas, funciones de una sola variable independiente. Las variables dependientes de tales problemas también dependen entre sí, y la descripción del problema implica un sistema de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, el siguiente es un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$$a_1x'(t) + b_1y'(t) + c_1x(t) + d_1y(t) = f_1(t)$$
$$a_2x'(t) + b_2y'(t) + c_2x(t) + d_2y(t) = f_2(t)$$

donde a_i, b_i, c_i y d_i son constantes específicas.

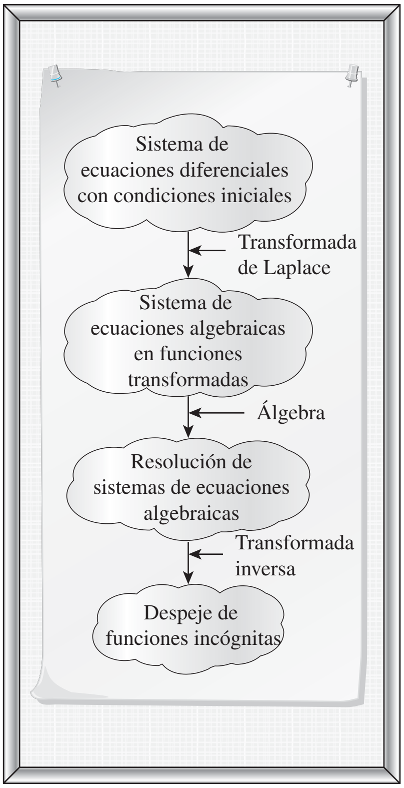


FIGURA 8-33
Pasos básicos en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales por transformada de Laplace.

La técnica de la transformada de Laplace proporciona simplificación considerable en la resolución de tales sistemas. El procedimiento de resolución para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales usando la transformada de Laplace es similar al procedimiento para una sola ecuación diferencial (figura 8-33).

Paso 1 Aplique la transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones diferenciales. Esto dará como resultado un sistema lineal de *ecuaciones algebraicas* en las transformadas de las funciones incógnitas.

Paso 2 Resuelva el sistema lineal de ecuaciones algebraicas para obtener expresiones implícitas para cada transformada.

Paso 3 Determine las funciones incógnitas obteniendo la inversa de las transformadas usando las tablas de transformadas.

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento recién descrito.

EJEMPLO 8-18 Respuesta de dos masas acopladas

Considere las dos masas m_1 y m_2 y dos resortes lineales con constantes de resorte k_1 y k_2 conectados en serie, como se muestra en la figura 8-34. Inicialmente, ambas masas están sin movimiento y en sus posiciones de equilibrio. En consecuencia, los resortes no están ni estirados ni comprimidos en $t = 0$. Sabemos que $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $k_1 = 2$ y $k_2 = 1$ en unidades compatibles.

Se aplica a m_2 una fuerza externa de onda cuadrada $f(t)$ con una amplitud a y un periodo p, haciendo que ambas masas se pongan en movimiento. (Esta onda se muestra en la figura 8-16.) Si hacemos que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representen las posiciones de las dos masas en relación con sus posiciones de equilibrio, los movimientos de m_1 y m_2 estarán regidos por el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$m_1x_1'' + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0$$
$$m_2x_2'' + k_2(x_2 - x_1) = f(t)$$

con

$$x_1(0) = x_1'(0) = x_2(0) = x_2'(0) = 0$$

y

$$f(t) = \begin{cases} a, & 0 \le t < p/2 \\ -a, & p/2 \le t < p \end{cases}$$

El sistema de dos ecuaciones diferenciales se reduce a

$$x_1'' + 3x_1 - x_2 = 0$$
$$x_2'' + x_2 - x_1 = f(t)$$

Determine los movimientos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ resolviendo este sistema de dos problemas de valor inicial usando la transformada de Laplace.

Solución La transformada de Laplace de la función de fuerza $f(t)$ (por la ecuación 8-32) es

$$F(s) = \frac{a}{s}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-pns/2}\right]$$

Ahora obtenemos la transformada de Laplace de ambas ecuaciones diferenciales y aplicamos las condiciones iniciales:

$$L\{x_1''\} + L\{3x_1\} - L\{x_2\} = 0$$
$$L\{x_2''\} + L\{x_2\} - L\{x_1\} = L\{f(t)\}$$

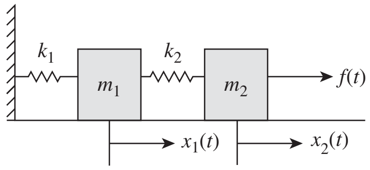


FIGURA 8-34
Sistema resorte-masa-amortiguador considerado en el ejemplo 8-18.

Como las condiciones iniciales son cero, obtenemos

$$s^2X_1(s) + 3X_1(s) - X_2(s) = 0$$

$$s^2X_2(s) + X_2(s) - X_1(s) = F(s)$$

Despejando $X_1(s)$ y $X_2(s)$, obtenemos

$$X_1(s) = \frac{F(s)}{s^4 + 4s^2 + 2} = \frac{a}{s(s^4 + 4s^2 + 2)} + 2a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-ps/2}}{s(s^4 + 4s^2 + 2)}$$

$$X_2(s) = \frac{(s^2 + 3)F(s)}{s^4 + 4s^2 + 2} = \frac{a(s^2 + 3)}{s(s^4 + 4s^2 + 2)} + 2a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(s^2 + 3)e^{-ps/2}}{s(s^4 + 4s^2 + 2)}$$

En una forma más compacta, tenemos

$$X_1(s) = aG(s) + 2a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-ps/2}G(s)$$

$$X_2(s) = aH(s) + 2a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-ps/2}H(s)$$

donde $\quad G(s) = \dfrac{1}{s(s^4 + 4s^2 + 2)} \quad$ y $\quad H(s) = \dfrac{s^2 + 3}{s(s^4 + 4s^2 + 2)}$

Ahora expresamos el término de orden superior en los denominadores en una forma más conveniente como

$$s^4 + 4s^2 + 2 = (s^2 + 2)^2 - 2 = (s^2 + 2 + \sqrt{2})(s^2 + 2 - \sqrt{2})$$

$$\cong (s^2 + 3.414)(s^2 - 0.586)$$

donde aproximamos $\sqrt{2}$ como 1.414. Aplicando el método de fracciones parciales, tenemos

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3.414)(s^2 + 0.586)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 3.414} + \frac{Ds + E}{s^2 + 0.586}$$

$$= \frac{0.5}{s} + \frac{0.104s}{s^2 + 3.414} - \frac{0.604s}{s^2 + 0.586}$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 3}{s(s^2 + 3.414)(s^2 + 0.586)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 3.414} + \frac{Ds + E}{s^2 + 0.586}$$

$$= \frac{1.5}{s} - \frac{0.0429s}{s^2 + 3.414} - \frac{1.457s}{s^2 + 0.586}$$

Observe que $C = E = 0$ en ambos casos. Las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se determinan obteniendo las transformadas inversas de las expresiones $X_1(s)$ y $X_2(s)$:

$$x_1(t) = ag(t) + 2a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t - np/2)g(t - np/2)$$

$$x_2(t) = ah(t) + 2a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t - np/2)h(t - np/2)$$

donde $g(t)$ y $h(t)$ son las transformadas inversas de $G(s)$ y $H(s)$:

$$g(t) = 0.5 + 0.104\cos 1.848t - 0.604\cos 0.765t$$

$$h(t) = 1.5 - 0.0429\cos 1.848t - 1.457\cos 0.765t$$

Por tanto, la solución del problema es

$$x_1(t) = a(0.5 + 0.104\cos 1.848\,t - 0.604\cos 0.765\,t)$$

$$+ 2a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t - np/2)\{0.5 + 0.104\cos[1.848\,(t - np/2)]$$

$$- 0.604\cos[0.765(t - np/2)]\}$$

$$x_2(t) = a(1.5 - 0.0429\cos 1.848t - 1.457\cos 0.765t)$$

$$+ 2a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t - np/2)\{1.5 - 0.0429\cos[1.848(t - np/2)]$$

$$-1.457\cos[0.765(t - np/2)]\}$$

Funciones de transferencia de sistemas de ecuaciones

Podemos obtener funciones de transferencia de sistemas de ecuaciones, primero por transformación de las ecuaciones usando condiciones iniciales cero y, en seguida, por eliminación algebraica de todas las variables salvo la entrada y la salida específicas. La técnica es especialmente útil cuando únicamente queremos obtener la respuesta de algunas de las variables dependientes en el sistema de ecuaciones.

EJEMPLO 8-19 **Funciones de transferencia de dos ecuaciones**

Considere el siguiente sistema, que tiene una entrada de $f(t)$ y dos salidas de $x(t)$ y $y(t)$:

$$x' = -3x + 2y$$

$$y' = -9y - 4x + 3f(t)$$

Obtenga las funciones de transferencia $X(s)/F(s)$ y $Y(s)/F(s)$.

Solución Para obtener las funciones de transferencia $X(s)/F(s)$ y $Y(s)/F(s)$, transforme ambos lados de cada ecuación, suponiendo condiciones iniciales cero:

$$sX(s) = -3X(s) + 2Y(s) \qquad \textit{a)}$$

$$sY(s) = -9Y(s) - 4X(s) + 3F(s) \qquad \textit{b)}$$

Estas son dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas, $X(s)$ y $Y(s)$. Despeje $Y(s)$ de la ecuación *a*):

$$Y(s) = \frac{s+3}{2}X(s)$$

Sustituya en la ecuación *b*) y despeje $X(s)/F(s)$ para obtener

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{6}{s^2 + 12s + 35} \qquad \textit{c)}$$

Ahora sustituya esto en la ecuación *a*) para obtener

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s+3}{2}\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{s+3}{2}\frac{6}{s^2+12s+35}$$

$$= \frac{3(s+3)}{s^2+12s+35} \qquad d)$$

Las funciones de transferencia deseadas están dadas por las ecuaciones *c*) y *d*). Observe que los denominadores de ambas funciones de transferencia tienen los mismos factores, $s = -5$ y $s = -7$, que son las raíces del polinomio característico: $s^2 + 12s + 35$.

La función de transferencia nos permite separar la solución de una o más variables, en vez de necesitar despejar simultáneamente todas ellas. Usando la transformada de Laplace en esta forma evita tener que resolver simultáneamente ambas ecuaciones *diferenciales*, y convierte el problema en otro basado en la resolución de ecuaciones simultáneas *algebraicas.*

Matriz de transición

Cuando un sistema de ecuaciones lineales se expresa en la siguiente forma matricial-vectorial, es posible usar la transformada de Laplace para encontrar la matriz de transición $\boldsymbol{\phi}(t)$ y la matriz de funciones de transferencia:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r}(t) \qquad \textbf{(8-58)}$$

Transformando la ecuación 8-58 obtenemos

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{R}(s)$$

Como $\mathbf{I}\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(s)$, tenemos

$$s\mathbf{I}\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{R}(s)$$

o

$$s\mathbf{I}\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{R}(s)$$

Obtenga como factor común $\mathbf{X}(s)$ desde la derecha:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{R}(s)$$

Despeje $\mathbf{X}(s)$:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}(s) \qquad \textbf{(8-59)}$$

El primer término de la derecha es la transformada de la respuesta libre, que es la solución cuando no hay entradas, de modo que $\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$. En este caso, la solución puede expresarse como

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}(0) \qquad \textbf{(8-60)}$$

donde $\boldsymbol{\phi}(t)$ es la matriz de transición que se introdujo en el capítulo 7. Entonces, $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ es la transformada de la matriz de transición:

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

y

$$\boldsymbol{\phi}(t) = L^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right] \qquad \textbf{(8-61)}$$

Esto ofrece una tercera vía para obtener la matriz de transición. Las otras dos maneras son el método de matriz modal y el de expansión de serie, que se presentaron en el capítulo 7. Tanto el método de matriz modal como el de transformada de Laplace nos exigen resolver el polinomio característico $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$. Pero también necesitan una inversión de matriz para obtener $\mathbf{M}^{-1}$ y $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, respectivamente. Sin embargo, la matriz modal consiste sólo en números y puede invertirse fácilmente mediante calculadora o computadora. Por otro lado, la matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ no puede invertirse numéricamente porque es una función de la variable s. Un sistema de cuarto orden necesita la inversión de una matriz de 4×4, que contiene dieciséis elementos. Después de la inversión, se necesitarían dieciséis expansiones de fracción parcial para encontrar $\boldsymbol{\phi}(t)$. Entonces, usualmente no se emplea el método de transformada de Laplace para encontrar la matriz de transición para sistemas de orden cuarto o superior.

Matriz de funciones de transferencia

No siempre nos interesan todas las variables dependientes, de modo que una matriz $\mathbf{C}$, definida a partir de la llamada *ecuación de salida* $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$, puede usarse para indicar cuáles variables nos interesan en el vector $\mathbf{x}$. El vector $\mathbf{y}$ contiene el subconjunto de variables en $\mathbf{x}$ que nos interesan. Por ejemplo, considere un sistema que tiene tres variables dependientes x_1, x_2 y x_3. Suponga que únicamente nos interesan x_1 y x_3; la ecuación de salida sería

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{Cx}$$

Entonces, la matriz $\mathbf{C}$ es

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de funciones de transferencia se encuentra igualando a cero el vector de condiciones iniciales $\mathbf{x}(0)$ en la ecuación 8-59, como sigue. Como $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$,

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BR}(s) \tag{8-62}$$

Entonces, la matriz de funciones de transferencia que relaciona el vector de funciones de salida $\mathbf{Y}(s)$ con el vector de variables de entrada $\mathbf{R}(s)$ es

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \tag{8-63}$$

Si hay n variables dependientes y m funciones de entrada, entonces $\mathbf{A}$ es de $n \times n$, y $\mathbf{B}$ es de $n \times m$. Entonces, si hay p variables de salida, $\mathbf{Y}(s)$ será de $p \times 1$, $\mathbf{C}$ será de $p \times n$ y $\mathbf{T}(s)$ será de $p \times m$. Así, si hay tres variables dependientes, dos entradas y tres salidas, la matriz de transferencia $\mathbf{T}(s)$ será de 2×3, y habrá seis funciones de transferencia, una para cada par entrada-salida, por ejemplo.

EJEMPLO 8-20 **Cómo obtener una matriz de funciones de transferencia**

Considere el siguiente sistema con dos entradas $f_1(t)$ y $f_2(t)$:

$$\begin{aligned} x_1' &= -3x_1 + 2x_2 + f_1(t) \\ x_2' &= -4x_1 - 9x_2 + f_1(t) + 3f_2(t) \end{aligned}$$

Obtenga la matriz de funciones de transferencia para la salida x_1.

Solución Las matrices y los vectores para este sistema son

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

Si la salida deseada es x_1, tenemos

$$\mathbf{C} = (1 \quad 0)$$

Entonces,

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} s+3 & -2 \\ 4 & s+9 \end{pmatrix}$$

y

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+9)+8} \begin{pmatrix} s+9 & 2 \\ 4 & s+3 \end{pmatrix}$$

Por la ecuación 8-63, tenemos

$$\mathbf{T}(s) = \frac{1}{s^2+12s+35}(1 \quad 0) \begin{pmatrix} s+9 & 2 \\ 4 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

que da

$$\mathbf{T}(s) = \frac{1}{s^2+12s+35}(s+11 \quad s+9)$$

Esta es la matriz de funciones de transferencia para la salida x_1, en la cual influyen ambas entradas. Las dos funciones de transferencia son

$$\frac{X_1(s)}{F_1(s)} = \frac{s+11}{s^2+12s+35} \qquad \frac{X_1(s)}{F_2(s)} = \frac{s+9}{s^2+12s+35}$$

Observe que aun cuando la entrada $f_2(t)$ no aparece en la ecuación de x_1', sí influye sobre x_1, como se muestra por la función de transferencia $X_1(s)/F_2(s)$.

Forma matricial del teorema de convolución

El teorema de convolución también se aplica a la forma matricial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r}(t)$. No sorprende que la matriz de transición aparezca en la integral de convolución. En forma matricial, el teorema de convolución establece que

$$L^{-1}\left[\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{V}(s)\right] = \int_0^t \boldsymbol{\phi}(t-\tau)\mathbf{v}(\tau)\,d\tau \tag{8-64}$$

Si hacemos $\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\mathbf{r}(t)$, tenemos

$$L^{-1}\left[\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{B}\mathbf{R}(s)\right] = \int_0^t \boldsymbol{\phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{r}(\tau)\,d\tau \tag{8-65}$$

Como $\boldsymbol{\phi}(t) = L^{-1}[s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, la ecuación 8-65 debe ser la respuesta forzada. Por tanto, la respuesta completa de la ecuación 8-59 es

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{r}(\tau)\,d\tau \tag{8-66}$$

La matriz de transición $\boldsymbol{\phi}(t)$ usada en esta ecuación puede obtenerse mediante cualquiera de los métodos antes explicados: el método de matriz modal, el método de transformada de Laplace o el de expansión de serie. Los problemas 8-135 y 8-136 muestran cómo usar la ecuación 8-66 para obtener una fórmula general para entradas escalonadas y entradas en rampa.

Forma de función de transferencia contra forma de variable de estado Tanto la descripción de función de transferencia como la descripción de variable de estado contienen la misma información acerca del comportamiento del sistema; sin embargo, una forma puede ser más fácil de usar, dependiendo de qué información se necesite. Si el modelo del sistema consiste en una sola ecuación, entonces la forma de función de transferencia es la más fácil de usar porque puede aplicarse inmediatamente la transformada de Laplace. Pero, cuando la descripción se da como un *conjunto* de ecuaciones diferenciales, la elección no es tan clara; en tales casos, si queremos obtener los valores característicos usando una computadora, convertir el conjunto de ecuaciones a la forma de variable de estado es la forma más fácil, porque necesita la menor cantidad de álgebra.

Todas las funciones de transferencia de una ecuación dada tendrán los mismos denominadores porque el denominador es el polinomio característico que contiene las características de respuesta libre de la ecuación. Sin embargo, los numeradores serán diferentes en general. Si un numerador contiene un término s, se dice que su función de transferencia tiene *dinámica de numerador*. Por ejemplo, la función de transferencia $X(s)/R(s) = (4s + 7)/(5s^2 + 4s + 7)$ tiene dinámica de numerador y corresponde a la ecuación $5x'' + 4x' + 7x = 4r'(t) + 7r(t)$. Por tanto, vemos que la presencia de la dinámica de numerador indica que la ecuación contiene una o más derivadas de la función de fuerza.

Puede haber situaciones en las que deseemos usar una fórmula general que se base en la forma de variable de estado; sin embargo, en la forma estándar de variable de estado, $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r}(t)$ no hay derivada de la entrada $\mathbf{r}(t)$. Entonces, cuando el modelo de función de transferencia contiene dinámica de numerador, no es tan sencillo identificar las variables de estado, y no se relacionan tan fácilmente con las condiciones iniciales dadas. Considere la función de transferencia antes dada; representa un sistema resorte-masa-amortiguador con el resorte y el amortiguador conectado entre la masa y una entrada de desplazamiento $r(t)$, y con los valores de parámetros $m = 5$, $c = 4$ y $k = 7$. Si decidimos que la variable de estado sea x y la segunda variable de estado sea la integral de la fuerza de resorte $k(r - x)$ dividida entre la masa m, tenemos

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \frac{k(r - x_1)}{m} = \frac{4(r - x_1)}{5}$$

Es posible comprobar que las ecuaciones de variable de estado son

$$x_1' = -\frac{4}{5}x_1 + x_2 + \frac{4}{5}r$$

$$x_2' = -\frac{7}{5}x_1 + \frac{7}{5}r$$

que están en la forma estándar. De modo que ahora necesitamos relacionar las condiciones iniciales $x_1(0)$ y $x_2(0)$ con los valores dados de $x(0)$ y $x'(0)$. Es fácil ver que $x_1(0) = x(0)$. Para encontrar $x_2(0)$, despeje x_2 de la primera ecuación de estado:

$$x_2 = x_1' + \frac{4}{5}(x_1 - r)$$

Evalúe esto en $t = 0$ para obtener el resultado deseado:

$$x_2(0) = x_1'(0) + \frac{4}{5}[x_1(0) - r(0)] = x'(0) + \frac{4}{5}[x(0) - r(0)]$$

Usualmente no podemos depender de la intuición para obtener un conjunto de variables de estado para una función de transferencia que tenga dinámica de numerador. La manera más fácil es usar un software que convierta la descripción de función de transferencia en la forma estándar de variable de estado. Esto se explica en la sección 8-11.

Repaso de la sección

8-11 Resuelva el siguiente sistema de problemas de valor inicial usando el método de transformada de Laplace:

$$x' + 2y = e^{-3t}$$

$$y' + 3x = t, \; x(0) = 1 \quad \text{y} \quad y(0) = 2$$

(*Respuesta:* $x(t) = \frac{1}{3}t - e^{-3t} + 2\cosh\sqrt{6}t - \frac{19}{3\sqrt{6}}\operatorname{senh}\sqrt{6}t$ y

$y(t) = -\frac{1}{6} - e^{-3t} + \frac{19}{6}\cosh\sqrt{6}t - \sqrt{6}\operatorname{senh}\sqrt{6}t$.)

8-12 Encuentre las funciones de transferencia $X(s)/F(s)$ y $Y(s)/F(s)$ para el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$x' + 2y = f(t)$$

$$y' + 3x = 0$$

(*Respuesta:* $\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{s}{s^2 - 6}, \quad \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{-3}{s^2 - 6}$.)

8-11 ▪ MÉTODOS DE TRANSFORMADA DE LAPLACE CON AYUDA DE COMPUTADORA

La Symbolic Math Toolbox de MATLAB, MuPAD, Maple y Mathematica pueden obtener transformadas de Laplace y transformadas inversas en forma simbólica. Si usted tiene sólo MATLAB sin dicha función, todavía puede obtener transformadas inversas de Laplace por expansión de fracciones parciales, que MATLAB puede hacer porque las operaciones de polinomios pueden realizarse de manera tanto numérica como simbólica.

Los métodos que se basan en funciones de transferencia pueden usarse con estos programas sólo si usted tiene el software adicional adecuado para manejar sistemas de control. En MATLAB es la caja de herramientas Control Systems. En Mathematica, es el Control Systems Professional. La biblioteca `<DynamicSystems>` implementa estos métodos y está interconstruida en Maple.

Mostraremos solo la forma más básica de los comandos en cada uno de estos paquetes. Usted debe acceder a la función de ayuda de los paquetes para obtener mayor información acerca de las funciones extendidas.

Transformadas de Laplace Comencemos obteniendo transformadas de Laplace y transformadas inversas en forma simbólica mediante el siguiente ejemplo:

$$L\{t \operatorname{sen} 2t\} = \frac{4s}{(4 + s^2)^2}$$

TABLA 8-6

Transformada de Laplace de $t \operatorname{sen} 2t$

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
syms t
laplace(t*sin(2*t),t,s)
```

MuPAD

```
transform::laplace(t*sin(2*t), t, s)
```

Maple

```
with(inttrans)
laplace(t*sin(2*t),t,s)
```

Mathematica

```
LaplaceTransform[t*Sin[2*t],t,s]
```

La tabla 8-6 muestra cómo obtener esta transformada con los diversos programas. Observe el orden específico de t y s.

La tabla 8-7 muestra cómo conseguir la transformada inversa. Observe el orden invertido de t y s en comparación con el método para encontrar la transformada.

Estos programas pueden manejar la función Dirac delta, incluyendo su forma corrida. Considere la función

$$f(t) = \delta(t - 3)$$

Su transformada es

$$F(s) = e^{-3s}$$

que puede obtenerse como se muestra en la tabla 8-8.

La función de Heaviside $u(t)$ también puede usarse para crear funciones seccionales por corrimiento. Considere la función del ejemplo 8-8:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 2\pi \\ \operatorname{sen} t & 2\pi \le t \le 3\pi \\ 0 & t > 3\pi \end{cases}$$

TABLA 8-7

Transformada inversa de Laplace de $4s/(4 + s^2)^2$

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
syms s
ilaplace(4*s/(s^2+4)^2,s,t)
```

MuPAD

```
transform::invlaplace(4*s/(s^2+4)^2,s,t)
```

Maple

```
with(inttrans)
invlaplace(4*s/(4+s^2)^2,s,t)
```

Mathematica

```
InverseLaplaceTransform[4*s/(4+s^2)^2,s,t]
```

TABLA 8-8

Transformada de Laplace de $\delta(t-3)$

MATLAB Symbolic Math Toolbox
`syms s` `laplace(dirac(t - 3),t,s)`
MuPAD
`transform::laplace(dirac(t – 3),t,s)`
Maple
`with(inttrans)` `laplace(Dirac(t - 3),t,s)`
Mathematica
`LaplaceTransform[DiracDelta[t-3],t,s]`

o
$$f(t) = \operatorname{sen} t[u(t-2\pi) - u(t-3\pi)]$$

Su transformada es

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1}(e^{-2\pi s} + e^{-3\pi s})$$

que puede obtenerse como se muestra en la tabla 8-9. Observe que Mathematica tiene dos funciones de escalón unitario: la función `HeavisideTheta[x]`, que es indefinida en $x = 0$, y la función `UnitStep[x]`, que es definida como 1 en $x = 0$.

Expansión de fracciones parciales Si usted usa MATLAB pero no están disponibles ni la caja de herramientas Symbolic Math ni MuPAD, MATLAB puede calcular los coeficientes en una expansión de fracciones parciales con la función `residue`. Sea $X(s)$ la transformada. Los coeficientes de expansión se llaman *residuos* y los factores del denominador de $X(s)$ se llaman *polos*. Los polos incluyen las raíces características del modelo y cualesquiera raíces del denominador introducidas por la función de entrada. Si el orden m del numerador de $X(s)$ es mayor que el orden n del denominador, la transformada puede representarse por un polinomio $K(s)$, llamado *término directo*, más una relación de dos polinomios en los que el grado del denominador es mayor que el del numerador. La sintaxis de la función residuo es

```
[r,p,K] = residue(num,den)
```

donde `num` y `den` son arreglos que contienen los coeficientes del numerador y el denominador de X(s). La salida de la función consiste en el arreglo `r`, que contiene los residuos; el arreglo `p`, que contiene los polos, y el arreglo `k` que contiene los coeficientes del término directo $K(s)$ en forma de polinomio.

Considere la ecuación $x'' + 9x' + 14x = 3f' + 2f$, donde $f(t) = 4e^{-7t}$. Si las condiciones iniciales son cero, la transformada de la respuesta forzada es

$$X(s) = \frac{3s+2}{s^2+9s+14}F(s) = \frac{3s+2}{s^2+9s+14}\left(\frac{4}{s+7}\right) = \frac{12s+8}{(s+2)(s+7)^2}$$
$$= \frac{12s+8}{s^3+16s^2+77s+98}$$

TABLA 8-9

Corrimiento con la función de Heaviside

MATLAB Symbolic Math Toolbox

```
syms t s
laplace(sin(t)*(heaviside(t-2*pi)-heaviside(t-3*pi)), t,s)
```

MuPAD

```
transform::laplace(sin(t)*(heaviside(t-2*PI)
 -heaviside(t-3*PI)),t,s)
```

Maple

```
with(inttrans)
laplace(sin(t)*(Heaviside(t-2*Pi)-Heaviside(t-3*Pi)), t,s)
```

Mathematica

```
LaplaceTransform[Sin[t]*UnitStep[t-2*Pi]-
 Sin[t]*UnitStep[t-3*Pi],t,s]
```

Los polos repetidos son $s = -7, -7$; uno de ellos es una raíz característica y el otro se debe a la entrada $f(t)$. Para obtener la expansión, teclee

```
[r, p, k] = residue ([12, 8], [1, 16, 77, 98])
```

La respuesta que da MATLAB es `r = [0.64, 15.2, -0, 64]`, `p = [-7, -7, -2]` y `K = [ ]`, el cual es un arreglo vacío que implica la ausencia de término directo. Esto corresponde a la expansión

$$X(s) = 0.64\frac{1}{s+7} + 15.2\frac{1}{(s+7)^2} - 0.64\frac{1}{s+2}$$

Observe que para los residuos debidos a polos repetidos, el residuo que corresponde a la potencia *más alta* se muestra como el *último* de dichos residuos. Aquí la respuesta es

$$x(t) = 0.64e^{-7t} + 15.2te^{-7t} - 0.64e^{-2t}$$

Los polos complejos se manejan así: considere la expansión

$$x'' + 6x' + 34x = 4g' + g$$

donde $g(t)$ es una función de escalón unitario y las condiciones iniciales son cero. La transformada de la respuesta es

$$X(s) = \frac{4s+1}{s^2+6s+34}G(s) = \frac{4s+1}{s^2+6s+34}\frac{1}{s} = \frac{4s+1}{s^3+6s^2+34s}$$

Para obtener la expansión, teclee

```
[r,p,K] = residue([4, 1],[1, 6, 34, 0])
```

Observe que el último coeficiente en el denominador es 0. La respuesta dada por MATLAB es `r = [-0.0147-0.3912i -0.0147+0.3912i, 0.0294]`, `p = [-3+5i, -3-5i, 0]` y `K = [ ]`. Este resultado corresponde a la expresión

$$X(s) = \frac{-0.0147 - 0.3912i}{s + 3 - 5i} + \frac{-0.0147 + 0.3912i}{s + 3 + 5i} + \frac{0.0294}{s}$$

y, por tanto, la respuesta es

$$\begin{aligned} x(t) &= (-0.0147 - 0.3912i)e^{(-3+5i)t} \\ &\quad + (-0.0147 + 0.3912i)e^{(-3-5i)t} + 0.0294 \end{aligned}$$

Esta forma no es muy útil debido a sus coeficientes complejos, pero podemos convertirla a una forma más útil observando que los primeros dos términos en la expansión tienen la forma

$$\frac{C + iD}{s + a - ib} + \frac{C - iD}{s + a + ib}$$

que corresponde a la función de tiempo:

$$(C + iD)e^{(-a+ib)t} + (C - iD)e^{(-a-ib)t}$$

Usando las identidades de Euler: $e^{\pm ibt} = \cos bt \pm i \operatorname{sen} bt$, la forma anterior puede escribirse como

$$2e^{-at}(C \cos bt - D \operatorname{sen} bt)$$

Usando esta identidad con $C = -0.0147$ y $D = -0.3912$, podemos escribir la respuesta como

$$x(t) = 2e^{-3t}(-0.0147 \cos 5t + 0.3912 \operatorname{sen} 5t) + 0.0294$$

Si todo lo que usted necesita es una gráfica de la solución, los métodos de funciones de transferencia proporcionan una forma fácil de obtenerla.

Métodos de funciones de transferencia en MATLAB La caja de herramientas MATLAB Control Systems proporciona comandos para crear funciones de transferencia, convirtiendo modelos de variable de estado a la forma de función de transferencia, y calculando y graficando la respuesta de ecuaciones lineales con coeficientes constantes para escalones, impulsos y funciones de entrada definidas por el usuario.

Un *objeto LTI* describe un modelo lineal, invariable con el tiempo (es decir, con coeficientes constantes). Considere la función de transferencia:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{4s + 7}{5s^2 + 4s + 7} \tag{8-67}$$

Para crear su representación en MATLAB, use la función `tf(num, den)`, donde `num` y `den` son matrices de coeficientes del numerador y el denominador de la función de transferencia dispuestos en orden de potencias descendentes de s. Para esta función de transferencia, teclee `sys1 = tf([4, 7], [5, 4, 7])` para asignar el nombre de variable `sys1` a la función de transferencia. Si el objeto LTI ya existe, podemos extraer los coeficientes del numerador y del denominador del modelo de función de transferencia usando la función `tfdata`. Su sintaxis es

```
[num, den] = tfdata(sys).
```

MATLAB proporciona diversas funciones de resolución para ecuaciones lineales. Estas funciones de resolución se clasifican por el tipo de función de entrada que pueden aceptar: una *entrada escalonada*, una *entrada de impulsos* y una función de entrada definida por el usuario. En su forma básica, cada una de las funciones pone automáticamente un título y etiquetas de eje en la gráfica. Para graficar la respuesta de escalón unitario o la respuesta de impulso unitario del modelo `sys1`, teclee `step(sys1)` o `impulse(sys1)`.

La función `lsim` grafica la respuesta del sistema a una entrada definida por el usuario. La sintaxis básica para condiciones iniciales cero es `lsim(sys,u,t)`, donde `sys` es el objeto `LTI`, `t` es un arreglo de valores de la variable independiente (por ejemplo, el tiempo) con espaciado regular (como `t = [t0: dt: t1]`) y `u` es una matriz con tantas columnas como entradas cuyo renglón i especifica el valor de la entrada en el tiempo $t(i)$.

Por ejemplo, para graficar la respuesta forzada del modelo `sys1` para la entrada en *rampa* $f(t) = 1.5t$ en el intervalo $0 \leq t \leq 2$ con una gráfica con 300 puntos, teclee

```
t = linspace(0,2,300);
f = 1.5*t;
[y, t] = lsim(sys1,f,t);
plot(t,y,t,f),xlabel('t'),ylabel('x(t) and f(t)')
```

Como otro ejemplo, para encontrar la respuesta a la función de fuerza sinusoidal $f(t) = 15$ sen $(3t)$, reemplace el segundo renglón del programa anterior por `f = 15*sin(3*t)`.

Siempre puede crear cualquier función complicada de entrada para usarse con `lsim` definiendo un vector que contenga los valores de las funciones de entrada en el tiempo específico, por ejemplo, usando lazos `for` y declaraciones condicionales. MATLAB proporciona la función `gensig` que facilita la construcción de funciones de entrada *periódicas*. La sintaxis `[u, t] = gensig (type, period)` genera una entrada periódica de un tipo específico `type` que tiene un periodo `period`. Los siguientes tipos están disponibles: onda sinusoidal (`type` = 'sin'), onda cuadrada (`type` = 'square') y pulso periódico de amplitud angosta (`type` = 'pulse'). El vector `t` contiene los tiempos, y el vector `u` contiene los valores de entrada en esos tiempos. Todas las entradas generadas tienen amplitud de una unidad. La sintaxis

```
[u, t] = gensig(type, period, dur, dt)
```

especifica la duración en el tiempo `dur` de la entrada, y el espaciado `dt` entre los instantes.

Por ejemplo, suponga que se aplica al modelo una onda cuadrada con un periodo de 5:

$$x'' + 2x' + 4x = 4f(t)$$

Su función de transferencia es

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Para encontrar la respuesta para condiciones iniciales cero en el intervalo $0 \leq t \leq 10$, y usando un tamaño de escalón de 0.01, introduzca

```
sys2 = tf(4,[1,2,4]);
[u, t] = gensig('square',5,10,0.01);
[y, t] = lsim (sys2,u,t);plot(t,y,u), . . .
     axis([0 10 -0.5 1.5]), . . .
     xlabel('Time'),ylabel('Response')
```

Conversión entre la forma de función de transferencia y la forma de variable de estado MATLAB puede obtener una descripción de la función de transferencia a partir de la forma de variable de estado $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{Br}(t)$, $\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Dr}$ con la función `tf`. Suponga que `sys1` está en la forma de variable de estado, habiéndose creado mediante el tecleo de `sys = ss(A, B, C, D)`, como se explicó en la sección 7-8. La matriz de funciones de transferencia se encuentra tecleando `sys2 = tf(sys1)`.

Por otro lado, si ya tenemos un objeto LTI `sys2` creado en forma de función de transferencia, teclear `[A, B, C, D] = ssdata(sys2)` producirá las matrices estándar para la forma de variable de estado. Esta es una forma simple de obtener la descripción de variable de estado a partir de una función de transferencia que tiene dinámica de numerador.

La función `ssdata` no siempre dará un conjunto de variables de estado idénticas a las obtenidas de la manera usual. Por ejemplo, la función de transferencia

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{1}{5s^2 + 7s + 4}$$

corresponde a la ecuación $5x'' + 7x' + 4x = r(t)$, y normalmente decidiríamos que $x_1 = x$ y $x_2 = x'$ fueran las variables de estado. Sin embargo, en MATLAB, los comandos

```
sys = tf(1,[5,7,4]);
[A,B,C,D] = ssdata(sys)
```

dan los siguientes resultados

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1.4 & -0.8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (0 \quad 0.4) \quad \mathbf{D} = 0$$

Esto corresponde a las ecuaciones de estado:

$$x_1' = -1.4x_1 - 0.8x_2 + 0.5r(t)$$

$$x_2' = x_1$$

y la ecuación de salida; $y = 0.4x^2$. Como la salida y debe ser la misma que x, vemos de inmediato que $x_2 = y/0.4 = x/0.4 = 2.5x$. La otra variable de estado x_1 se relaciona con x_2 por la segunda ecuación de estado: $x_1 = x_2'$. Entonces, $x_1 = 2.5x'$.

La tabla 8-10 resume las funciones LTI de MATLAB.

Métodos de función de transferencia en Maple Es posible crear funciones de transferencia en Maple con el comando `TransferFunction`. Antes de usar dicho comando, coloque `with(DynamicSystems)` en el bloc de notas. Usando la ecuación 8-67 como ejemplo, usted introduce

```
sys3:=TransferFunction((4*s+7)/(5*s^2+4*s+7)):
```

La respuesta de escalón unitario siempre puede obtenerse dividiendo la función de transferencia entre s y usando la transformada inversa de Laplace. La respuesta de escalón unitario puede graficarse como

```
ResponsePlot(sys3,Heaviside(t))
```

La respuesta de impulso unitario puede obtenerse como

```
ImpulseResponse(sys3)
```

y graficarse como

```
ImpulseResponsePlot(sys3)
```

TABLA 8-10

Funciones de objeto LTI en MATLAB

Comando	Descripción
`sys = ss(A, B, C, D)`	Crea un objeto LTI en forma de espacio de estado, donde las matrices A, B, C y D corresponden a las del modelo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$, $\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$
`[A, B, C, D] = ssdata(sys)`	Extrae las matrices A, B, C y D del objeto LTI `sys` correspondientes a las del modelo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$, $\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$.
`sys = tf(num,den)`	Crea un objeto LTI en forma de función de transferencia, donde `num` es el vector de coeficientes del numerador de la función de transferencia, dispuestos en orden descendente, y `den` es el vector de coeficientes del denominador, también dispuestos en orden descendente.
`sys2=tf(sys1)`	Crea el modelo de función de transferencia `sys2` a partir del modelo de estado `sys1`.
`sys1 = ss(sys2)`	Crea el modelo de estado `sys1` a partir del modelo de función de transferencia `sys2`.
`[num, den] = tfdata(sys, 'v')`	Extrae los coeficientes del numerador y el denominador del modelo de función de transferencia `sys` cuando se usa el parámetro opcional `'v'`. Si solo hay una función de transferencia, los coeficientes se devuelven como vectores en vez de devolverse como arreglos de celdas.

Aquí indicamos cómo graficar la respuesta a una función de rampa comenzando en $t = 0$ y con una pendiente de 10.

```
ResponsePlot(sys3,Ramp(10))
```

Para graficar la respuesta a una entrada sinusoidal de amplitud 10 y frecuencia en radianes de 5, introduzca

```
ResponsePlot(sys3, Sine(10,5))
```

Métodos de función de transferencia en Mathematica Las funciones de transferencia y sus métodos correspondientes en Mathematica están en el programa adicional Control Systems Professional. Es posible crear funciones de transferencia en Mathematica con el comando `TransferFunction`. Usando como ejemplo la ecuación 8-67, introduzca

```
sys4 = TransferFunction[s, (4*s + 7)/(5*s^2 + 4*s + 7)]
```

La respuesta a un impulso unitario puede graficarse como sigue, usando la función `SimulationPlot`:

```
SimulationPlot[sys4,DiracDelta[t]]
```

La respuesta a un escalón unitario puede graficarse como

```
SimulationPlot[sys4,UnitStep[t]]
```

Como con todos los programas, solo mostramos la forma más básica de los comandos. Usted debe acceder a la función de ayuda del software para obtener más información.

8-12 ▪ RESUMEN

La *transformada de Laplace* es una transformada integral con límites de integración de 0 y ∞, y el núcleo e^{-st}. Se representa como L, y la transformada de Laplace de una función $f(t)$ se define como

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}f(t)\,dt \qquad \textbf{(8-4)}$$

La transformada de Laplace de una función existe si y solo si la integral impropia converge por lo menos para algunos valores de s. Como convención, se usan minúsculas para representar una función dada, y la mayúscula de la misma letra se usa para representar su transformada de Laplace. Las transformadas de Laplace de funciones comunes se dan en la tabla 8-1.

Existencia de transformadas de Laplace No todas las funciones tienen transformadas de Laplace. Para tener una transformada de Laplace, es suficiente (pero no necesario) que una función $f(t)$ sea continua por partes y de orden exponencial. Se dice que una función $f(t)$ es continua por partes en un intervalo finito $a \le t \le b$ si este intervalo puede subdividirse en un número finito de subintervalos de tal manera que $f(t)$ sea continua en cada subintervalo y tenga límites finitos en los puntos terminales. Se dice que una función $f(t)$ es de orden exponencial si existe una constante a tal que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-at}|f(t)| = M$$

donde M es una constante positiva finita o cero para todas las t en las que $f(t)$ está definida.

Propiedades de las transformadas de Laplace Las propiedades básicas de las transformadas de Laplace pueden resumirse así:

1. $L\{C_1f_1(t) + C_2f_2(t)\} = C_1L\{f_1(t)\} + C_2L\{f_2(t)\}$ **(8-10)**
2. $L\{e^{kt}f(t)\} = F(s-k)$ **(8-12)**
3. $L\{t^nf(t)\} = (-1)^n\dfrac{d^nF(s)}{ds^n}$ **(8-15)**
4. $L\left\{\dfrac{1}{t}f(t)\right\} = \displaystyle\int_s^\infty F(s)\,ds$ **(8-17)**
5. $L\left\{\displaystyle\int_0^t f(t)\,dt\right\} = \dfrac{1}{s}F(s)$ **(8-18)**
6. $L\{f(kt)\} = \dfrac{1}{k}F\left(\dfrac{s}{k}\right)$ **(8-19)**

Función de escalón unitario La función de escalón unitario se define por

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \ge t_0 \end{cases} \qquad \textbf{(8-20)}$$

En seguida se listan las transformadas de Laplace de la función de escalón unitario y las funciones relacionadas:

1. $L\{u(t)\} = \dfrac{1}{s}$ **(8-21)**
2. $L\{u(t-t_0)\} = \dfrac{e^{-t_0s}}{s}$ **(8-22)**
3. $L\{u(t-t_0)f(t)\} = e^{-t_0s}L\{f(t+t_0)\}$ **(8-26)**
4. $L\{u(t-t_0)f(t-t_0)\} = e^{-t_0s}L\{f(t)\}$ **(8-27)**

Transformadas de Laplace de funciones periódicas Se dice que una función $f(t)$ es *periódica* de periodo p si existe un número positivo p tal que $f(t+p) = f(t)$ para cada valor positivo de t siendo p el periodo más pequeño. La transformada de Laplace de una función periódica continua por partes de periodo p existe y está determinada por

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt, \quad s > 0 \qquad \textbf{(8-28)}$$

Funciones de fuerza de impulso Las funciones de fuerza de naturaleza impulsiva se describen y se manipulan mejor con la ayuda de la *función de impulso unitario* o de la *función Dirac delta* $\delta(t - t_0)$. La función delta puede considerarse como un operador con la propiedad:

$$\int_0^\infty f(t)\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0) \qquad \textbf{(8-37)}$$

La transformada de Laplace de la función delta es

$$L\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0} \qquad \textbf{(8-38)}$$

Transformadas de Laplace de derivadas y ecuaciones diferenciales La transformada de Laplace de las derivadas de una función $f(t)$ existe si $f(t)$ y sus derivadas son continuas, y de orden exponencial. Estas transformadas de Laplace pueden expresarse como

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \qquad \textbf{(8-41)}$$

$$L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \qquad \textbf{(8-43)}$$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - \cdots f^{(n-1)}(0) \qquad \textbf{(8-44)}$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$. También $f(0)$, $f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ son los valores iniciales de $f(t)$ y sus derivadas.

La transformada de Laplace de una ecuación diferencial se obtiene determinando la transformada de Laplace de cada término en la ecuación y aplicando la linealidad de la transformada. La transformada de la ecuación ya contiene las condiciones iniciales; entonces, la inversión nos dará directamente la solución del problema.

Transformadas inversas de Laplace Determinar las funciones originales de su transformada se llama *encontrar la inversa* (o *invertir la función transformada*). La *transformada inversa de Laplace* se representa por el símbolo L^{-1}. Las propiedades básicas de la transformada de Laplace invertida pueden resumirse así:

1. $L^{-1}\{C_1F_1(s) + C_2F_2(s)\} = C_1L^{-1}\{F_1(s)\} + C_2L^{-1}\{F_2(s)\}$ (linealidad) **(8-46)**
2. $L^{-1}\{F(s-k)\} = e^{kt}L^{-1}\{F(s)\}$ (propiedad de corrimiento) **(8-47)**
3. $L^{-1}\{sF(s)\} = \dfrac{d}{dt}L^{-1}\{F(s)\}$ **(8-48)**

4. $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t L^{-1}\{F(s)\}dt$ **(8-49)**

5. $L^{-1}\left\{\frac{d^nF(s)}{ds^n}\right\} = (-t)^n L^{-1}\{F(s)\}$ **(8-50)**

6. $L^{-1}\{e^{-t_0 s}F(s)\} = u(t - t_0)f(t - t_0)$ **(8-51)**

7. $L^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)$ (propiedad de cambio de escala) **(8-52)**

La inversa de una función dada es una función continua única; por tanto, si dos funciones continuas tienen la misma transformada de Laplace, son idénticas.

Expansión de fracciones parciales La resolución de ecuaciones diferenciales con transformadas de Laplace a menudo da como resultado una fracción racional complicada para la que no puede encontrarse una transformada de Laplace en las tablas de transformadas. Entonces es necesario descomponer una fracción racional complicada en fracciones más simples mediante el método de *fracciones parciales*. Mediante este método, una fracción propia complicada se expresa como una suma de fracciones parciales más sencillas que también son propias; es decir, el grado del numerador de cualquier fracción parcial es menor que el grado de su denominador.

Para factores repetidos en el denominador debe incluirse una fracción separada para cada potencia del factor repetido. Como verificación, el número de constantes arbitrarias introducidas para corresponder a un factor en el denominador es igual al grado de ese factor; asimismo, el número total de constantes arbitrarias que contienen las fracciones parciales es igual al grado de todo el denominador.

Teorema de convolución Al resolver ecuaciones diferenciales frecuentemente acabamos teniendo una expresión para $Y(s)$ que puede expresarse como el producto de dos funciones de s cuyas inversas se conocen. Es decir, $Y(s)$ puede expresarse como $Y(s) = F(s)\,G(s)$, donde $F(s)$ y $G(s)$ son las transformadas de las funciones conocidas $f(t)$ y $g(t)$. En tales casos, la transformada inversa de $Y(s)$ puede determinarse por el *teorema de convolución*, que puede expresarse como

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(t)g(t-\tau)d\tau \quad \textbf{(8-57)}$$

donde τ es una variable ficticia.

Resolución de ecuaciones diferenciales La resolución de ecuaciones diferenciales por transformada de Laplace incluye tres pasos básicos: 1) aplicar la transformada de Laplace a la ecuación diferencial, 2) despejar la transformada de la variable dependiente $Y(s)$, y 3) determinar la función incógnita $y(t)$ obteniendo la inversa de $Y(s)$. El procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales es similar al procedimiento para una sola ecuación diferencial, salvo que la transformada de un sistema de ecuaciones diferenciales da por resultado un sistema de ecuaciones algebraicas, que necesita resolverse simultáneamente para las transformadas de las funciones incógnitas antes de poder aplicar la transformada inversa.

Funciones de transferencia La respuesta completa de una ecuación diferencial lineal ordinaria es la suma de las respuestas libre y forzada. Para condiciones iniciales cero, la respuesta libre es cero, y la respuesta completa es la misma que la respuesta forzada. Entonces podemos enfocar nuestro análisis sólo en los efectos de la entrada considerando que las condiciones iniciales son temporalmente cero. Cuando terminemos de analizar los efectos de la entrada, podremos sumar al resultado la respuesta libre debida a cualesquiera condiciones iniciales no cero. El concepto de la *función de transferencia* es útil para analizar el efecto de la entrada.

La función de transferencia es la transformada de la respuesta forzada dividida entre la transformada de la entrada. En otras palabras, es la transformada de la respuesta completa dividida entre la transformada de la entrada, bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales sean cero. La función de transferencia $T(s)$ puede usarse como un multiplicador para obtener la transformada de la respuesta forzada $X(s)$ a partir de la transformada de la entrada $F(s)$; es decir, $X(s) = T(s)F(s)$. La función de transferencia es una propiedad exclusiva del modelo del sistema. El concepto de función de transferencia es extremadamente útil por varias razones.

1. *Funciones de transferencia y software*. Ciertas funciones útiles en los programas de software necesitan una descripción del sistema basada en la función de transferencia.
2. *Equivalencia de ecuación diferencial*. La función de transferencia es equivalente a la ecuación diferencial; contiene la misma información, una puede obtenerse a partir de la otra.
3. *Función de transferencia y raíces características*. El denominador de la función de transferencia es el polinomio característico; entonces, la función de transferencia nos dice algo acerca del comportamiento intrínseco del modelo, aparte de los efectos de la entrada y de los valores específicos de las condiciones iniciales.

Transformadas de Laplace y software El Symbolic Math Toolbox de MATLAB, MuPAD, Maple y Mathematica pueden obtener transformadas de Laplace y transformadas invertidas en forma simbólica. Los métodos basados en funciones de transferencia pueden usarse con estos programas solo si usted tiene el software adicional adecuado para manejar sistemas de control. En MATLAB, es la caja de herramientas Control Systems. En Mathematica, es el Control Systems Professional. La biblioteca de Dynamic Systems implementa estos métodos, y está interconstruida en Maple.

PERSPECTIVA HISTÓRICA

Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Matemático y astrónomo francés. Mejoró las capacidades de resolución de problemas del estudio clásico de la mecánica pasando de un estudio basado en la geometría a uno basado en el cálculo. Además de la transformada de Laplace, desarrolló la ecuación de Laplace, que es una ecuación diferencial parcial con muchas aplicaciones en la física. El operador diferencial de Laplace también se nombra en su honor. Fue uno de los primeros astrónomos que concibieron la existencia de hoyos negros y la idea del colapso gravitacional.

Oliver Heaviside (1850-1925). Ingeniero eléctrico, matemático y físico autodidacta inglés. Aplicó los números complejos al análisis de circuitos eléctricos y resolvió ecuaciones diferenciales usando un método que más adelante se encontró equivalente a la transformada de Laplace. También reformuló la ecuación de campos de Maxwell en términos de fuerzas eléctricas y magnéticas y de flujo de energía. La función de escalón unitario también se llama función de Heaviside, en su honor.

PROBLEMAS

8-1 Transformadas de Laplace de funciones

8-13C Defina la transformada de Laplace y explique por qué es un método atractivo para resolver ecuaciones diferenciales.

8-14C ¿Por qué el método de la transformada de Laplace es especialmente adecuado para problemas de valor inicial?

8-15C ¿La transformada de Laplace de una función $f(t)$ seguirá siendo una función de t?

Determine la transformada de Laplace de las siguientes funciones que están definidas para toda $t \geq 0$:

8-16 *a)* $f(t) = t^3$ *b)* $f(t) = \cosh 2t$

c) $f(t) = \begin{cases} t, & t \leq 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$

8-17 *a)* $f(t) = \operatorname{sen} \alpha t$ *b)* $f(t) = 5t - 3$ *c)* $f(t) = te^{-2t}$

8-18 *a)* $f(t) = e^{3t}$ *b)* $f(t) = t^2$

c) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 5 \\ 0, & t > 5 \end{cases}$

8-19 *a)* $f(t) = e^{2t-1}$ *b)* $f(t) = \cos^2 t$

c) $f(t) = \begin{cases} t, & t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 < t \leq 1.5 \\ 0.5, & t > 1.5 \end{cases}$

8-2 Existencia de transformadas de Laplace

8-20 ¿En qué condiciones existirá la transformada de Laplace de una función?

8-21C ¿Qué es una discontinuidad de salto?

8-22C ¿En qué condiciones serán idénticos los límites izquierdo y derecho de una función en cualquier punto de un intervalo específico?

8-23C ¿Cuándo una función es de orden exponencial?

8-24C ¿Una función $f(t)$ puede ser de orden exponencial aun cuando se haga infinita cuando $t \to \infty$?

8-25C ¿Una función tiene que ser continua por partes y de orden exponencial para tener una transformada de Laplace?

8-26C Determine si las siguientes funciones son de orden exponencial:

a) $f(t) = 5$ *b)* $f(t) = 3t$

c) e^{-3t^2} *d)* $f(t) = e^{2t}$

8-27 Determine si las siguientes funciones son de orden exponencial:

a) $f(t) = 2t^6$ *b)* $f(t) = 12\, e^{30t}$

c) $e^{0.001t^2}$ *d)* $f(t) = \begin{Bmatrix} t, & t \leq 5 \\ e^{2t^2}, & t > 5 \end{Bmatrix}$

8-28 Determine si las siguientes funciones tienen una transformada de Laplace:

a) $f(t) = 8t^8$ *b)* $f(t) = e^{0.3t^2}$

c) $\operatorname{sen} t^2$ *d)* $f(t) = \begin{Bmatrix} e^{2t^2}, & t \leq 8 \\ t^2, & t > 8 \end{Bmatrix}$

8-3 Propiedades básicas de la transformada de Laplace

8-29 ¿Es verdad que $L\{5t^2 \operatorname{sen} 3t\} = 5t^2 L\{\operatorname{sen} 3t\}$? ¿Y qué dice usted de $L\{5t^2 \operatorname{sen} 3t\} = 5L\{t^2 \operatorname{sen} 3t\}$?

8-30 ¿Es verdad que $L\{t^2 + e^{5t}\} = L\{t^2\} + L\{e^{5t}\}$? ¿Y qué hay de $L\{t^2\, e^{5t}\} = L\{t^2\} \times L\{e^{5t}\}$?

8-31 ¿Cuál es la propiedad de corrimiento de la transformada de Laplace? ¿En qué se distingue de la propiedad de cambio de escala?

8-32 Considere dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ y sus transformadas de Laplace $F(s)$ y $G(s)$. Si $G(s) = sF(s)$, encuentre una relación entre $f(t)$ y $g(t)$.

8-33 Considere dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ y sus transformadas de Laplace $F(s)$ y $G(s)$. Si $G(s) = \int_s^\infty F(s)\, ds$, encuentre una relación entre $f(t)$ y $g(t)$.

8-34 Considere dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ y sus transformadas de Laplace $F(s)$ y $G(s)$. Si $G(s) = -d^3F(s)/ds^3$, encuentre una relación entre $f(t)$ y $g(t)$.

8-35 ¿Es $L\{f(2t)\} = 2L\{f(t)\}$? ¿Para qué clase de función será éste el caso?

8-36 Compruebe que

$$L\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \qquad \textbf{(8-15 repetida)}$$

también puede expresarse como

$$L\left\{(-t)^n f(t)\right\} = \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Determine la transformada de Laplace de las siguientes funciones usando las propiedades básicas de la transformada y la tabla 8-1:

8-37 *a)* $f(t) = t^3 \cos t$ *b)* $f(t) = 2t^5 - 3e^{2t+1}$

c) $f(t) = \int_0^t e^{3t} dt$

8-38 *a)* $f(t) = 3t\,e^{-2t}\cos\alpha t$ *b)* $f(t) = 2t^2e^{-3t}$

c) $f(t) = \dfrac{\cos^2 kt}{t}$

8-39 *a)* $f(t) = 6t\,e^{3t}\text{sen}\,2t$ *b)* $f(t) = 3t\cosh kt$

c) $f(t) = \sqrt{t} + t^{3/2}$

8-40 *a)* $f(t) = t^2e^{3t+1}\text{sen}\,\omega t$ *b)* $f(t) = te^t$

c) $f(t) = \displaystyle\int_0^t e^{3t}\text{sen}\,2t\,dt$

8-41 *a)* $f(t) = 5t^2\,\text{senh}\,2t$ *b)* $f(t) = 2e^{-3t}t^3$

c) $f(t) = t^2e^{5t-2}\cos kt$

8-42 *a)* $f(t) = t^{5/2}e^{5t}$ *b)* $f(t) = t^3\text{sen}\,3t\cos 3t$

c) $f(t) = \displaystyle\int_0^t t\cosh 3t$

8-4 Transformadas de Laplace de funciones escalonadas, periódicas y de impulso

8-43C Defina la función de escalón unitario y explique su valor en ciencia e ingeniería.

8-44C Explique cómo se distinguen de $f(t)$ las funciones $u(t - t_0)\,f(t)$ y $u(t - t_0)\,f(t - t_0)$.

8-45C ¿Cuáles son las características de una función periódica? ¿Una función periódica tiene que ser continua?

8-46C ¿Cuál es el valor en la práctica de la función de impulso unitario? Dé un ejemplo de funciones físicamente significativas que puedan describirse con la ayuda de funciones de impulso unitario.

8-47C Considere dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ cuyas transformadas de Laplace son 1 y $1/s$, respectivamente. Explique en qué se distinguen ambas funciones.

Exprese las funciones en las figuras 8-48 a 8-51en términos de las funciones escalonadas y/o funciones delta, y determine sus transformadas de Laplace.

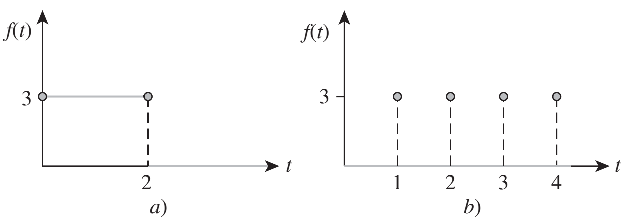


FIGURA 8-48

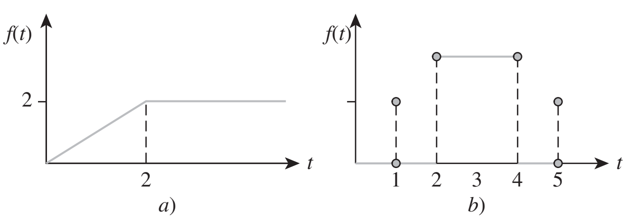


FIGURA 8-49

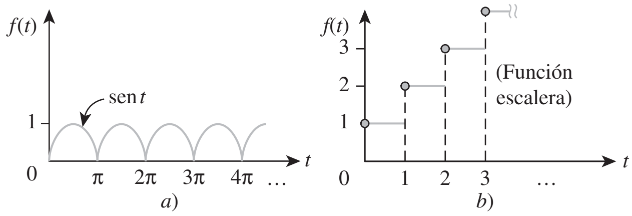


FIGURA 8-50

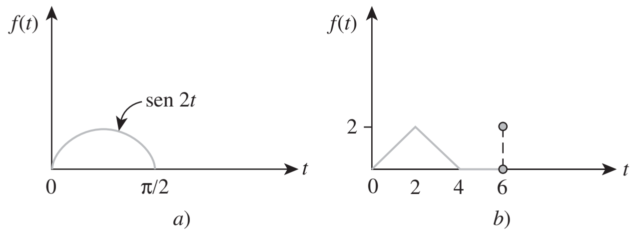


FIGURA 8-51

Grafique las siguientes funciones y determine su transformada de Laplace:

8-52 *a)* $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3\pi \\ \text{sen}\,t, & t \geq 3\pi \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} t, & t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$

8-53 *a)* $f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & t \leq \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} -1, & t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \leq 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$

8-54 *a)* $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t - 2)^2, & t \geq 2 \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3\pi/2 \\ 3\cos t, & 3\pi/2 \leq t \leq 5\pi/2 \\ 0, & t > 5\pi/2 \end{cases}$

8-55 *a)* $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ t^2, & t \geq 3 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 0, & t < 1 \\ 5, & t = 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \\ 5, & t = 2 \\ 2, & t > 2 \end{cases}$

Grafique las siguientes funciones periódicas de periodo p y determine sus transformadas de Laplace:

8-56 $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad (p = 2)$

8-57 $f(t) = \begin{cases} \text{sen}\,t, & 0 \leq t < \pi \\ -\text{sen}\,t, & \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \quad (p = 2\pi)$

8-58 $f(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < 1 \\ -5, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad (p = 2)$

8-59 $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 5 \\ 0, & 5 \le t < 10 \end{cases} \quad (p = 10)$

Determine la transformada de Laplace de las funciones periódicas en las figuras 8-60 a 8-62.

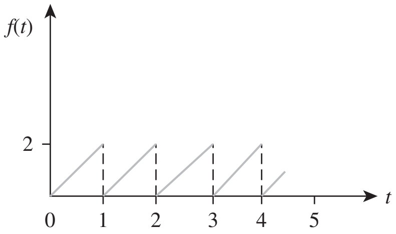


FIGURA 8-60

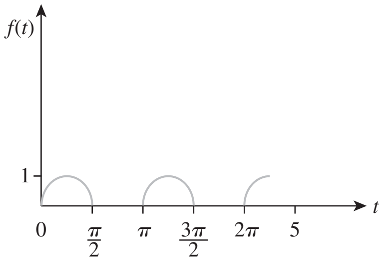


FIGURA 8-61

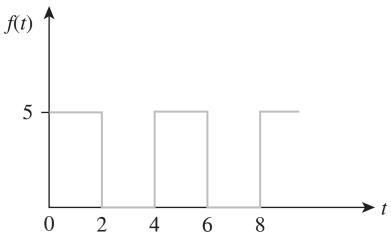


FIGURA 8-62

8-5 Transformadas de Laplace de derivadas y ecuaciones diferenciales

8-63C ¿Cómo se obtiene la transformada de Laplace de una ecuación diferencial?

8-64C Si $f(t)$ es una función continua por partes con un salto único en $t = 5$, ¿cómo expresaría usted la transformada de Laplace de $f'(t)$?

Determine la transformada de Laplace de las siguientes ecuaciones diferenciales y obtenga una relación para la transformada de la función incógnita, $Y(s)$:

8-65 *a)* $y''' - 2y' + 5y = 0$ *b)* $y'' = 3te^{2t}$

8-66 *a)* $y'' - 2y = \operatorname{senh} 3t$

b) $y''' + 3y' + 5y = 3\delta(t-5) + e^{2t+1}$

8-67 *a)* $y'' + 5y = te^{3t} \operatorname{sen} 2t$

$y' + 3y = e^{2t+1} + 3u(t-0)$

8-6 Transformada inversa de Laplace

8-68C ¿Cuál es una manera práctica de determinar la inversa de una transformada de Laplace que contenga el factor s?

8-69C ¿Cuál es una manera práctica de determinar la inversa de una transformada de Laplace que contenga el factor $1/s$?

8-70C ¿Cuál es una manera práctica de determinar la inversa de una transformada de Laplace que contenga el factor e^{-ks}?

Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando las propiedades básicas de la transformada inversa de Laplace y la tabla 8-1: (No use el método de fracciones parciales ni el teorema de convolución.)

8-71 *a)* $F(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s^2+1}$ *b)* $F(s) = \dfrac{1}{s+3} - \dfrac{s}{(s-3)^4}$

c) $F(s) = \dfrac{3}{9s^2+s}$

8-72 *a)* $F(s) = \dfrac{s-3}{s+3}$ *b)* $F(s) = \dfrac{e^{-4s}}{s^2+2s+2}$

c) $F(s) = \dfrac{s}{(s-3)^3}$

8-73 *a)* $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2-1}$ *b)* $F(s) = \dfrac{8s}{4s^2+3}$

c) $F(s) = \dfrac{e^{-2}}{s^6}$

8-74 *a)* $F(s) = \dfrac{3s}{4s^2+4s+4}$ *b)* $F(s) = \dfrac{2s+1}{(s-1)^3}$

c) $F(s) = \dfrac{s+1}{s-1}$

8-75 *a)* $F(s) = \dfrac{2e^{-2s}}{s^2-9}$ *b)* $F(s) = \dfrac{2s+3}{s^2+2s+2}$

c) $F(s) = \dfrac{s-2}{s^2+1}$

8-76 *a)* $F(s) = \dfrac{s}{(s-k)^2+a^2}$ *b)* $F(s) = 3e^{-2s}$

c) $F(s) = \dfrac{3s+1}{s-2}$

8-7 Fracciones parciales

8-77C ¿Qué es el método de fracciones parciales? ¿Para qué se usa?

8-78C ¿En qué condiciones es propia una fracción racional?

8-79C ¿Cómo se manejan los factores repetidos en el método de fracciones parciales?

8-80C ¿Hay manera de verificar si se hacen las decisiones adecuadas para las fracciones parciales en el método de fracciones parciales?

Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando el método de fracciones parciales siempre que sea necesario:

8-81 *a)* $F(s) = \dfrac{2s^2+1}{s^2(s-2)}$ *b)* $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s^2(s^2+4s+8)}$

8-82 *a)* $F(s) = \dfrac{1}{(s+4)(s^2+1)}$

b) $F(s) = \dfrac{s^3+5s-1}{(s+1)^2(s^2+4s+2)}$

8-83 *a)* $F(s) = \dfrac{5s + 1}{s^3(s^2 - 1)}$

b) $F(s) = \dfrac{s + 1}{s^2(2s^2 + s + 1)}$

8-84 *a)* $F(s) = \dfrac{s^2 + 2s - 1}{s(s - 1)^3(s + 3)}$

b) $F(s) = \dfrac{2s^2 + 1}{s^3(s + 5)}$

8-85 *a)* $F(s) = \dfrac{s^2 + s + 2}{s(s^2 + 6s + 5)}$

b) $F(s) = \dfrac{s^2 + 4}{s^2(s - 1)(s + 4)}$

8-86 *a)* $F(s) = \dfrac{4s^2 + 1}{s(s + 4)(s - 5)}$ *b)* $F(s) = \dfrac{s^2 - 1}{s(s^2 + 1)}$

8-8 Teorema de convolución

8-87C ¿Cuál es la importancia del teorema de convolución? ¿Cómo se expresa?

8-88C ¿Es verdad que $L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t)g(t)$? Explique.

8-89C Compruebe que las dos últimas expresiones en la ecuación 8-57 son idénticas.

Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando el teorema de convolución:

8-90 *a)* $Y(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s(s^2 + 4s + 3)}$

b) $Y(s) = \dfrac{s}{(s + 1)(s^2 + 4)}$

8-91 *a)* $Y(s) = \dfrac{8}{s^3(s^2 - 1)}$ *b)* $Y(s) = \dfrac{1}{s(s + 4)}$

8-92 *a)* $Y(s) = \dfrac{s + 1}{s^2(s^2 - 1)}$

b) $Y(s) = \dfrac{1}{(s + 1)^2(s^2 + 4)}$

8-93 *a)* $Y(s) = \dfrac{3e^{-2s}}{(s + 3)(s - 1)^2}$

b) $Y(s) = \dfrac{4}{s(s^2 + 2s - 3)(s - 3)}$

Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando tanto el método de fracciones parciales como el teorema de convolución:

8-94 *a)* $Y(s) = \dfrac{5}{s^2(s + 1)}$

b) $Y(s) = \dfrac{s + 1}{[(s + 1)^2 + 4](s - 2)}$

8-95 *a)* $Y(s) = \dfrac{4}{s(s^4 - 16)}$

b) $Y(s) = \dfrac{2}{s(s^2 + 2s + 5)}$

8-96 *a)* $Y(s) = \dfrac{2e^{-3s}}{s^2(s^2 + 1)}$

b) $Y(s) = \dfrac{s}{(s - 2)^2(s + 3)}$

8-97 *a)* $Y(s) = \dfrac{2}{s^3(s - 1)(s + 2)}$

b) $Y(s) = \dfrac{3}{s(2s^2 + 8)}$

8-98 *a)* $Y(s) = \dfrac{6s}{(s + 3)(s^2 - 5)}$ *b)* $Y(s) = \dfrac{4s^2}{s^4 - 1}$

8-9 Resolución de ecuaciones diferenciales por transformada de Laplace

8-99C ¿Cuáles son los pasos básicos para resolver problemas de valor inicial por el método de transformada de Laplace?

8-100C ¿Cómo se incorporan las condiciones iniciales de un problema de valor inicial en la solución al usar el método de la transformada de Laplace?

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial usando el método de la transformada de Laplace:

8-101 $y' + 3y = \cos t,\ y(0) = -1$

8-102 $y' + 10y = 2\cos t,\ y(0) = 0$

8-103 $y' + 0.001y = e^{-0.02t},\ y(0) = 0$

8-104 $y' + 0.02y = 30,\ y(0) = 80$

8-105 $x'' + 3x' + x = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 5$

8-106 $x'' + 4x = [1 - u(t - \pi)]\operatorname{sen} 2t,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2$

8-107 $x'' + x' = e^{-t}\operatorname{sen} t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1$

8-108 $y'' + 80y = 4[u(t - 1) - u(t - 2)],$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

8-109 $y'' + 10y' + 140y = 6\delta(t - 0) + u(t - 1),$
$y(0) = y'(0) = 0$

8-110 $y'' + 2y' + 3y = 3\delta(t) + u(t - 2),\ y(0) = 2,$
$y'(0) = 0$

8-111 $y'' + 3y' - 2y = 0,\ y(2) = 1,\ y'(0) = 0$

8-112 $y'' - 4y = 2\operatorname{senh} 3t,\ y(0) = y'(0) = 0$

8-113 $y'' - y = 5\delta(t - 0),\ y(0) = y'(0) = 0$

8-114 $y''' - 8y = e^{-2t},\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

8-115 $y''' + 3y' + 4y = 2t^2 + 5,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1,$
$y''(0) = 0$

8-116 $y' + y = te^{-t},\ y(1) = 2$

8-117 $y^{iv} = 8,\ y(0) = y'(0) = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 2$

8-118 $y'' + y = \operatorname{sen} 2t,\ y(3) = 2,\ y'(3) = 1$

8-119 $y'' + 8y' = e^t \operatorname{sen} t,\ y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = 2$

Encuentre la función de transferencia $Y(s)/F(s)$ para las siguientes ecuaciones:

8-120 $y' + 3y = f(t)$ **8-121** $y'' + 3y' + y = f(t)$

8-10 Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales por transformada de Laplace

8-122C ¿Cuáles son los pasos básicos para resolver un sistema de problemas de valor inicial por el método de transformada de Laplace?

Resuelva los siguientes sistemas de problemas de valor inicial usando el método de transformada de Laplace:

8-123 $x'' + x - 2y = 3\delta(t),\ y' + 5x = 0,$
$x(0) = x'(0) = 0,\ y(0) = 1$

8-124 $x'' + y' = 5e^{-t},\ y'' - x = \operatorname{sen} t,\ x(0) = 1,$
$x'(0) = 0,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0$

8-125 $x'' + x + y' = \cos t,\ y'' + 2x = e^{-t},\ x(0) = -1,$
$x'(0) = 1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

8-126 $x_1' - 3x_2' + 4x_1 - 5x_2 = 0,\ x_2' - x_1' + 3x_2 = 5,$
$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0$

8-127 $x' + y + z = e^{-4t},\ y' + x' - x = 0,$
$z' - z + y = \operatorname{sen} t,\ x(0) = y(0) = 0,\ z(0) = 3$

8-128 Encuentre las funciones de transferencia $X(s)/F(s)$ y $Y(s)/F(s)$ para el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$x'' + x + y = 3f(t),\ y' + x = f(t)$$

8-129 Encuentre las funciones de transferencia $X_1(s)/F(s)$ y $X_2(s)/G(s)$ para los siguientes conjuntos de ecuaciones:

$$x_1' - 3x_2' + 4x_1 - 5x_2 = f(t) - 4g(t),$$
$$x_2' - x_1' + 3x_2 = 6f(t)$$

8-130 Encuentre las funciones de transferencia $X(s)/F(s)$ y $X(s)/G(s)$ para los siguientes conjuntos de ecuaciones:

$$x' + y + z = 3f(t) + g(t),\ y' + x' - x = f(t),$$
$$z' - z + y = 10f(t)$$

Use la transformada de Laplace para obtener la matriz de transición $\boldsymbol{\phi}(t)$ *para cada u no de los siguientes sistemas,* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, *donde* **A** *está dada en el problema:*

8- 131 $\mathbf{A} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$ **8-132** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8-133 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

8-134 Considere el siguiente sistema, que tiene dos entradas, $f_1(t)$ y $f_2(t)$:

$$x_1' = 5x_1 - 3x_2 + 4f_1(t) - 5f_2(t)$$
$$x_2' = -7x_1 - 3x_2 + f_1(t) - 9f_2(t)$$

Obtenga la matriz de funciones de transferencia para la salida x_1.

8-135 Determine la respuesta forzada del sistema $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{r}(t)$ para el caso en que $\mathbf{r}(t)$ es un vector **p** de funciones escalonadas con una magnitud diferente, comenzando todas en $t = 0$. (*Sugerencia:* use la expansión de serie para $\boldsymbol{\phi}(t)$, pero su respuesta no debe ser una expresión serial.)

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \cdots$$

8-136 Determine la respuesta forzada del sistema $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{r}(t)$ para el caso en que $\mathbf{r}(t)$ es un vector de funciones de rampa y todas comienzan en $t = 0$, de modo que $\mathbf{r}(t) = \mathbf{q}t$, donde el vector **q** contiene la pendiente de la rampa. (*Sugerencia:* use la expansión de serie para $\boldsymbol{\phi}(t)$ dada en el problema 8-135, pero su respuesta no debe ser una expresión serial.)

8-11 Método de transformada de Laplace con ayuda de computadora

8-137 Use un método de transformada de Laplace con una computadora para despejar la respuesta de paso unitario de los siguientes modelos para condiciones iniciales cero:

a) $3x'' + 21x' + 30x = u(t)$
b) $5x'' + 20x' + 65x = u(t)$
c) $4x'' + 32x' + 60x = 3u'(t) + 2u(t)$
d) $x''' + 10x'' + 31x' + 30x = 3u'(t) + 2u(t)$

8-138 Use el método de transformada de Laplace con una computadora para despejar la respuesta de entrada unitaria de los siguientes modelos para condiciones iniciales cero:

a) $3x'' + 21x' + 30x = \delta(t)$
b) $5x'' + 20x' + 65x = \delta(t)$

8-139 Use un método de transformada de Laplace con una computadora para despejar la respuesta de los siguientes modelos para $0 \le t \le 1.5$, donde la entrada es $f(t) = 5t$ y las condiciones iniciales son cero:

a) $3x'' + 21x' + 30x = f(t)$
b) $5x'' + 20x' + 65x = f(t)$
c) $4x'' + 32x' + 60x = 3f'(t) + 2f(t)$
d) $x''' + 10x'' + 31x' + 30x = 3f'(t) + 2f(t)$

8-140 Use un método de transformada de Laplace con una computadora para despejar la respuesta del siguiente modelo para una condición inicial cero, donde la entrada $f(t)$ es un pulso rectangular de altura 3 y duración 5:

$$4x' + x = f(t)$$

8-141 Use una computadora para graficar la respuesta de escalón unitario de los siguientes modelos para condiciones iniciales cero:

a) $3x'' + 21x' + 30x = u(t)$
b) $5x'' + 20x' + 65x = u(t)$
c) $4x'' + 32x' + 60x = 3u'(t) + 2u(t)$
d) $x''' + 10x'' + 31x' + 30x = 3u'(t) + 2u(t)$

8-142 Use una computadora para graficar la respuesta de impulso unitario de los siguientes modelos para condiciones iniciales cero:

a) $3x'' + 21x' + 30x = \delta(t)$
b) $5x'' + 20x' + 65x = \delta(t)$

8-143 Use una coomputadora para graficar la respuesta de los siguientes modelos para $0 \le t \le 1.5$, donde la entrada es $f(t) = 5t$ y las condiciones iniciales son cero:

a) $3x'' + 21x' + 30x = f(t)$
b) $5x'' + 20x' + 65x = f(t)$
c) $4x'' + 32x' + 60x = 3f'(t) + 2f(t)$
d) $x''' + 10x'' + 31x' + 30x = 3f'(t) + 2f(t)$

8-144 Use una computadora para graficar la respuesta de los siguientes modelos para $0 \le t \le 6$, donde la entrada es $f(t) = 6 \cos 3t$, y las condiciones iniciales son cero:

a) $3x'' + 21x' + 30x = f(t)$
b) $5x'' + 20x' + 65x = f(t)$
c) $4x'' + 32x' + 60x = 3f'(t) + 2f(t)$
d) $x''' + 10x'' + 31x' + 30x = 3f'(t) + 2f(t)$

8-145 Las ecuaciones para un motor de dc controlado por armadura son las siguientes: la corriente del motor es i y su velocidad de giro es ω.

$$L\frac{di}{dt} = -Ri - K_b\omega + v(t)$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = K_T i - c\omega$$

donde L, R e I son la inductancia, la resistencia y la inercia del motor; K_T y K_b son la constante de par de torsión y la constante de contra-emf, respectivamente; c es una constante de amortiguación viscosa, y $v(t)$ es el voltaje aplicado. Use los valores $R = 0.8\ \Omega$, $L = 4 \times 10^{-3}$ H, $K_T = 0.2$ N · m/A, $K_b = 0.2$ V · s/rad, $c = 5 \times 10^{-4}$ e $I = 5 \times 10^{-4}$ kg · m^2.

a) Use una computadora para obtener las funciones de transferencia $I(s)/V(s)$ y $\Omega(s)/V(s)$.

b) Suponga que el voltaje aplicado es una función escalonada de magnitud 10 V. Grafique la velocidad del motor y la corriente contra el tiempo. Determine el valor pico de la corriente a partir de la gráfica.

c) Suponga que el voltaje aplicado no aumenta instantáneamente, sino que está dado por $v(t) = 10(1 - e^{-100t})V$. Grafique la velocidad del motor y la corriente contra el tiempo. Determine el valor pico de la corriente a partir de la gráfica. Compare con el valor pico determinado en la parte *b*).

Problemas de repaso

8-146 Obtenga la transformada de Laplace de la función graficada en la figura P8-146.

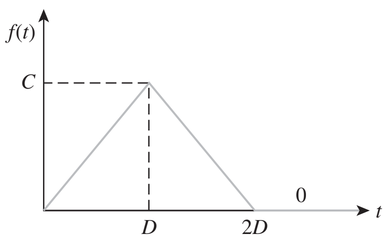


FIGURA P8-146

8-147 Obtenga la transformada de Laplace de la función graficada en la figura P8-147.

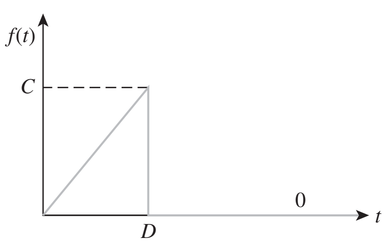


FIGURA P8-147

8-148 Obtenga la transferencia de Laplace de la función graficada en la figura P8-148.

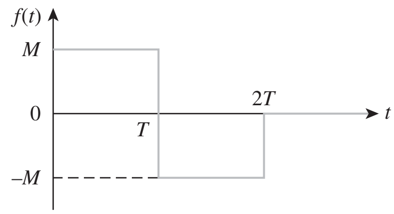


FIGURA P8-148

8-149 Considere la ecuación

$$x' = x = \tan t$$

Esta ecuación no puede resolverse por el método de transformada de Laplace, porque la transformada de tan t no existe. Una solución aproximada de esta ecuación puede obtenerse reemplazando tan t por una aproximación de serie. El número de términos usados en la serie determina la exactitud de la solución resultante para $x(t)$. La expansión de serie de Taylor para tan t es

$$\tan t = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \frac{17t^7}{315} + \cdots \ |t| < \frac{\pi}{2}$$

Cuantos más términos retengamos, más precisa es la serie. Asimismo, la serie pierde su exactitud al aumentar el valor absoluto de t.

Use la transformada de Laplace con los primeros tres términos de la serie para obtener una solución aproximada de forma cerrada de $x(t)$ en el intervalo $0 \le t \le 0.5$.

8-150 Obtenga la respuesta de impulso unitario de la ecuación $x'' = \delta(t)$. Las condiciones iniciales son $x(0) = 5$ y $x'(0) = 10$.

8-151 Obtenga la respuesta de impulso unitario de la siguiente ecuación; las condiciones iniciales son $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$:

$$2x'' + 14x' + 20x = \delta(t)$$

8-152 La figura P8-152 muestra la representación del circuito de una línea telegráfica. R es la resistencia de la línea, L es la inductancia del solenoide que activa el "clíquer". El switch representa la llave del operador. Suponga que al enviar un "punto", la llave se cierra durante 0.1 s. Usando los valores $R = 20\ \Omega$ y $L = 4$ H, obtenga la expresión para la corriente $I(t)$ que pasa por el solenoide.

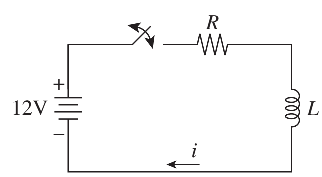


FIGURA P8-152

8-153 Considere las dos masas en colisión que se muestran en la figura P8-153. La parte *a*) muestra la situación antes del choque, y la parte *b*) muestra la situación después del choque.

Cuando ambas masas se tratan como un solo sistema, no se aplica ninguna fuerza externa al sistema, y se conserva el momento. De modo que

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_3 + m_2v_4$$

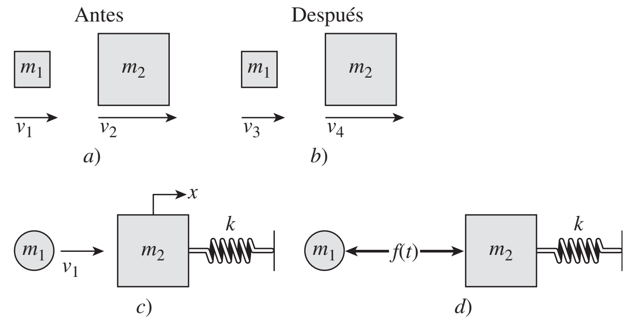


FIGURA P8-153

Si la colisión es *perfectamente elástica*, la energía cinética se conserva. De modo que

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_3^2 + \frac{1}{2}m_2v_4^2$$

La aplicación más común es cuando conocemos v_1 y la masa m_2 está inicialmente estacionaria. De modo que $v_2 = 0$. En este caso, la ecuación se reduce a

$$v_1 = v_3 + rv_4 \qquad\qquad v_1^2 = v_3^2 + rv_4^2$$

donde $r = m_2/m_1$. Esto tiene la siguiente solución:

$$v_3 = \frac{1 - r}{1 + r}v_1 \qquad\qquad v_4 = \frac{2}{1 + r}v_1$$

Considere ahora el sistema mostrado en la figura P8-150 *b*) y *c*). Suponga que la masa $m_1 = m$ que se mueve con una velocidad v_1, rebota en la masa $m_2 = 10m$ después de golpearla; y que la colisión es perfectamente elástica. La fuerza impulsiva que actúa sobre cada masa durante la colisión es $f(t)$ y es incógnita. Determine la expresión para el desplazamiento $x(t)$ después de la colisión.

8-154 Encuentre la respuesta forzada del modelo $v' = f(t) - 5v$ para la siguiente función de entrada; la condición inicial es $v(0) = 0$:

$$f(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \le t \le 2 \\ -4t + 16, & 2 < t < 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}$$

(*Sugerencia:* use la respuesta de rampa y el teorema de corrimiento.)

8-155 Refiérase a la figura P8-155. Un pistón de masa 10 kg y área 2.4×10^{-2} m^2 se desliza con fricción despreciable dentro de un cilindro. En $t = 0$, la válvula de aire está abierta y la presión $p(t)$ disminuye como sigue:

$$p(t) = p_a + p_0e^{-t/\tau}$$

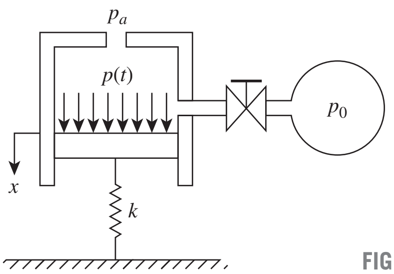


FIGURA P8-155

La presión inicial $p(0)$ es 30 kPa sobre la presión atmosférica p_a, y en el tiempo $t = 0.2$ s, es 15 kPa sobre la presión atmosférica. La rigidez es $k = 1\,000$ N/m; *a*) estime los valores de p_0 y la constante de tiempo τ y *b*) obtenga la expresión para el desplazamiento del pistón $x(t)$.

8-156 La figura P8-156 es una representación de un paquete de instrumentos de masa m en una cápsula espacial soportada por una suspensión de rigidez k. Cuando el cohete entra en ignición, la aceleración y'' aumenta como $y'' = bt$, donde b es constante. Sea $z = x - y$, y suponga que $z(0) = z'(0) = 0$. Obtenga la expresión para el desplazamiento relativo $z(t)$ y la aceleración $x''(t)$ que experimenta el paquete.

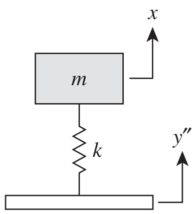


FIGURA P8-156

8-157 La figura P8-156 es una representación de un astronauta y su asiento en una cápsula espacial. El asiento está apoyado en una suspensión de rigidez k. Cuando la etapa final del cohete se enciende, la aceleración y'' aumenta como $y'' = ae^{bt}$, donde a y b son constantes. Sea $z = x - y$; suponga que $z(0) = z'(0) = 0$. Obtenga la expresión para la aceleración $x''(t)$ que experimenta el astronauta.

8-158 Refiérase a la figura P8-158. En el tiempo $t = 0$, un elevador de carga se mueve a la velocidad v_0 y luego desacelera hasta velocidad cero en el tiempo T con una desaceleración constante, de modo que

$$v(t) = v_0\left(1 - \frac{t}{T}\right) \qquad 0 \le t \le T$$
$$v(t) = 0 \qquad\qquad t > T$$

El elevador contiene un paquete de masa m con acojinamiento de rigidez k. Obtenga la expresión para el desplazamiento $x(t)$ para $0 \le t \le T$, suponiendo que $x(0) = x'(0) = 0$.

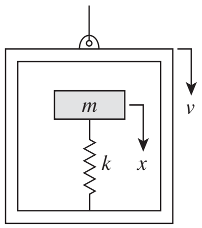


FIGURA P8-158

8-159 Con referencia a la figura P8-159*a*, que muestra un tanque de agua sujeto a una fuerza de chorro $f(t)$, modelaremos el tanque y su columna de soporte como el sistema resorte-masa que se muestra en la parte *b*) de la figura. La fuerza de chorro como función del tiempo se muestra en la parte *c*) de la figura. Suponiendo condiciones iniciales cero, obtenga la expresión para $x(t)$ para $0 \le t \le T$.

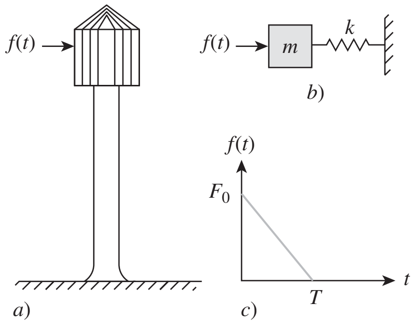


FIGURA P8-159

8-160 Refiérase a la figura P8-160, la cual es una representación simplificada de un vehículo que pasa por una protuberancia del camino. El desplazamiento vertical x es cero cuando el neumático encuentra la protuberancia. Suponiendo que la velocidad horizontal del vehículo v permanece constante y que el sistema está críticamente amortiguado, obtenga la expresión para $x(t)$.

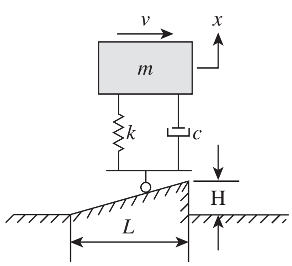


FIGURA P8-160

8-161 Una viga uniforme en voladizo de longitud L está sujeta a una fuerza concentrada f_0 en el punto medio, $x = L/2$. Vea la figura P8-161. La deflexión vertical resultante $y(x)$ de la viga está dada por

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = f_0\delta\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

donde E es el módulo de Young, que depende del material de la viga, e I es el momento de inercia, que depende de la geometría de la viga. Use la transformada de Laplace para encontrar la deflexión $y(x)$ para las condiciones en la frontera dadas $y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$.

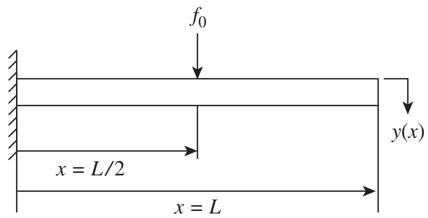


FIGURA P8-161

8-162 Una viga uniforme en voladizo de longitud L está sujeta a una fuerza distribuida por unidad de longitud $f(x)$ descrita por

$$f(x) = \frac{2f_0}{L}\left[\frac{L}{2} - x + \left(x - \frac{L}{2}\right)u\left(x - \frac{L}{2}\right)\right]$$

(ver figura P8-162). La deflexión vertical resultante $y(x)$ de la viga está dada por

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = f(x)$$

donde E es el módulo de Young, que depende del material de la viga, e I es el momento de inercia, que depende de la geometría de la viga. Use la transformada de Laplace para encontrar la deflexión $y(x)$ para las condiciones en la frontera dadas $y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$.

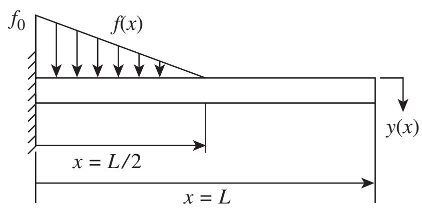


FIGURA P8-162

CAPÍTULO

9

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Hasta ahora, consideramos ecuaciones diferenciales que pueden resolverse analíticamente usando métodos bien desarrollados, y las soluciones así obtenidas las llamamos *analíticas* o *de forma cerrada*. La forma de estas soluciones puede ser *explícita*, lo cual significa que la variable dependiente es una función explícita de la variable independiente, como en $y = x^2$. Tales soluciones son muy deseables por su exactitud (el procedimiento de resolución no incluye ninguna aproximación), y porque la solución en cualquier punto puede obtenerse simplemente por sustitución del valor de la variable independiente en ese punto en la función explícita. Esto es especialmente cierto para soluciones analíticas que están en forma explícita. Otras soluciones analíticas pueden aparecer en forma *implícita*, como en $y + 3xe^{-y} = 5$. Tales soluciones necesitan un método numérico para encontrar las raíces y obtener una tabla o una gráfica de valores de y contra valores de x.

Es lamentable que las ecuaciones que disponen de soluciones analíticas exactas sean la excepción más que la regla. La mayoría de las ecuaciones diferenciales no lineales o con coeficientes variables que se encuentran en la práctica no pueden resolverse analíticamente. Al no poder obtener soluciones exactas, no tenemos otra elección más que contentarnos con soluciones aproximadas, tales como las que se obtienen reemplazando los términos no lineales de la ecuación con aproximaciones lineales, o con soluciones numéricas, en las que la solución se obtiene en forma de una gráfica o una tabla de números. En este capítulo veremos métodos para obtener soluciones numéricas.

Iniciaremos este capítulo con un breve repaso de la *integración numérica*, ya que tiene un estrecho paralelismo con la solución numérica de ecuaciones diferenciales. Después de todo, resolver una ecuación diferencial es equivalente (al menos en espíritu) a integrarla. Entre los diversos métodos numéricos disponibles para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias consideraremos primero el *método de Euler*, ya que es el más sencillo, aunque a veces no es suficientemente exacto. Luego veremos el *método de Euler mejorado*, el cual es más exacto que el de Euler, aunque un poco más complicado. Luego presentaremos el método de *Runge-Kutta* para cuarto orden, ya que es muy exacto, y es uno de los métodos más utilizados en la práctica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. También trataremos algunos métodos populares de tipo *predictor-corrector* y evaluaremos la exactitud y la complejidad de algunos de ellos.

En todas las explicaciones del capítulo consideraremos problemas de valor inicial de primer orden, o sistemas de tales problemas, por simplicidad. Sin embargo, los procedimientos presentados también pueden usarse para resolver ecuaciones diferenciales de órdenes superiores, ya que cualquier ecuación diferencial de orden n puede expresarse como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden. También supondremos que los problemas considerados

OBJETIVOS

Al terminar este capítulo usted deberá ser capaz de:

1. Resolver una ecuación diferencial de primer orden cuya derivada sea una función exclusiva de la variable independiente, usando el método de franjas rectangulares, la regla trapezoidal y la regla de Simpson.
2. Resolver una ecuación diferencial de primer orden o un sistema de ecuaciones de primer orden cuyas derivadas sean funciones de las variables independientes y dependientes usando el método de Euler y el método de Euler mejorado.
3. Explicar las fuentes de redondeo y errores de discretización local y discretización global.
4. Escribir programas que implementen el método de franjas rectangulares, la regla trapezoidal, la regla de Simpson, el método de serie de Taylor, el método clásico de Runge-Kutta para cuarto orden y el método predictor-corrector *de* Adams Moulton para cuarto orden.
5. Usar un software para obtener soluciones numéricas de cualquier conjunto ordinario resoluble de ecuaciones diferenciales.

satisfacen las condiciones de existencia y unicidad, de modo que tendrán una solución única en el intervalo que interesa. Observe que los métodos numéricos no dan una familia de soluciones con constantes arbitrarias y, por tanto, siempre debemos especificar suficientes condiciones iniciales para obtener una solución única de una ecuación diferencial de orden n.

Los programas informáticos modernos disponibles contienen implementaciones y extensiones altamente desarrolladas de los métodos descritos en este capítulo. Son fáciles de usar y suficientemente poderosos para manejar ecuaciones como las que se encuentran en este texto; en la sección 9-10 ilustramos cómo usarlos.

Aunque estas herramientas son poderosas, fáciles de usar y ampliamente disponibles, en todo el capítulo incluimos diversos programas para ilustrar los métodos de resolución numérica de que se trata. Esta decisión se basó en esta filosofía: "si usted puede programar un método, entonces lo entiende". Nuestros programas están escritos en MATLAB, pero no utilizan ninguna característica especial de MATLAB. Como los programas usan estructuras comunes (como lazos "for"), deben ser fáciles de traducir en otros lenguajes, tales como Maple y Mathematica.

Para los lectores que desean una breve introducción, las secciones 9-1 a 9-4 cubren los conceptos básicos de los métodos numéricos, y la sección 9-10 puede considerarse una introducción al uso de los solucionadores comercialmente disponibles.

9-1 ▪ INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Resolver el problema de valor inicial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(0) = 0 \tag{9-1}$$

equivale a evaluar la integral definida

$$y(x) = \int_0^x f(x)\,dx \tag{9-2}$$

Sin embargo, algunas integraciones no pueden realizarse analíticamente y, por tanto, no podemos obtener una solución de forma cerrada. Por ejemplo, la integral $\int e^{-x^2}\,dx$ se ve muy simple, pero no está en ninguna tabla de integrales. En tales casos, nuestra única opción es realizar las integraciones aproximadamente, usando un método numérico. Por tanto, es esencial tener un buen entendimiento de la integración numérica para realizar tales integraciones.

Ahora introduciremos algunos esquemas sencillos de integración que se usan comúnmente, utilizando la función $f(x) = 7x - 6x^2$ como ejemplo en todas las explicaciones. La integral de esta función entre los límites 0 y 1 es

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (7x - 6x^2)\,dx = \left| 3.5x^2 - 2x^3 \right|_0^1 = 1.5 \tag{9-3}$$

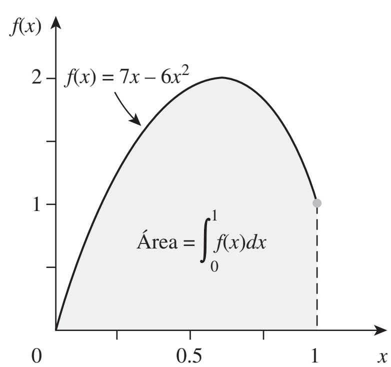


FIGURA 9-1
El área bajo la curva de una función en el diagrama $f(x) - x$ representa la integral de dicha función.

Dado que la integración analítica da el valor exacto y que una integral definida de una función representa el área bajo la curva, concluimos que dicha área de la función $f(x) = 7x - 6x^2$ entre los límites 0 y 1 es exactamente 1.5, como se muestra en la figura 9-1. Este valor servirá como base para comparar los valores aproximados obtenidos por diversos métodos y así evaluar su exactitud. Tenemos presente que el método que prediga el área bajo la curva con mayor exactitud es más exacto. Entre los diversos métodos numéricos disponibles, presentamos ahora el de franjas, la regla trapezoidal y la regla de Simpson. El lector puede consultar cualquier libro estándar de métodos numéricos para una explicación más a fondo de estos métodos y otros.

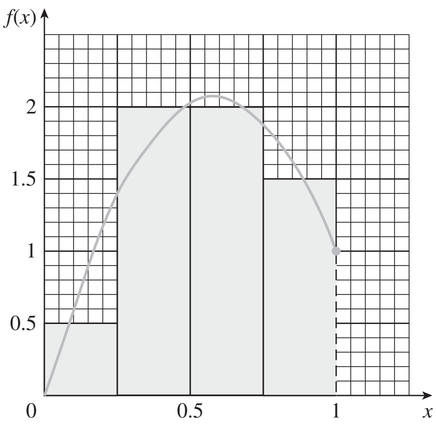


FIGURA 9-2
Determinación gráfica de una integral definida graficando la función en una cuadrícula y contando los cuadrados bajo la curva.

Método de franjas rectangulares

Antes de la era de las computadoras, las personas dependían en gran medida de métodos gráficos para encontrar los valores de las integrales, entre otras cosas, cuando los métodos analíticos no funcionaban. Por ejemplo, la integral de una función difícil se encontraba graficando la función en una cuadrícula y contando los cuadrados bajo la curva, como se muestra en la figura 9-2. El producto del número de cuadrados por el área de cada cuadrado daba aproximadamente el área bajo la curva, que corresponde al valor de la integral. Cuanto más fina sea la cuadrícula, mejor será la exactitud. Este procedimiento a menudo ni siquiera necesita calculadora.

El **método de franjas rectangulares** es la versión numérica de esta técnica gráfica. En este método, el área bajo la curva se divide en varias franjas verticales (elementos rectangulares delgados) cuya altura es igual al valor de la función en el punto medio de la franja. Por tanto, este método se llama también *integración rectangular*. El área total bajo la curva, que es equivalente al valor de la integral, se determina calculando el área de cada franja y sumando las áreas de todas las franjas. El resultado es, por supuesto, aproximado, ya que el valor de la función en el punto medio de cada franja se supone que representa la altura promedio de esa franja.

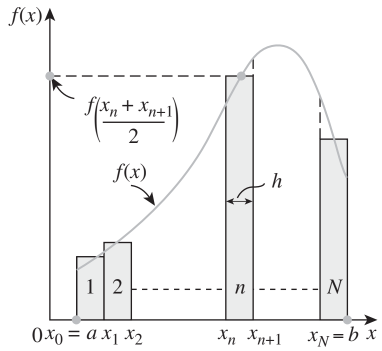


FIGURA 9-3
En el método de franjas rectangulares, el intervalo de integración se divide en N franjas de anchura igual h.

Considere una función $f(x)$ que se va a integrar por el método de franjas entre los límites a y b. Ahora dividimos este intervalo en N franjas de anchura igual h, donde $h = (b - a)/N$. Representemos el valor de x en cualquier punto n como x_n, como se muestra en la figura 9-3. La altura promedio de una franja entre los puntos n y $n + 1$ se puede expresar como

$$\text{Altura promedio} \cong f(x_{\text{promedio}}) = f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)$$

que es el valor de una función en el punto medio de una franja. En el método de franjas, el área total bajo la curva se determina multiplicando la altura promedio de cada franja por su anchura, y sumando los resultados. El área de un segmento general entre los puntos x_n y x_{n+1} se puede determinar a partir de

$$I_n \cong (x_{n+1} - x_n)f\left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}\right), \ n = 0,1,2, \dots , N - 1 \qquad \textbf{(9-4)}$$

donde $x_0 = a$, y $x_N = b$. Entonces, el valor de una integral I entre los límites a y b se puede determinar a partir de

$$I = I_0 + I_1 + I_2 + \cdots + I_{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} I_n \qquad \textbf{(9-5)}$$

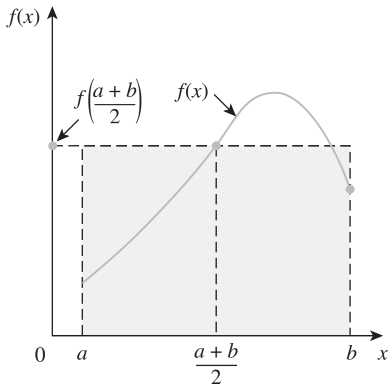


FIGURA 9-4
Método de franjas con un segmento (el caso más sencillo).

Para $N = 1$ el método de franjas rectangulares incluye un solo segmento rectangular, y esta relación se simplifica a (figura 9-4)

$$I \cong (b - a)f\left(\frac{b + a}{2}\right) \qquad \textbf{(9-6)}$$

Como usted esperaría, cuanto más delgadas sean las franjas mayor será la exactitud. En otras palabras, al aumentar el número de franjas, el resultado obtenido se aproxima al exacto.

En general, el valor obtenido por un método numérico diferirá del valor exacto; esta diferencia se llama *error*. Observe que el término “error” en este contexto no significa una equivocación, sino la diferencia entre la respuesta correcta y la respuesta aproximada. La magnitud del error mismo no es una verdadera medida de la exactitud del resultado obtenido, ya que un pequeño error es insignificante para una cantidad grande. Entonces, una medida más realista del error es el **error relativo** o **porcentual**, que se define como

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{valor exacto} - \text{valor aproximado}}{\text{valor exacto}} \times 100\% \qquad \textbf{(9-7)}$$

Por ejemplo, un error de medición de 1 cm corresponde a un error porcentual de 0.1% para un puente de 10 m de longitud, lo cual es despreciable. Pero un error porcentual de 20% para una barra de 5 cm es muy significativo.

EJEMPLO 9-1 Método de franjas rectangulares

Usando el método de franjas, evalúe la integral

$$I = \int_0^1 (7x - 6x^2)\,dx$$

y compare su resultado con el valor exacto de $\boldsymbol{I} = 1.5$. Repita los cálculos para diferentes números de franjas de anchuras iguales.

Solución En este caso, tendremos $f(x) = 7x - 6x^2$, $a = x_0 = 0$ y $b = x_N = 1$. Para $N = 1$ nos aproximamos a toda el área bajo la curva mediante un solo rectángulo, como se muestra en la figura 9-5*a*. Entonces, por la ecuación 9-6, obtenemos

$$I \cong (b - a)f\left(\frac{b + a}{2}\right) = (1 - 0)f\left(\frac{1 + 0}{2}\right) = f(0.5) = 2$$

que tiene un error relativo de $(2 - 1.5)/1.5 = 33.3\%$.

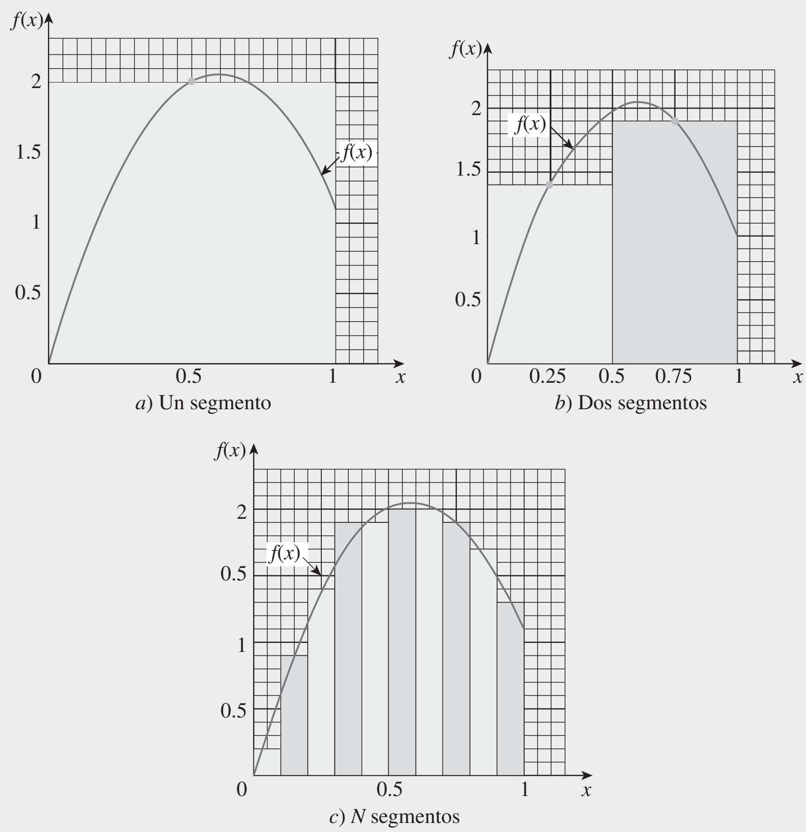


FIGURA 9-5
Representación gráfica de la integración numérica de la función del ejemplo 9-1. El método de franjas se aplica dividiendo el intervalo de integración en 1, 2 y N segmentos.

Para $N = 2$ nos aproximamos a toda el área bajo la curva mediante dos rectángulos de bases iguales, como se muestra en la figura 9-5*b*. Entonces, $h = (1 - 0)/2 = 0.5$, y por las ecuaciones 9-4 y 9-5, obtenemos

$$I = I_0 + I_1 = hf\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + hf\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

$$= 0.5\left[f\left(\frac{0 + 0.5}{2}\right) + f\left(\frac{0.5 + 1}{2}\right)\right] = 0.5\,(1.375 + 1.875) = 1.625$$

que tiene un error de $(1.625 - 1.5)/1.5 = 8.3\%$. Por tanto, dividir el intervalo en dos segmentos reduce el error de 33.3% a 8.3%.

Los resultados para otros valores de N se muestran en la tabla 9-1. Observe que el error porcentual disminuye gradualmente cuando se divide el intervalo de integración en más y más segmentos, como se esperaba.

TABLA 9-1

Valores de la integral $\int_0^1 (7x - 6x^2)\,dx$ obtenidos por el método de franjas, y el error que corresponde a números diferentes de segmentos

Número de segmentos	Valor obtenido por método de franjas	Valor exacto	Error relativo
1	2.000000	1.5000	33.33%
2	1.625000	1.5000	8.33%
3	1.555556	1.5000	3.70%
4	1.531250	1.5000	2.08%
5	1.520000	1.5000	1.33%
10	1.505000	1.5000	0.33%
20	1.501250	1.5000	0.08%
30	1.500556	1.5000	0.04%
40	1.500313	1.5000	0.02%
50	1.500200	1.5000	0.01%
100	1.500050	1.5000	0.00%
200	1.500013	1.5000	0.00%

En la figura 9-6 se muestra un programa escrito en MATLAB que se usó para obtener estos resultados. El programa también puede emplearse en otros problemas cambiando los límites de integración `lower` y `upper` en los primeros dos renglones, el valor de `exact` en el segundo renglón y la definición de la función en el tercer renglón.

```
lower = 0; upper = 1;
exact = 1.5; m = 1;
f = @(x)7*x-6*x^2;
for nstrip = [1,2,3,4,5,10:10:50,100,200]
   h = (upper-lower)/nstrip;
   x = lower;
   value = 0;
   for n = 1:nstrip
      value = value+h*f(x+h/2);
      x = x+h;
      error(m,:) = [nstrip,value,100*abs(value-exact)/exact];
   end
   m = m+1;
end
error
```

FIGURA 9-6
Programa MATLAB para el método de franjas.

Regla trapezoidal

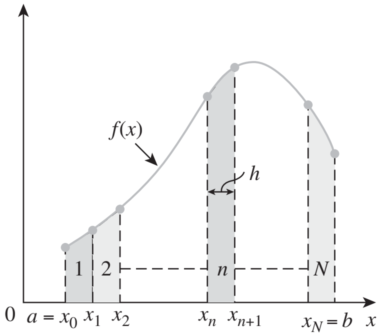


FIGURA 9-7
En la regla trapezoidal, el intervalo de integración se divide en N trapezoides de igual anchura h.

Una extensión natural del método de franjas recién descrito es reemplazar los elementos rectangulares por trapezoidales. El método de integración que se basa en este principio se llama **regla trapezoidal**. Se distingue del método de franjas en que la altura promedio de cada elemento se toma como el promedio aritmético del valor de la función en el punto medio. Entonces, la regla trapezoidal se aproxima a la función dada como una serie de segmentos de línea recta conectados entre sí en sus extremos, en vez de hacerlo como una función escalonada.

Para desarrollar la formulación correspondiente a la regla trapezoidal, considere que una función $f(x)$ se integrará entre los límites a y b. Ahora dividimos este intervalo en N segmentos de igual anchura h donde $h = (b - a)/N$, y representamos el valor de x en cualquier punto n como x_n, como se muestra en la figura 9-7. La altura promedio de un segmento entre los puntos n y $n + 1$ puede expresarse como:

$$\text{Altura promedio} \cong \frac{f(x_n) + f(x_{n+1})}{2} \tag{9-8}$$

que es el promedio de los valores de la función en los puntos terminales del segmento. Aplicando la regla trapezoidal, el área total bajo la curva se determina multiplicando la altura promedio de cada segmento por su anchura y sumando los productos. El área de un segmento general entre los puntos x_n y x_{n+1} puede determinarse por

$$I_n \cong (x_{n+1} - x_n)\frac{f(x_{n+1}) + f(x_n)}{2},\ n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1 \tag{9-9}$$

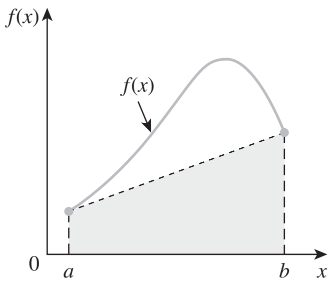


FIGURA 9-8
Regla trapezoidal con un segmento (el caso más simple).

donde $x_0 = a$ y $x_N = b$. Entonces el valor de la integral I entre los límites a y b puede determinarse a partir de la ecuación 9-5 sumando las áreas de los segmentos. Para $N = 1$ la regla trapezoidal incluye un solo trapezoide, y la ecuación 9-9 se simplifica a (ver figura 9-8)

$$I \cong (b - a)\frac{f(b) + f(a)}{2} \tag{9-10}$$

Como usted esperaría, la exactitud se incrementará al aumentar el número de trapezoides utilizados.

EJEMPLO 9-2 Regla trapezoidal

Usando la regla trapezoidal, evalúe la integral

$$I = \int_0^1 (7x - 6x^2)\,dx$$

y compare su resultado con el valor exacto de $I = 1.5$. Repita el cálculo para diferentes números de segmentos de anchuras iguales.

Solución En este caso, tenemos $f(x) = 7x - 6x^2$, $a = x_0 = 0$ y $b = x_N = 1$. Para $N = 1$ nos aproximamos al área completa de la curva como un solo trapezoide, como se muestra en la figura 9-9*a*. En seguida, por la ecuación 9-10, obtenemos

$$I \cong (b - a)\frac{f(b) + f(a)}{2} = (1 - 0) \times \frac{f(1) + f(0)}{2} = 1 \times \frac{1 + 0}{2} = 0.5$$

que tiene un error de $(1.5 - 0.5)/1.5 = 66.7\%$.

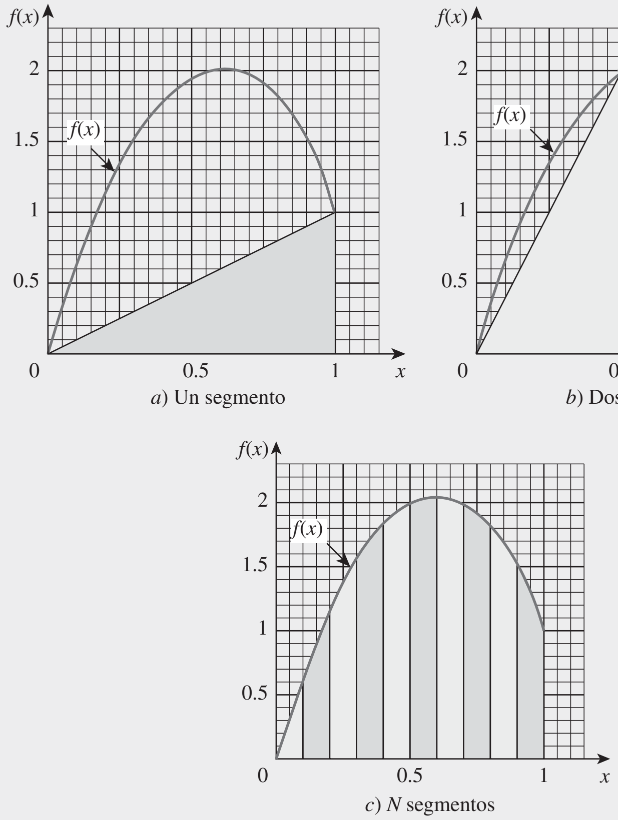


FIGURA 9-9
Representación gráfica de la integración numérica de la función en el ejemplo 9-2 con la regla trapezoidal, que se aplica dividiendo el intervalo de integración en *a*) un segmento, *b*) dos segmentos y *c*) N segmentos.

Para $N = 2$ nos aproximamos a toda el área bajo la curva como dos trapezoides con bases iguales, como se muestra en la figura 9-9*b*. Entonces $h = (1 - 0)/2 = 0.5$, y por las ecuaciones 9-5 y 9-9, obtenemos

$$I \cong I_0 + I_1 = h\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$$= 0.5 \times \left[\frac{f(0) + f(0.5)}{2} + \frac{f(0.5) + f(1)}{2}\right]$$

$$= 0.5 \times \left[\frac{0 + 2}{2} + \frac{2 + 1}{2}\right] = 1.25$$

que tiene un error de $(1.5 - 1.25)/1.5 = 16.7\%$. Por tanto, dividir el intervalo en dos segmentos redujo el error de 66.7% a 16.7%.

En la tabla 9-2 se muestran los resultados de otros valores de N. Observe que para un valor dado de N, los errores relativos correspondientes al método de franjas y a la regla trapezoidal son de magnitud comparable. Esto se debe a que las aproximaciones correspondientes a ambos métodos son del mismo orden. Los resultados del método de franjas serían considerablemente menos exactos si el valor promedio de la función en un segmento se tomara como el valor de la función en el punto terminal izquierdo en vez de tomarse en el punto medio del segmento. Para funciones lineales, ambos métodos dan el resultado exacto para $N = 1$ o mayor.

La figura 9-10 muestra un programa escrito en MATLAB para obtener estos resultados. El programa también puede usarse para otros problemas cambiando los límites de integración en el primer renglón, el valor exacto en el segundo y la definición de la función en el tercero.

TABLA 9-2

Valores de la integral $\int_0^1 (7x - 6x^2)\,dx$ obtenidos mediante la regla trapezoidal, y el error correspondiente a diferentes números de segmentos

Número de segmentos	Regla trapezoidal	Valor exacto	Error relativo
1	0.500000	1.5000	66.67%
2	1.250000	1.5000	16.67%
3	1.388889	1.5000	7.41%
4	1.437500	1.5000	4.16%
5	1.460000	1.5000	2.67%
10	1.490000	1.5000	0.67%
20	1.497500	1.5000	0.17%
30	1.498889	1.5000	0.07%
40	1.499375	1.5000	0.04%
50	1.499600	1.5000	0.03%
100	1.499900	1.5000	0.01%
200	1.499976	1.5000	0.00%

```
lower = 0; upper = 1;
exact = 1.5;  m = 1;
f = @(x)7*x-6*x^2;
for nstrip = [1,2,3,4,5,10:10:50,100,200]
   h = (upper-lower)/nstrip;
   x = lower; value = 0;
   for n = 1: nstrip
      value = value+h*(f(x)+f(x+h))/2;
      x = x+h;
      error(m,:) = [nstrip,value,100*abs(value-exact)/exact];
   end
   m = m+1;
end
error
```

FIGURA 9-10
Programa de MATLAB para la regla trapezoidal.

Regla de Simpson

En las explicaciones anteriores quedó claro que una manera de mejorar la exactitud de la integración numérica es usar un mayor número de segmentos; otra es usar una mejor aproximación en cada segmento. Por ejemplo, suponiendo que el valor de la función varía linealmente dentro de cada segmento, el método trapezoidal se aproxima a la función de mejor manera que suponiéndolo constante en el valor de la función en el punto terminal izquierdo, como se hace en el método de las franjas rectangulares.

Ahora damos un paso más y nos aproximamos a la función dentro de cada segmento mediante un polinomio de segundo grado en vez de uno de primer grado (una línea recta) o uno de grado cero (una constante). El método de integración numérica que se basa en este principio se llama **regla de Simpson de 1/3**, o simplemente **regla de Simpson**.

El desarrollo de la formulación correspondiente a la regla de Simpson es más complicado y, por tanto, presentamos sólo los resultados. Nuevamente, consideramos una función $f(x)$ que se va a integrar entre los límites a y b. Ahora dividimos este intervalo en N segmentos de anchuras iguales, y representamos el valor de x en cualquier punto n como x_n.

Para $N = 1$ (un segmento que cubre todo el intervalo) la regla de Simpson se expresa como

$$I \cong \frac{b-a}{3}\left[\frac{f(x_0)}{2} + 2f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \frac{f(x_1)}{2}\right] \quad \textbf{(9-11)}$$

como se muestra en la figura 9-11. Observe que la altura promedio del segmento en esta ocasión se determina sumando la mitad de los valores de la función en los puntos terminales al doble de su valor en el punto medio, y dividiendo la suma entre 3. El nombre de la regla de 1/3 de Simpson proviene del factor 1/3 en la expresión.

El área de un segmento general entre los puntos x_n y x_{n+1} puede determinarse como

$$I_n \cong \frac{x_{n+1}-x_n}{6}\left[f(x_n) + 4f\left(\frac{x_{n+1}+x_n}{2}\right) + f(x_{n+1})\right],\ n = 0, 1, \ldots, N-1 \quad \textbf{(9-12)}$$

donde $x_0 = a$ y $x_N = b$. Entonces el valor de la integral I entre los límites a y b puede determinarse por la ecuación 9-5 sumando las áreas de los segmentos.

Si damos otro paso más y nos aproximamos a la función dentro de cada segmento mediante un polinomio de *tercer* grado obtendremos expresiones similares pero más complicadas que incluirán el factor 3/8. El método de integración numérica que se basa en este principio se llama **regla de Simpson de 3/8**. Usualmente se prefiere la regla de Simpson de 1/3, ya que la de 3/8 no ofrece suficiente mejora en la exactitud con respecto a la de 1/3 para justificar la complejidad adicional.

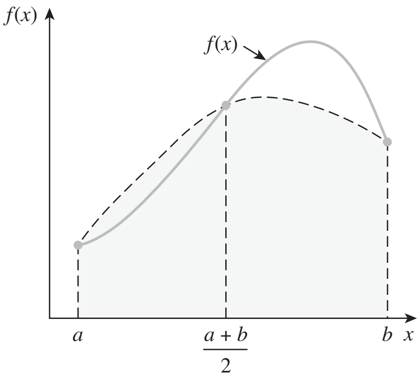


FIGURA 9-11
Regla de Simpson con un segmento (el caso más simple).

EJEMPLO 9-3 Regla de Simpson

Usando la regla de Simpson, evalúe la integral

$$I = \int_0^1 (7x - 6x^2)\,dx$$

y compare su resultado al valor exacto de $I = 1.5$. Repita el cálculo para diferentes números de segmentos de anchuras iguales.

Solución En este caso tenemos $f(x) = 7x - 6x^2$, $a = x_0 = 0$ y $b = x_N = 1$. Para $N = 1$ usamos la ecuación 9-11, que es la aproximación de menor orden de la regla de Simpson. Obtenemos

$$I \cong \frac{b-a}{3}\left[\frac{f(x_0)}{2} + 2f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \frac{f(x_1)}{2}\right] = \frac{1-0}{3}\left[\frac{f(0)}{2} + 2f(0.5) + \frac{f(1)}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{0}{2} + 2(2) + \frac{1}{2}\right] = 1.5$$

que es idéntico al resultado exacto. Esto es bastante impresionante pero no sorprende, ya que $f(x)$ en este caso es un polinomio de segundo grado. La regla de Simpson da una aproximación exacta para polinomios de segundo grado.

Seguiríamos obteniendo el mismo resultado si repitiéramos los cálculos dividiendo el intervalo en dos o más segmentos. No mostramos los resultados porque, sin que importe qué valor de N se use, el resultado será exacto. La figura 9-12 muestra un programa escrito en MATLAB que se usa para obtener estos resultados. El programa también puede emplearse para otros problemas cambiando los límites de integración (las variables `lower` y `upper`), el valor de `exact` y la definición de la función en el tercer renglón.

```
lower = 0; upper = 1;
exact = 1.5;m = 1;
f = @(x)7*x-6*x^2;
for nstrip = [1,2,3,4,5,10:10:50,100,200]
   h = (upper-lower)\nstrip;
   x = lower; value = 0;
   for n = 1; nstrip
      value = value+h*(f(x)/2+2*f(x+h/2)+f(x+h)/2)/3;
      x = x+h;
      error(m, :) = [nstrip,value,100*abs(value-exact)/exact];
   end
   m = m+1;
end
error
```

FIGURA 9-12
Programa de MATLAB para la regla de Simpson.

La regla de Simpson es un poco más complicada que la regla trapezoidal, pero también es mucho más exacta. Por tanto, en la práctica se usa comúnmente para obtener resultados exactos con relativamente pocos cálculos.

En la práctica, como no conoceremos el resultado exacto, no podremos evaluar con precisión el error correspondiente a la integración numérica. Por tanto, es aconsejable usar un programa general que siga dividiendo automáticamente el intervalo en segmentos más pequeños hasta que el seguir haciéndolo produzca un cambio más pequeño que un valor específico en la respuesta final. Una vez que se satisfaga el criterio de error y la computadora devuelva la respuesta podemos considerar esto como indicación de que nuestro resultado es suficientemente cercano al exacto.

Se recuerda al lector que hay métodos de integración numérica más sofisticados (llamados *adaptables*, como la *integración de Romberg* y la *cuadratura* de Gauss) que utilizan segmentos de tamaño variable de una manera compleja pero ingeniosa. Es posible obtener resultados muy exactos mediante estos métodos sin aumentar significativamente la cantidad de cálculos. Sin embargo, los métodos simples aquí tratados son adecuados para muchas aplicaciones.

Repaso de la sección

Los problemas marcados con una "C" son conceptuales para discusión

9-1C ¿En qué se distingue la regla trapezoidal de la regla de Simpson para integración numérica? ¿Cuál de ambos métodos es más exacto?

9-2C ¿Cómo podemos mejorar la exactitud de los resultados obtenidos por integración numérica?

9-3 Evalúe la siguiente integral usando una calculadora dividiendo el intervalo de integración en *a*) un segmento y *b*) dos segmentos usando los métodos indicados. También realice analíticamente la integración y determine el error relativo de los resultados obtenidos por integración numérica.

$\int_0^2 (x - 1)\,dx$ Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal

(*Respuesta:* la integral es exactamente cero; para ambos métodos, el error relativo es 0% tanto para uno como para dos segmentos.)

9-2 ▪ SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

La mayoría de las ecuaciones diferenciales no lineales, o con coeficientes variables, que se encuentran en la práctica no tienen solución analítica de forma cerrada, por lo cual es necesario encontrar una solución aproximada usando uno de los diversos métodos numéricos disponibles. Dado que cualquier ecuación diferencial de orden n puede expresarse como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden, en este capítulo nos concentraremos en la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{9-13}$$

con

$$y(x_0) = y_0 \tag{9-14}$$

En todas las explicaciones, supondremos que la función f y su derivada parcial $\partial f/\partial y$ son continuas en una región que incluye el punto (x_0, y_0), de modo que el problema de valor inicial tiene una solución única en la región que interesa.

Observe que y_0 es la solución de la ecuación diferencial en el punto x_0, y nuestro objetivo es encontrar los valores de la función incógnita y en otros valores de x tomando (x_0, y_0) como punto de inicio (figura 9-13).

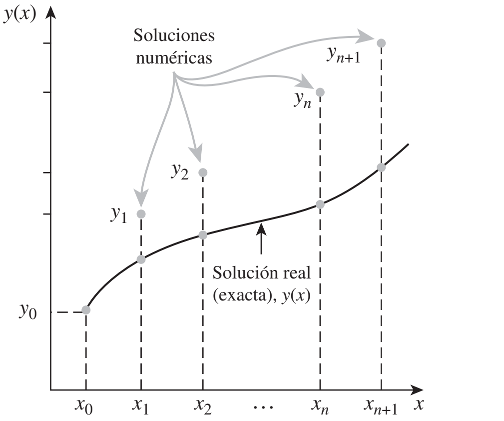


FIGURA 9-13
Los métodos numéricos dan la solución de un problema de valor inicial en distintos puntos usando la condición inicial $y(x_0) = y_0$ como punto inicial.

Ahora multiplicamos la ecuación 9-13 por dx e integramos ambos lados entre (x_0, y_0) y (x_1, y_1). Obtenemos

$$\int_{y_0}^{y_1} dy = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\,dx$$

o

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\,dx \tag{9-15}$$

donde y_1 es la solución de la ecuación diferencial en x_1. La distancia $h = x_1 - x_0$ sobre la cual pasamos a la solución en el nuevo punto x_1 se llama **tamaño de paso**. Por tanto, podemos determinar y_1 usando la ecuación 9-15, suponiendo por supuesto que podemos de alguna manera ejecutar la integral que incluye. Si, como caso especial, $f(x, y) = k =$ constante, esta integral puede ejecutarse fácilmente para obtener la solución (figura 9-14)

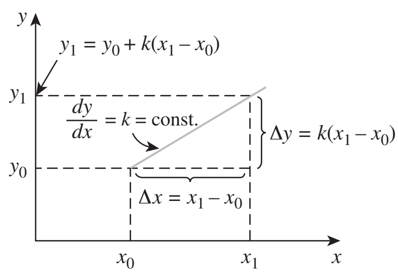


FIGURA 9-14
Representación gráfica de la solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y) = k$, donde k es una constante.

$$y_1 = y_0 + k(x_1 - x_0) \tag{9-16}$$

donde x_1 puede ser cualquier punto dentro del intervalo.

Con excepción de casos especiales como éste, la posibilidad de realizar analíticamente la integración en la ecuación 9-15 no es muy alta; por tanto, trataremos de obtener un resultado aproximado usando un método numérico. En general, la función f depende tanto de x como de y; sin embargo, algunas veces depende solo de x, lo cual es más fácil de manejar. Ahora presentaremos ambos casos.

Caso 1: $f = f(x)$

En este caso, la ecuación 9-15 se simplifica a

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \tag{9-17}$$

y la determinación de la solución y_1 en un punto x_1 se reduce a realizar una integración numérica usando cualquiera de los métodos expuestos en la sección ante-

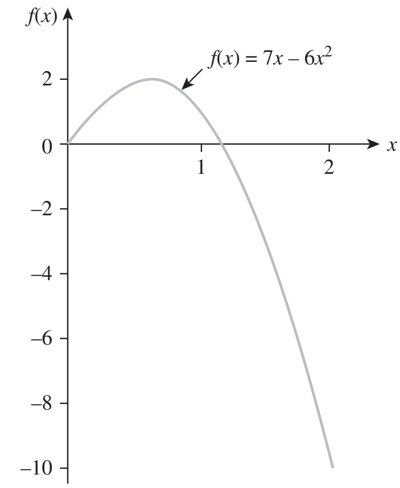


FIGURA 9-15
Función $f(x, y)$ del ejemplo 9-4.

rior. La ecuación 9-17 puede generalizarse para cualquier par de puntos n y $n + 1$ como

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx \tag{9-18}$$

Ahora ilustramos el uso de esta relación con un ejemplo.

EJEMPLO 9-4 Solución numérica de una ecuación diferencial

Usando la regla trapezoidal para integración numérica, determine la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x) = 7x - 6x^2, \quad y(0) = 1$$

en el intervalo 0 a 2 dividiéndolo en diez segmentos iguales. La función $f(x)$ se grafica en la figura 9-15.

Solución Resolver numéricamente una ecuación diferencial en un intervalo equivale a encontrar los valores de su solución en una cantidad suficiente de puntos en ese intervalo. Si dividimos el intervalo específico en diez partes iguales tendremos un tamaño de paso de $(b - a)/N = (2 - 0)/10 = 0.2$. Entonces, tenemos $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2, \ldots, x_{10} = 2$. La función se muestra en la figura 9-15. Observe que su pendiente disminuye rápidamente para $x > 1.2$.

Usando la ecuación 9-17 y la regla trapezoidal para la integración, la solución en $x_1 = 0.2$ se determina como

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \\
&\cong y_0 + (x_1 - x_0)\frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} \\
&= 1 + (0.2 - 0) \times \frac{(7 \times 0.2 - 6 \times 0.2^2) + (7 \times 0 - 6 \times 0^2)}{2} = 1.116
\end{aligned}$$

ya que $f(x) = 7x - 6x^2$. Este resultado difiere en 0.71% del valor exacto 1.124.

La solución en $x = 0.4$ puede determinarse de manera similar como

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \\
&\cong y_1 + (x_2 - x_1)\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \\
&= 1.116 + (0.4 - 0.2) \times \frac{(7 \times 0.4 - 6 \times 0.4^2) + (7 \times 0.2 - 6 \times 0.2^2)}{2} \\
&= 1.416
\end{aligned}$$

que difiere del valor exacto 1.432 en 1.12%.

Continuando de esta manera, en la tabla 9-3 se determina y muestra la solución en los ocho puntos restantes. Para comparar, los valores exactos obtenidos por la solución analítica

$$y(x) = 1 + 3.5x^2 - 2x^3$$

también se incluyen en la tabla. Podemos mejorar la exactitud dividiendo el intervalo en segmentos más pequeños o usando una técnica de integración numérica más exacta, como la regla de Simpson.

TABLA 9-3

Comparación de la solución numérica obtenida usando la regla trapezoidal con la solución exacta para $y' = 7x - 6x^2$, $y(0) = 1$

x	Regla trapezoidal	Valor exacto	Error relativo
0.0	1.000	1.000	0.00%
0.2	1.116	1.124	0.71%
0.4	1.416	1.432	1.12%
0.6	1.804	1.828	1.31%
0.8	2.184	2.216	1.44%
1.0	2.460	2.500	1.60%
1.2	2.536	2.584	1.86%
1.4	2.316	2.372	2.36%
1.6	1.704	1.768	3.62%
1.8	0.606	1.676	10.65%
2.0	−1.080	−1.000	8.00%

Caso 2: $f = f(x, y)$

Cuando la función f depende tanto de x como de y, las técnicas de integración numérica antes presentadas no funcionarán y necesitaremos usar un enfoque diferente. Observamos que la función $f(x, y)$ en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \text{pendiente} \tag{9-19}$$

representa la pendiente de la función solución y en cualquier punto (x, y). Los métodos numéricos que discutiremos en seguida se basan en suponer que esta pendiente permanece constante en algún valor para cada paso (figura 9-16). Entonces la solución en cualquier punto x_{n+1} puede expresarse en términos de la solución en el punto anterior x_n como (ver ecuación 9-16)

$$\text{Valor nuevo} = \text{valor anterior} + \text{pendiente} \times \text{tamaño de paso}$$

o

$$y_{n+1} = y_n + s_n h \tag{9-20}$$

donde el tamaño de paso es $h = x_{n+1} - x_n$. Los métodos numéricos se distinguen principalmente en la forma en que se estima la pendiente s_n. El **método de Euler**, llamado así en honor de L. Euler (1707-1783), es el método numérico más sencillo para resolver ecuaciones diferenciales; esta pendiente se toma como el valor de la función $f(x, y)$ en el inicio de cada paso. En el **método mejorado de Euler** se toma como el promedio aritmético de los valores de $f(x, y)$ en los puntos finales del paso. En los *métodos de Runge-Kutta* para órdenes superiores, la pendiente se determina con mayor precisión usando un procedimiento más complejo. En las siguientes secciones presentaremos estos métodos y mostraremos su uso.

Todos los métodos que acabamos de mencionar usan la solución en un solo punto para determinar la solución en el siguiente punto, y se llaman **métodos de un solo paso** o **métodos de inicio**. En contraste, los métodos que usan la solución en dos o más puntos anteriores para determinar la solución en el siguiente punto se llaman **métodos de paso múltiple** o **métodos continuos**. En realidad, los métodos de paso múltiple son híbridos, ya que dependen de un método de inicio que les dé los números mínimos de soluciones que necesitan para comenzar.

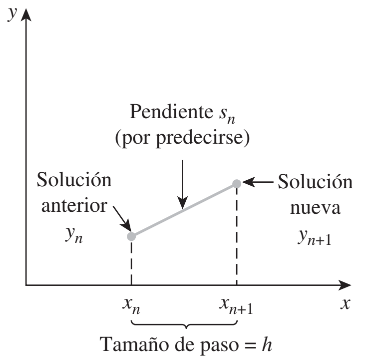


FIGURA 9-16
Los métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales se basan en predecir la pendiente promedio de la función solución durante cada paso y en seguida usarla para determinar la solución al final de cada paso.

Siempre debe recordar que los resultados obtenidos por cualquier método numérico son aproximaciones a los verdaderos valores de solución, y hay que tener cuidado en su interpretación. El error en los métodos numéricos lo provocan dos efectos: 1) el **error de truncamiento** o **discretización**, que se debe a las aproximaciones realizadas durante la formulación numérica del problema, y 2) el **error de redondeo**, que se debe a la conservación de un número limitado de dígitos durante los cálculos. Ambas causas se explican a detalle en la sección 9-4.

En todas las explicaciones en este capítulo usaremos el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 5y - 25x^2 + 2, \quad y(0) = 2 \qquad \textbf{(9-21)}$$

para ilustrar el uso de diferentes métodos numéricos y comparar su exactitud. Éste es un problema de valor inicial lineal de primer orden, y su solución analítica exacta puede determinarse como

$$y(x) = 2e^{5x} + 5x^2 + 2x \qquad \textbf{(9-22)}$$

El valor exacto de la solución y en cualquier punto x puede obtenerse sustituyendo el valor de x en la solución analítica. Los valores de solución obtenidos de esta manera son exactos, y pueden usarse como base de comparación. El error relativo (porcentual) en los resultados numéricos puede determinarse como

$$\text{Error relativo} = \left| \frac{y_{\text{exacto}} - y_{\text{numérico}}}{y_{\text{exacto}}} \right| \times 100(\%) \qquad \textbf{(9-23)}$$

donde $y_{\text{numérico}}$ es el valor aproximado obtenido mediante la solución numérica y y_{exacto} es el valor exacto obtenido mediante la solución analítica.

Repaso de la sección

9-4C Al explicar la solución numérica de ecuaciones diferenciales, ¿por qué nos enfocamos en las ecuaciones de primer orden?

9-5C ¿Podemos resolver numéricamente una ecuación si no se especifica ninguna condición inicial?

9-6 Usando una calculadora, determine la solución numérica del siguiente problema de valor inicial después de *a*) un paso y *b*) dos pasos, usando un tamaño de paso $h = 0.2$. Use los métodos indicados para integración numérica. También resuelva analíticamente el problema de valor inicial y determine el error relativo de los resultados numéricos:

$y' = x - 1$, $y(0) = 1$ — Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal

(*Respuesta:* la solución exacta es $y(x) = 0.5x^2 - x + 1$; para ambos métodos, el error relativo es 0% tanto para uno como dos pasos.)

9-3 ▪ MÉTODO DE EULER

Considere el problema de valor inicial de primer orden

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(9-24)}$$

cuya solución se determinará numéricamente en el intervalo de $x = a$ a $x = b$ usando un tamaño de paso constante (igual a los incrementos en x). Si el número de los pasos a usar es N, entonces el tamaño de paso h para este problema resulta $h = (b - a)/N$. Los valores de x en cualquier par de valores consecutivos están relacionados entre sí por

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1 \qquad \textbf{(9-25)}$$

Nuestro objetivo, como de costumbre, es determinar las soluciones aproximadas y_1, $y_2, \ldots, y_N$ en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_N$ usando la solución y_0 en x_0 como el punto inicial. Nuevamente, la cuestión principal es cómo determinar la solución y_{n+1} en el punto x_{n+1} cuando la solución y_n está disponible en el punto x_n.

El método de Euler se basa en el hecho de que la función $f(x, y)$ representa la pendiente de y (la tasa de cambio de y con respecto a x) en el punto (x, y), y supone que para pequeños cambios en x esta pendiente permanece constante en su valor inicial para cada paso. Por ejemplo, el valor de la pendiente en el punto inicial (x_0, y_0) es $f(x_0, y_0)$. Ahora se supone que y cambia con esta tasa constante al aumentar x de x_0 a $x_1 = x_0 + h$. Entonces el cambio en y es (figura 9-17)

$$\begin{aligned}\Delta y &= \text{pendiente} \times \Delta x \\ &= f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \\ &= f(x_0, y_0)h\end{aligned}$$

Por tanto, el valor de la función en $x_1 = x_0 + h$ bajo esta suposición resulta

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \tag{9-26}$$

que es la solución aproximada en x_1. La pendiente de la función solución en este punto es $f(x_1, y_1)$, que nuevamente su supone que permanece constante entre x_1 y $x_2 = x_1 + h$. La solución aproximada en x_2 se determina de manera similar como

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) \tag{9-27}$$

Generalizando, la solución aproximada en cualquier punto x_{n+1} es (figura 9-17)

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots} \tag{9-28}$$

que es la fórmula general del método de Euler.

La figura 9-18 muestra una interpretación gráfica del método de Euler. Observe que el término $hf(x_n, y_n)$ corresponde al área del rectángulo sombreado en el diagrama $y' - x$, y tiene el propósito de aproximarse a toda el área bajo la curva entre x_n y x_{n+1}. La diferencia entre ambas áreas es el error del método de Euler durante ese paso. Obviamente, cuanto menor sea el tamaño de paso, menor será el error.

Para $f = f(x)$, el método de Euler se vuelve análogo al método de franjas para integración numérica, salvo que el valor promedio de la función para un paso se toma aquí como el valor de la función en el punto de inicio, en vez de tomarse en el punto medio. Obviamente, podemos aumentar significativamente la exactitud si usamos el valor de la función f en el punto medio en vez del primer punto de cada paso. Ésta es la idea básica en el método de Euler modificado, que se explica más adelante en este capítulo.

El método de Euler es sencillo y muy fácil de usar, pero no es un método muy exacto. A menudo es necesario usar un tamaño de paso h demasiado pequeño para obtener una exactitud aceptable. Sin embargo, esto no es práctico para problemas que implican numerosos cálculos de este tipo, ya que tamaños bastante pequeños de paso pueden hacer que el error de redondeo introducido en cada paso se acumule (el error de redondeo se explica más adelante en este capítulo). El tiempo de computación también aumenta con el número de pasos, pero a menudo esto ya no es tan importante debido a la alta velocidad de la mayoría de computadoras. Sin embargo, si el programa debe correrse en un microprocesador lento, como los que se usan en los microcontroladores incrustados, el tiempo de computación puede ser un punto importante.

Sin embargo, es posible usar el método de Euler para obtener resultados preliminares de primera aproximación con esfuerzo mínimo, ya que es sumamente fácil de programar. Luego puede utilizarse un método más exacto para refinar los resultados, si se justifica. Ahora ilustramos el uso del método de Euler mediante un ejemplo.

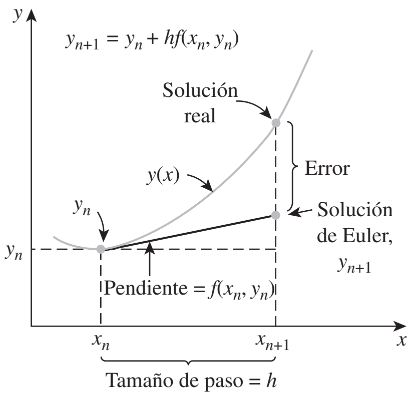


FIGURA 9-17
Representación gráfica del método de Euler en el diagrama $y - x$.

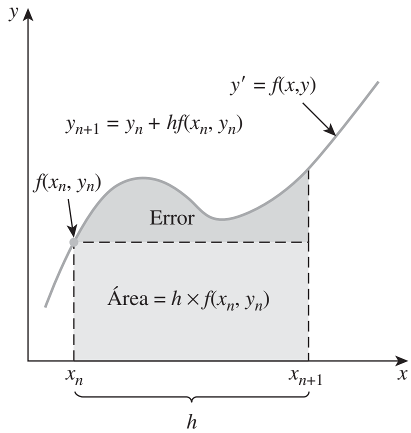


FIGURA 9-18
Representación gráfica del método de Euler en el diagrama $y' - x$.

EJEMPLO 9-5 Método de Euler

Usando el método de Euler con un tamaño de paso $h = 0.1$, determine la solución del problema de valor inicial

$$y' = 5y - 25x^2 + 2, \quad y(0) = 2$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Compare los resultados con los valores exactos de solución.

Solución Tenemos $f(x, y) = 5y - 25x^2 + 2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ y $h = 0.1$. Entonces las soluciones en los puntos $x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, ..., x_{10} = 1$ se obtienen aplicando repetidamente la fórmula de Euler (ecuación 9-28)

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ &= 2 + 0.1f(0, 2) \\ &= 2 + 0.1 \times (5 \times 2 - 25 \times 0^2 + 2) \\ &= 3.2 \end{aligned}$$

Entonces, el método de Euler predice que la solución en $x_1 = 0.1$ será $y_1 = 3.2$. La solución exacta en este punto se determina por la ecuación 9-22 como 3.54744. Por tanto, el valor obtenido por el método de Euler tiene un error de $100 \times (3.54744 - 3.2)/3.54744 = 9.79\%$. Es importante notar que este valor erróneo, no el exacto, se usará como punto de inicio para el siguiente paso, y el error se seguirá propagando al aumentar el número de pasos. Por tanto, en general, el error porcentual aumenta en los pasos posteriores.

Repitiendo el cálculo para $n = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\ &= 3.2 + 0.1f(0.1, 3.2) \\ &= 3.2 + 0.1 \times (5 \times 3.2 - 25 \times 0.1^2 + 2) \\ &= 4.975 \end{aligned}$$

que difiere del valor exacto 6.03656 en 17.59%.

```
h = 0.1; nstep = 10;
f = @(x,y) (5*y-25*x^2+2);
x = 0; y = 2;
for n = 1:nstep
    y = y + h*f(x,y);
    x = n*h
    y
    exact = 2*exp(5*x)+5*x^2+2*x
    error = 100*abs(y-exact)/exact
end
```

FIGURA 9-19
Programa de MATLAB para el método de Euler.

Los cálculos para $n = 2, 3, ..., 9$ también se realizan usando el sencillo programa de MATLAB que se muestra en la figura 9-19; los resultados se muestran en la tabla 9-4 junto con los resultados exactos para comparación. Observe que el error llega a 61.60%.

La tabla 9-4 también presenta resultados obtenidos usando diferentes tamaños de paso en intervalos de 0.1. Observe que la solución Euler se aproxima a la solución exacta al disminuir el tamaño de paso; pero el número de cálculos aumenta con tamaños de paso decrecientes. Por ejemplo, para obtener los resultados con $h = 0.01$ se requirió un tiempo de computadora 10 veces mayor que el necesario para obtener los resultados con $h = 0.1$. Por tanto, cualquier mejora en la exactitud por disminución del tamaño de paso debe ponderarse contra el aumento en error de redondeo y en el tiempo de computación.

TABLA 9-4

Comparación de resultados obtenidos usando el método de Euler con cinco tamaños de paso distintos, con los resultados exactos para $y' = 5y - 25x^2 + 2$, $y(0) = 2$

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.01$	$h = 0.001$	$h = 0.0001$	Exacto
0.0	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000
0.1	3.20000	3.34688	3.50150	3.54269	3.54696	3.54744
0.2	4.97500	5.41074	5.89006	6.02132	6.03503	6.03656
0.3	7.56250	8.53866	9.66066	9.97647	10.00966	10.01138
0.4	11.31875	13.27291	15.61958	16.29829	16.37008	16.37810
0.5	16.77813	20.46079	25.08012	26.45257	26.59862	26.61499
0.6	24.74219	31.42623	40.18158	42.85298	43.13902	43.17107
0.7	36.41328	48.23786	64.40859	69.47398	70.01976	70.08091
0.8	53.59492	74.12791	103.4373	112.8603	113.8818	113.9963
0.9	78.99239	114.1467	166.5134	183.7888	185.6730	185.8842
1.0	116.6636	176.1855	268.6975	300.0054	303.4409	303.8263

Repaso de la sección

9-7C ¿Por qué en la práctica no se usa extensamente el método de Euler a pesar de su simplicidad?

9-8 Usando una calculadora, determine la solución numérica del siguiente problema de valor inicial después de *a*) un paso y *b*) dos pasos, con un tamaño de paso $h = 0.2$, usando el método de Euler. También resuelva analíticamente el problema de valor inicial y determine el error relativo de los resultados numéricos:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0$$

(*Respuesta:* la solución exacta es $y(x) = e^x - x - 1$; el método de Euler tiene un error relativo de 100% después de un paso, y de 56.4% después de dos pasos.)

9-4 ▪ ERRORES EN MÉTODOS NUMÉRICOS

Una comparación entre los resultados numéricos de la tabla 9-4 y los resultados exactos listados en la última columna confirma lo que decimos en el sentido de que los resultados obtenidos mediante un método numérico son aproximados y pueden (o no) ser suficientemente cercanos a los valores de solución exactos (verdaderos). La diferencia entre una solución numérica y la exacta es el *error* propio de la solución numérica, que se debe principalmente a dos causas:

1. El **error de discretización** (también llamado *error de truncamiento* o *error de formulación*) tiene su origen en las aproximaciones que se usan en la formulación del método numérico.
2. El **error de redondeo** se debe a que la computadora representa un valor con un número limitado de dígitos significativos y redondea continuamente (o recorta) los dígitos que no puede retener.

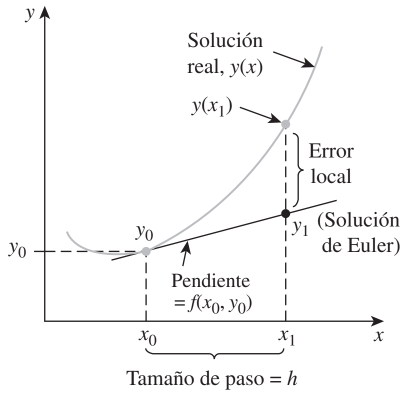


FIGURA 9-20
Error de discretización local del método de Euler en el paso 1.

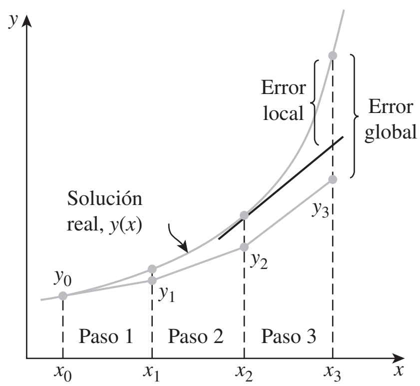


FIGURA 9-21
Errores de discretización local y global del método de Euler en el paso 3.

Error de discretización

El error de discretización inherente al método de Euler se origina al reemplazar en cada paso la función de solución real por un segmento de línea recta. Se supone que la pendiente de este segmento de línea para cualquier paso es el valor de la pendiente en el inicio de dicho paso, como se ilustra en la figura 9-20.

Observe que ambas soluciones coinciden al principio del paso, pero la solución numérica se desvía de la solución exacta al aumentar x. La diferencia entre ambas soluciones se debe solo a la aproximación en este paso, y se llama **error de discretización local**. Se esperaría que la situación empeorara con cada paso porque el segundo paso usa el resultado erróneo del primero como punto inicial, y además agrega un segundo error de discretización local, como se muestra en la figura 9-21. La acumulación de los errores de discretización locales continúa al aumentar el número de pasos; el error total de discretización en cada paso se llama **error de discretización global** o **acumulado**. Observe que los errores de discretización locales y globales son idénticos para el primer paso. El error de discretización global usualmente aumenta al aumentar el número de pasos, como fue el caso en el ejemplo 9-5. Sin embargo, puede suceder lo opuesto cuando la función $f(x, y)$ cambia frecuentemente de dirección, dando lugar a errores de discretización de signos opuestos que tienden a cancelarse mutuamente.

Para tener una idea acerca de la magnitud del error de discretización local, considere la expansión de serie de Taylor de la función de solución alrededor del punto x_n,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_n) + \cdots \tag{9-29}$$

donde $y(x_n)$ es la solución real (exacta) en x_n. La solución de Euler en el punto x_{n+1} se expresó como (ver ecuación 9-28)

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Esta relación se parece a la expansión de serie de Taylor terminada después de los primeros dos términos y con las soluciones aproximadas y_{n+1} y y_n en vez de los valores exactos $y(x_{n+1})$ y $y(x_n)$. En general, la solución numérica y_n y la solución exacta $y(x_n)$ no serán iguales; sin embargo, supondremos que ambas son idénticas de modo que podamos estimar el error de discretización que ocurre durante un solo paso. Dado que $f(x_n, y_n) = y_n'$ y restando la fórmula de Euler de la expansión de serie de Taylor (ecuación 9-29) nos da la siguiente importante relación para el error de discretización local:

$$\begin{aligned}\text{Error} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_n) + \cdots\end{aligned} \tag{9-30}$$

Para un tamaño de paso h suficientemente pequeño, los términos decrecen rápidamente al aumentar n, y sus contribuciones disminuyen cada vez más. Por tanto, el primer término de la ecuación 9-30 es el más significativo, y representa el error con bastante aproximación. Por tanto,

$$\text{Error local} \cong h^2\frac{y''(x_n)}{2} \leq h^2K \tag{9-31}$$

donde K es una constante cuyo valor es la mitad del valor máximo absoluto de la segunda derivada de la función solución en el intervalo que interesa.

Al parecer podemos determinar el error en cada paso usando la ecuación 9-31, pero no es práctico hacerlo porque no es fácil determinar el valor de la constante K. Sin embargo, K es independiente del tamaño de paso h, y entonces concluimos que *el error de discretización local en el método de Euler es proporcional al cuadrado del tamaño de paso*. Por tanto, reducir a la mitad el tamaño de paso, de h a $h/2$, disminuirá el error de discretización local a un cuarto de lo que era antes.

El error de discretización local es el fallo de formulación asociado con un solo paso, y da una idea acerca de la exactitud del método que se usa; sin embargo, los resultados de la solución obtenidos en cada paso salvo el primero incluyen el error *acumulado* hasta ese punto, y el error local por sí solo no tiene mucha importancia. Lo que realmente necesitamos saber es el error de discretización *global*.

Para obtener un estimado del error global, considere un problema de valor inicial que se debe resolver en el intervalo $a \leq x \leq b$ dividiéndolo en N pasos de tamaño de paso $h = (b - a)/N$. En el peor de los casos, todos los errores de discretización serán positivos (o negativos) en el valor máximo de Kh^2. En este caso, el error máximo acumulado será $2Kh^2$ después del segundo paso, $3Kh^2$ después del tercer paso y NKh^2 después del paso N. Dado que $h = (b - a)/N$ y $N = (b - a)/h$, el error de discretización global puede expresarse como

$$\text{Error global} \leq NKh^2 = \frac{b - a}{h}Kh^2 = (b - a)Kh \qquad \textbf{(9-32)}$$

donde $b - a$ (y, por tanto, $(b - a)K$) es una constante cuyo valor es independiente del tamaño de paso h. Por tanto, concluimos que *el error de discretización global del método de Euler es proporcional al tamaño de paso*. En otras palabras, es proporcional a la primera potencia de h y, por tanto, se dice que el método de Euler es una aproximación de *primer orden*. Así que podemos reducir el error global máximo a la mitad de lo que era simplemente reduciendo a la mitad el tamaño de paso. En otras palabras, podemos duplicar la exactitud de los resultados obtenidos por el método de Euler reduciendo a la mitad el tamaño de paso. De igual manera, reducir el tamaño de paso por un factor de 10 recortará el error máximo a un décimo de lo que era antes (figura 9-22).

MÉTODO DE EULER		
Tamaño de paso	Error local	Error global
h	k_1h^2	k_2h
$\frac{1}{2}h$	$\frac{1}{4}k_1h^2$	$\frac{1}{2}k_2h$
$\frac{1}{10}h$	$\frac{1}{100}k_1h^2$	$\frac{1}{10}k_2h$

FIGURA 9-22
El error de discretización local y el global del método de Euler son proporcionales a h^2 y a h, para varios tamaños de paso distintos.

La línea de razonamiento que acabamos de usar para relacionar el error global con el error local es aplicable a cualquier método numérico, y puede expresarse así:

> *Si el error de discretización local en un método numérico es proporcional a h^k, entonces el error de discretización global o acumulado es proporcional a h^{k-1}.*

Por estas explicaciones queda claro que el error de discretización puede reducirse usando un algoritmo más preciso o disminuyendo el tamaño de paso. En la tabla 9-5 se ilustra la disminución del error al disminuir el tamaño de paso, comparando la solución de Euler del problema del ejemplo 9-4 en $x = 1$ con la solución exacta en ese punto. Observe que incluso para este pequeño intervalo de 0 a 1 se necesita un gran número de pasos para obtener resultados suficientemente exactos.

Error de redondeo

Si tuviéramos una computadora que pudiera retener un número infinito de dígitos para todos los números, la diferencia entre la solución exacta y la solución aproximada (numérica) en cualquier punto se debería por completo al error de discretización. Sin embargo, sabemos que toda computadora (o calculadora) representa cantidades usando un número finito de dígitos significativos; dicho número depende de la computadora y del programa. El uso de siete dígitos se conoce como *precisión sencilla.* Sin embargo, el usuario puede realizar los cálculos usando 15 dígitos significativos para las cantidades, si así lo desea; esto se llama *precisión doble*. Por supuesto, realizar cálculos con precisión doble necesitará más memoria de computadora y mayor tiempo de ejecución.

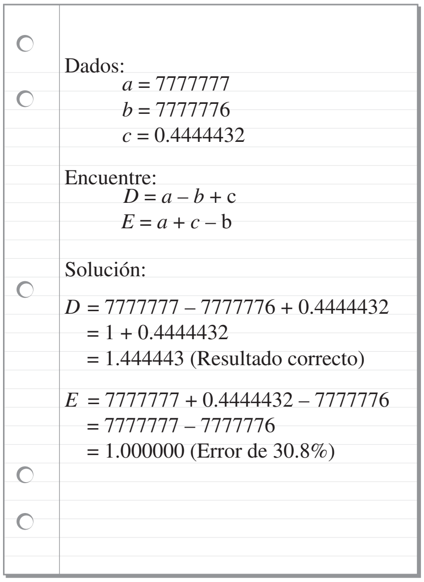


FIGURA 9-23
Una sola operación aritmética realizada con una computadora con precisión sencilla (siete dígitos significativos) da por resultado un error de 30.8% cuando se cambia el orden de la operación.

TABLA 9-5

Comparación de la solución de Euler en $x = 1$ con la solución exacta para $y' = 5y - 25x^2 + 2$, $y(0) = 2$, para varios tamaños de paso diferentes

Número de pasos N	Tamaño de paso $h = 1/N$	Solución de Euler en $x = 1$	Error relativo
1	1.0	14.000	95.39%
2	0.5	25.8750	91.48%
5	0.2	64.8000	78.67%
10	0.1	116.6636	61.60%
20	0.05	176.1855	42.01%
50	0.02	239.4539	21.19%
100	0.01	268.6975	11.56%
200	0.005	285.4348	6.05%
1000	0.001	300.0054	1.26%
10 000	0.0001	303.4409	0.13%
100 000	0.00001	303.7873	0.01%

Solución exacta: 303.8 263

En el modo de precisión sencilla con siete dígitos significativos, una computadora registrará el número 44444.666666 como 44444.67 o 44444.66, dependiendo del método de redondeo que use la computadora. En el primer caso, se dice que los dígitos en exceso se redondean hasta el entero más cercano, mientras que en el segundo caso, se dice que se recortan. Por tanto, los números $a = 44444.12345$ y $b = 44444.12032$ son equivalentes para una computadora que realiza los cálculos usando siete dígitos significativos. Dicha computadora dará $a - b = 0$, en vez del verdadero valor de 0.00313.

El fallo debido a la retención de un número limitado de dígitos durante los cálculos se llama **error de redondeo**, el cual es de naturaleza aleatoria, y no hay manera fácil y sistemática de predecirlo. Depende del número de cálculos, el método de redondeo, el tipo de computadora e incluso la secuencia de los cálculos.

En álgebra, usted aprendió que $a + b + c = a + c + b$, lo cual parece bastante razonable. Sin embargo, no es necesariamente cierto para cálculos realizados con una computadora, como se demuestra en la figura 9-23. Observe que cambiar la secuencia de los cálculos da como resultado un error de 30.08% solo en dos operaciones. Considerando que cualquier problema significativo incluye miles o incluso millones de tales operaciones realizadas en secuencia, notamos que el error acumulado de redondeo tiene el potencial de causar error grave sin dar ninguna señal de advertencia. Los programadores experimentados son muy conscientes de este peligro, y estructuran sus programas para evitar cualquier acumulación del error de redondeo. Por ejemplo, es mucho más seguro multiplicar un número por 10 que sumarlo diez veces. También es mucho más seguro comenzar cualquier proceso de suma con los números más pequeños y continuar con los mayores. Esta regla es de especial importancia cuando se evalúan series con un gran número de términos con signos alternos.

El error de redondeo es proporcional a la cantidad de cálculos realizados durante la solución. En el método de Euler, el número de cálculos aumenta al disminuir el tamaño de paso h. Reducir a la mitad el tamaño de paso, por ejemplo, duplicará el número de cálculos y, por tanto, el error acumulado de redondeo.

Control del error

El error total en cualquier error obtenido por un método numérico es la suma de los errores de discretización, el cual se reduce al disminuir el tamaño de paso h, y el error de redondeo, el cual aumenta al disminuir el tamaño de paso, como se muestra en la figura 9-24. Por tanto, disminuir demasiado el tamaño de paso para obtener resultados más exactos puede ser contraproducente y dar resultados menos exactos debido a un aumento mayor en el error de redondeo. Debemos tener cuidado de no permitir que el error de redondeo se salga de control, evitando un gran número de computaciones con números muy pequeños.

En la práctica no conoceremos la solución exacta del problema y, por tanto, no podremos determinar la magnitud del error correspondiente al método numérico. Saber que el error de discretización global es igual a una constante multiplicada por el tamaño de paso tampoco es de mucha ayuda, ya que no hay manera sencilla de determinar el valor de la constante. Además, el error de discretización global por sí mismo es irrelevante sin un estimado verdadero del error de redondeo; por tanto, recomendamos los siguientes procedimientos practicables para evaluar la exactitud de los resultados obtenidos por un método numérico:

Paso 1. Comience el cálculo con un tamaño de paso razonable h basado en la experiencia. Luego repita los cálculos usando un tamaño de paso de $h/2$. Si los resultados obtenidos al reducir a la mitad el tamaño de paso no son muy diferentes de los resultados obtenidos con el tamaño completo de paso, concluimos que el error de discretización está en un nivel aceptable. Sin embargo, si la diferencia es mayor que la aceptable, entonces tenemos que repetir los cálculos usando un tamaño de paso $h/4$ o menor. Continuamos de esta manera hasta que reducir a la mitad el tamaño de paso no produzca ningún cambio apreciable en los resultados, lo cual indica que el error de discretización se redujo a un nivel aceptable.

Paso 2. Repita los cálculos usando doble precisión, manteniendo constante el tamaño del paso h. Si los cambios no son significativos, concluimos que el error de redondeo está en un nivel aceptable. Sin embargo, si los cambios son demasiado grandes para aceptarlos, podemos probar reduciendo el número total de cálculos aumentando el tamaño de paso. Si esto da errores de discretización inaceptables, tal vez no tengamos otra alternativa que cambiar a un método más exacto que dé resultados aceptables con menos cálculos.

Estas explicaciones sobre el error correspondiente a las soluciones numéricas se presentaron usando como ejemplo el método de Euler, pero también son aplicables a otros métodos numéricos que se presentarán.

Finalmente, siempre debe tenerse presente que los resultados obtenidos por cualquier método numérico tal vez no reflejen ningún punto confuso en ciertos problemas de valor inicial. En realidad, los resultados que parecen bastante razonables pueden estar en grave error. Considere, por ejemplo, el problema de valor inicial

$$(x - 0.79)y' + y = 1,\ y(0) = 2 \tag{9-33}$$

La solución de este problema de valor inicial, obtenida por el método de Euler usando un tamaño de paso de $h = 0.1$, parece bastante razonable (tabla 9-6), y no da pistas de que haya fallas. Cuando repetimos el cálculo con $h = 0.05$, vemos un cambio inusual alrededor del punto $x = 0.8$, lo cual nos hace sospechar. Finalmente, la solución explota en esa región cuando usamos un tamaño de paso todavía menor. Esto no sorprende, ya que la solución exacta de este problema es

$$y = \frac{0.79}{|x - 0.79|} + 1 \tag{9-34}$$

que tiene una singularidad en $x = 0.79$. Es decir, la solución se vuelve infinito en este punto, como se muestra en la figura 9-25. En este caso, podríamos predecir que habrá problemas en $x = 0.79$ observando la ecuación diferencial, ya que

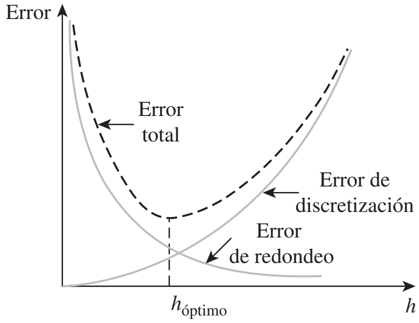


FIGURA 9-24
Al disminuir el tamaño de paso, disminuye el error de discretización y se incrementa el error de redondeo.

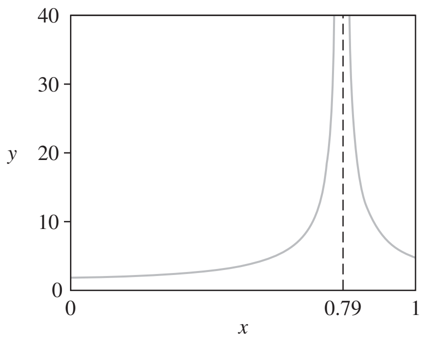


FIGURA 9-25
Gráfica de la solución real de $(x - 0.79)y' + y = 1$, $y(0) = 2$.

TABLA 9-6

Comparación de la solución de Euler $(x - 0.79)y' + y = 1$, $y(0) = 2$ con diferentes tamaños de paso, con la solución exacta (el método numérico puede saltarse las discontinuidades en la función de solución sin dar ninguna advertencia)

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.01$	Exacto
0.0	2.000	2.000	2.000	2.000
0.1	2.127	2.135	2.143	2.145
0.2	2.290	2.313	2.333	2.339
0.3	2.508	2.556	2.600	2.612
0.4	2.816	2.909	3.000	3.026
0.5	3.282	3.471	3.667	3.724
0.6	4.069	4.500	5.000	5.158
0.7	5.684	7.000	9.000	9.778
0.8	10.889	22.000	1.3×10^7	80.000
0.9	−88.000	−13.000	−8.200	8.182
1.0	−7.091	−4.250	−3.600	4.762

la función $y' = f(x, y) = (1 - y)/(x - 0.79)$ tiene una discontinuidad en ese punto. Sin embargo, la apariencia de algunas ecuaciones diferenciales es bastante engañosa y no da algún indicio de problemas. Ésta es otra buena razón para repetir siempre los cálculos al menos dos veces con diferentes tamaños de paso antes de aceptarlos como la solución del problema.

Observe que la solución dada por la ecuación 9-34 es única en el intervalo $0 \leq x < 0.79$, pero no lo es necesariamente para $x > 0.79$. Los valores dados en la tabla 9-6 para $x > 0.79$ corresponden a una condición inicial $y(0) > 0.79$.

Repaso de la sección

9-9C ¿Por qué los resultados obtenidos usando un método numérico difieren de los resultados obtenidos analíticamente? ¿Cuáles son las causas de esta diferencia?

9-10 Usando una calculadora, determine el error de discretización local y global en la solución numérica del siguiente problema de valor inicial después de *a*) un paso y *b*) dos pasos con un tamaño de paso de $h = 0.2$, usando el método de Euler:

$$y' = 1 - 2x - 3y, \quad y(0) = 0$$

(*Respuesta:* la solución exacta es $y(x) = -(5/9)e^{-3x} - (2/3)x + 5/9$. Después de un paso, ambos errores son idénticos, e iguales a -70.46%. Después de dos pasos, el error local es -37% y el error global es -64%.)

9-5 ▪ MÉTODO DE EULER MEJORADO

Reconsidere el problema de valor inicial de primer orden

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{9-35}$$

que resolvimos antes por el método de Euler usando un tamaño de paso h. Es fácil entender y programar el método de Euler, pero necesita usar tamaños de paso bastante pequeños para obtener resultados exactos. Por tanto, en la práctica no se usa muy a menudo, especialmente para problemas que van a resolverse en un intervalo grande.

Disminuir el tamaño de paso es ciertamente una manera de aumentar la exactitud de un método numérico, pero la forma preferida es usar una mejor aproximación.

Los métodos numéricos con formulaciones más exactas necesitan más cálculos en cada paso, pero dan resultados muy exactos, incluso con tamaños de paso relativamente grandes y, por tanto, menor número total de cálculos.

Todos los métodos de un solo paso se basan en la misma fórmula general

$$y_{n+1} = y_n + h \times \text{pendiente} \tag{9-36}$$

Estos métodos se distinguen solo en la forma de evaluar la pendiente. El método de Euler supone que el valor de la pendiente en el punto terminal izquierdo de cada intervalo se aplica a través de todo el intervalo. Esto sugiere de inmediato que la exactitud de los resultados puede mejorarse considerablemente si evaluamos la pendiente en ambos puntos terminales del intervalo y usamos su promedio como la pendiente media para ese intervalo. El método que se basa en este principio se llama **método de Euler mejorado** o **método de Heun**, y se expresa como (figura 9-26)

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})}{2} \tag{9-37a}$$

donde

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{9-37b}$$

Observe que no podemos determinar el valor exacto de la función $f(x, y)$ en el punto x_{n+1}, ya que no conocemos la solución y_{n+1} en ese punto. Por tanto, primero usamos el método de Euler para predecir el valor aproximado de y_{n+1}, y luego representamos este valor como $\tilde{y}_{n+1}$ en la fórmula de Euler mejorada para obtener un mejor valor para y_{n+1}. Por tanto, cada paso del método de Euler mejorado incluye las evaluaciones de las funciones $f(x, y)$ dos veces.

El método de Euler mejorado es claramente superior al método de Euler porque representa la pendiente promedio en cada intervalo como el promedio de las pendientes en los puntos terminales del intervalo, en vez del valor de la pendiente en el punto terminal izquierdo. De hecho, los errores de discretización local y global del método de Euler mejorado son proporcionales a h^3 y h^2, respectivamente. Por tanto, reducir a la mitad el tamaño de paso disminuye el error global a un cuarto y el error local a un octavo de lo que eran antes.

El método de Euler mejorado pertenece a una clase de técnicas numéricas llamadas *métodos predictores-correctores*. La ecuación 9-37*b* primero *predice* el valor de y_{n+1}, que luego se corrige mediante la ecuación 9-37*a* (figura 9-27). Observe que la ecuación predictora en este caso es simplemente la fórmula de Euler y, por tanto, $\tilde{y}_{n+1}$ es la solución que obtendríamos usando el método de Euler. En el método de Euler mejorado, este resultado se trata como un valor intermedio y se refina usando la ecuación correctora.

También debe observar que el valor y_{n+1} obtenido a partir de la ecuación correctora puede usarse en la misma ecuación en lugar de $\tilde{y}_{n+1}$ para obtener un valor más preciso de y_{n+1}; es decir, la ecuación correctora puede usarse como la predictora después de la primera iteración. Es posible repetir este proceso para mejorar el valor de y_{n+1} todavía más. El valor de convergencia y_{n+1} obtenido de esta manera usualmente tiene un error mucho más pequeño, pero no necesariamente es el valor exacto de la solución. Reducir el tamaño de paso es una alternativa más directa y simple para mejorar la exactitud de los resultados y, por tanto, no hablaremos más de la iteración de la ecuación correctora.

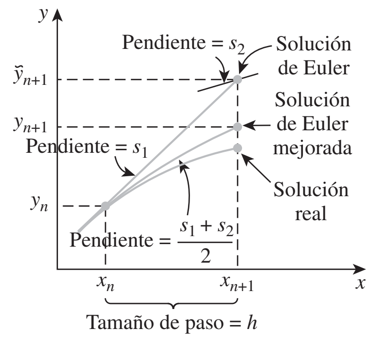


FIGURA 9-26
Representación gráfica del método de Euler mejorado.

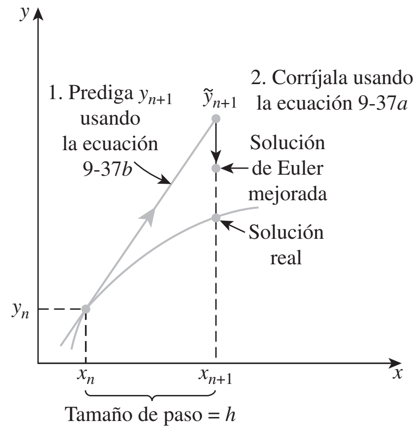


FIGURA 9-27
Esquema del método de Euler mejorado.

EJEMPLO 9-6 **Método de Euler mejorado**

Usando el método de Euler mejorado con un tamaño de paso $h = 0.1$, determine la solución del problema de valor inicial

$$y' = 5y - 25x^2 + 2, \quad y(0) = 2$$

en el intervalo $0 \le x \le 1$. Compare los resultados con los valores de solución exactos.

Solución Tenemos $f(x, y) = 5y - 25x^2 + 2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ y $h = 0.1$. Entonces las soluciones en los puntos $x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, \ldots, x_{10} = 1$ se obtienen por aplicación repetida de la fórmula de Euler mejorada (ecuaciones 9-37):

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})}{2}$$

donde $$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0)\\ &= 2 + 0.1f(0.2)\\ &= 2 + 0.1 \times (5 \times 2 - 25 \times 0^2 + 2)\\ &= 3.2\end{aligned}$$

y $$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + h\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, \tilde{y}_1)}{2}\\ &= 2 + 0.1\frac{f(0, 2) + f(0.1, 3.2)}{2}\\ &= 2 + 0.1 \times \frac{12 + 17.75}{2}\\ &= 3.4875\end{aligned}$$

Entonces, el método de Euler mejorado predice que la solución en $x_1 = 0.1$ será $y_1 = 3.4875$. La solución exacta en este punto se determina por la ecuación (9-22) como 3.54744. Por tanto, el valor obtenido por el método de Euler mejorado tiene un error de $100 \times (3.54744 - 3.4875)/3.54744 = 1.69\%$. Repitiendo los cálculos para $n = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{y}_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1)\\ &= 3.4875 + 0.1f(0.1, 3.4875)\\ &= 3.4875 + 0.1 \times (5 \times 3.4875 - 25 \times 0.1^2 + 2)\\ &= 5.40625\end{aligned}$$

y $$\begin{aligned}y_2 &= y_1 + h\frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, \tilde{y}_2)}{2}\\ &= 3.4875 + 0.1\frac{f(0.1, 3.4875) + f(0.2, 5.40625)}{2}\\ &= 3.4875 + 0.1\frac{19.1875 + 28.03125}{2}\\ &= 5.8484375\end{aligned}$$

que difiere del valor exacto de 6.03656 en 3.12%.

Los cálculos para $n = 2, 3, \ldots, 9$ también se realizan usando el sencillo programa de MATLAB que se muestra en la figura 9-28, y los resultados se muestran en la tabla 9-7, junto con los resultados exactos para comparación. Observe que el error llega a 14.02% en $x = 1$.

```
x = 0; y = 2;
h = 0.1;
nstep = 10;
f = @(x,y)(5*y–25*x^2+2);
for n = 1:nstep
  y1 = y + h*f(x,y);
  y = y + h*(f(x,y)+f(x+h,y1))/2
  x = n*h
  exact = 2*exp(5*x)+5*x.^2+2*x
  error = 100*abs(y–exact)/exact
end
```

FIGURA 9-28
Programa de MATLAB para el método de Euler mejorado.

La tabla 9-7 también presenta los resultados obtenidos usando los tamaños de paso $h = 0.01$ y $h = 0.001$, así como los resultados obtenidos por el método de Euler, para comparación. Observe que para $h = 0.001$, la solución de Euler mejorada es prácticamente idéntica a la solución exacta.

También debe observar que los resultados de Euler mejorada con $h = 0.1$ son muy cercanos a los resultados Euler con $h = 0.01$. Esto es muy significativo porque los resultados obtenidos con el método Euler necesitan aproximadamente cinco veces más cálculos. Esto se debe a que la función $f(x, y)$ se evalúa un total de 20 veces en el método de Euler mejorado porque se evalúa dos veces en cada paso, pero 100 veces en el método de Euler. Por tanto, el método de Euler mejorado da resultados más exactos con menos cálculos, lo cual justifica con creces el ligero aumento de complejidad.

TABLA 9-7

Comparación del método de Euler mejorado con el método de Euler y los resultados exactos para $y' = 5y - 25x^2 + 2$, $y(0) = 2$

	Método de Euler		Método de Euler mejorado			
x	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$	Exacto
0.0	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000
0.1	3.20000	3.50150	3.48750	3.54662	3.54743	3.54744
0.2	4.97500	5.89006	5.84844	6.03396	6.03654	6.03656
0.3	7.56250	9.66066	9.56621	10.00713	10.01331	10.01338
0.4	11.31875	15.61958	15.42634	16.36470	16.37797	16.37810
0.5	16.77813	25.08012	24.70531	26.58783	26.61472	26.61499
0.6	24.74219	40.18158	39.47738	43.11809	43.17054	43.17107
0.7	36.41328	64.40859	63.11324	69.98012	70.07990	70.08091
0.8	53.59492	103.4373	101.0903	113.8081	113.9944	113.9963
0.9	18.99239	166.5134	162.3092	185.5377	185.8809	185.8842
1.0	116.6636	268.6975	261.2337	303.1954	303.8200	303.8263

Una variación del método de Euler mejorado incluye la evaluación de la pendiente en el punto medio del intervalo y su consideración como la pendiente promedio para el intervalo. El método que se basa en este principio se llama *método de Euler modificado* o método del polígono. Su exactitud es comparable con la del método de Euler mejorado.

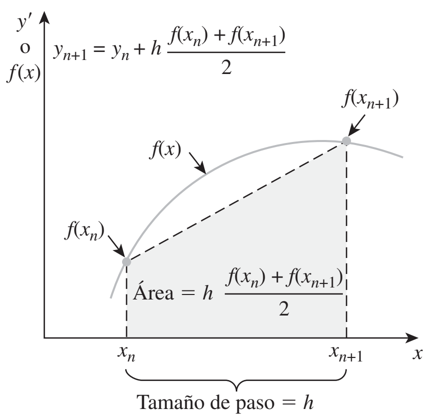


FIGURA 9-29
Cuando la función $f(x, y)$ depende solo de x, el método de Euler mejorado se reduce a la regla trapezoidal.

Caso especial: $f = f(x)$

Cuando la función $f(x, y)$ depende solo de x, el método de Euler mejorado se reduce a la regla trapezoidal (figura 9-29), y el método de Euler modificado también se reduce a la regla trapezoidal. Recuerde de la sección 9-1 que ambas técnicas de integración numérica son de exactitud comparable.

Repaso de la sección

9-11C ¿En qué se basa el método de Euler mejorado? ¿En qué se distingue del método de Euler?

9-12 Usando una calculadora y el método de Euler mejorado determine la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de *a*) un paso y *b*) dos pasos, con un tamaño de paso $h = 0.2$. También resuelva el problema de valor inicial analíticamente y determine el error relativo en los resultados numéricos:

$$y' = x + y, \; y(0) = 0$$

(*Respuesta:* la solución exacta es $y(x) = e^x - x - 1$; después de un paso, el error relativo es 6.5%. Después de dos pasos, el error relativo es 3.7%.)

9-6 ▪ MÉTODOS DE LA SERIE DE TAYLOR

Como alternativa de los métodos puramente numéricos podemos encontrar una expresión analítica aproximada para la solución del problema de valor inicial de primer orden

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{9-38}$$

expresando la función solución $y(x)$ como una serie infinita de potencias.

Usted recordará de la sección 9-4 que la fórmula de Euler $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ puede obtenerse a partir de la expansión de serie de Taylor de $y(x)$ alrededor del punto x_n:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_n) + \cdots \tag{9-39}$$

reteniendo los dos primeros términos y reemplazando los valores exactos de solución $y(x_{n+1})$ y $y(x_n)$ por los valores aproximados y_{n+1} y y_n (figura 9-30). Esto sugiere que es posible obtener mayor exactitud reteniendo más términos en la aproximación. Por ejemplo, reteniendo tres términos obtenemos

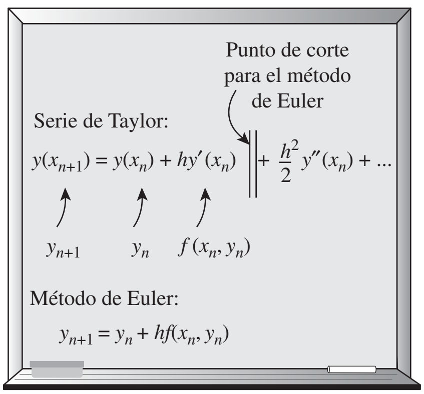


FIGURA 9-30
Obtención del método de Euler (o serie de Taylor de dos términos) a partir de la expansión de serie de Taylor de $y(x)$.

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) \tag{9-40}$$

que se llama método de serie de Taylor de tres términos (o de segundo orden) (el método de Euler es equivalente al método de serie de Taylor de dos términos o de primer orden). La primera derivada está disponible en la ecuación diferencial, $y' = f(x, y)$. La segunda se obtiene derivando la ecuación diferencial dada y aplicando la regla de cadena,

$$y''(x) = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y) \tag{9-41}$$

donde f_x y f_y son derivadas parciales de $f(x, y)$ con respecto a x y y, respectivamente. Usando las aproximaciones $y(x_{n+1}) \cong y_{n+1}$ y sustituyendo las relaciones para $y'(x)$ en el punto $y''(x)$ en la ecuación 9-40, obtenemos

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n)] \tag{9-42}$$

que se conoce como fórmula de serie de Taylor de tres términos (o de segundo orden). Observe que el método de serie de Taylor necesita la evaluación de las derivadas parciales de la función $f(x, y)$, lo cual puede ser fácil o difícil de hacer.

Los errores de discretización locales o globales (acumulados) del método de serie de Taylor de segundo orden son proporcionales a h^3 y h^2, respectivamente. Esto no sorprende, ya que el primer término que truncamos en la serie de Taylor incluye h^3. Observe que la exactitud del método de serie de Taylor de segundo orden es comparable a la exactitud del método de Euler mejorado. Si la función $f(x, y)$ es suficientemente simple y tiene derivadas continuas de orden superior para facilitar la derivación, entonces tal vez valga la pena retener más términos en la aproximación. La aproximación que se obtiene reteniendo $k + 1$ términos se llama método de serie de Taylor de orden k (o de $k + 1$ términos). Observe que el primer término truncado en el método de serie de Taylor de orden k es h^{k+1} y, por tanto, sus errores de discretización locales y globales (acumulados) son proporcionales a h^{k+1} y h^k, respectivamente.

Los métodos de serie de Taylor de orden superior dan resultados muy exactos pero son engorrosos para usarse en la práctica porque necesitan la evaluación de las derivadas de orden superior de la función $f(x, y)$, como se muestra en la figura 9-31. El valor real del método de serie de Taylor es que sirve como base de comparación para otros métodos de resolución numérica de orden superior.

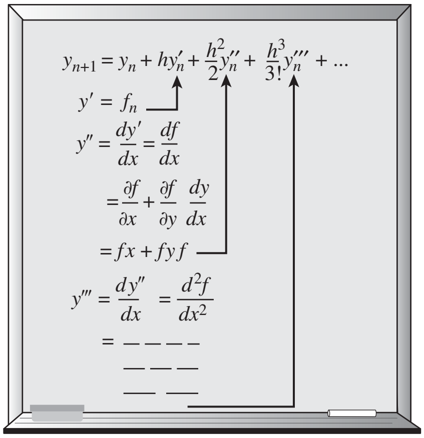


FIGURA 9-31
Los métodos de serie de Taylor de orden superior son de uso engorroso porque necesitan la evaluación de las derivadas de orden superior de la función $f(x, y)$.

EJEMPLO 9-7 Método de serie de Taylor

Usando el método de serie de Taylor de tres términos con un tamaño de paso $h = 0.1$, determine la solución del problema de valor inicial

$$y' = 5y - 25x^2 + 2, \quad y(0) = 2$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Compare estos resultados con los valores de solución exacta.

Solución Tenemos $f(x, y) = 5y - 25x^2 + 2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ y $h = 0.1$. Las derivadas parciales de la función $f(x, y)$ son

$$f_x(x, y) = -50x$$

$$f_y(x, y) = 5$$

Sustituyendo en la ecuación 9-42, la fórmula de serie de Taylor de tres términos resulta

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n)]$$

$$= y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} -50x_n + 5f(x_n, y_n)$$

Entonces las soluciones en los puntos $x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, \ldots, x_{10} = 1$ se obtienen aplicando repetidamente esta fórmula. Para $n = 0$,

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2}[-50x_0 + 5f(x_0, y_0)]$$

$$= 2 + 0.1 \times f(0, 2) + \frac{0.1^2}{2}[-50 \times 0 + 5f(0, 2)]$$

$$= 3.5$$

Entonces, el método de serie de Taylor de tres términos predice que la solución en $x_1 = 0.1$ será $y_1 = 3.5$. La solución exacta en este punto se determina por la ecuación 9-22 como 3.54744. Por tanto, el valor obtenido con el método de serie de Taylor tiene un error de $100 \times (3.54744 - 3.5)/3.54744 = 1.34\%$.

Repitiendo el cálculo para $n = 1$ da

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) + \frac{h^2}{2}[-50x_1 + 5f(x_1, y_1)]$$

$$= 3.5 + 0.1 \times f(0.1, 3.5) + \frac{0.1^2}{2}[-50 \times 0.1 + 5f(0.1, 3.5)]$$

$$= 5.88125$$

que difiere del valor exacto de 6.03656 en 2.57%.

Los cálculos para $n = 2, 3, \ldots, 9$ también se realizan usando el programa MATLAB de la figura 9-32, y los resultados se muestran en la tabla 9-8, junto con los resultados exactos y los resultados por Euler mejorado, para comparación. Observe que los resultados por Euler mejorado y los resultados de serie de Taylor de tres términos son muy cercanos. Esto no sorprende, ya que ambos métodos son aproximaciones de segundo orden (su error global es proporcional a h^2).

```
x = 0;
y = 2;
h = 0.1;
nstep = 10;
% Enter f and its derivatives here.
f = @(x,y)(5*y-25*x^2+2);
fx = @(x,y)-50*x;
fy = @(x,y)5;
for n = 1:nstep
    y = y + h*f(x,y) + h^2*(fx(x,y)+fy(x,y)*f(x,y))/2
    x = n*h
    exact = 2*exp(5*x)+5*x.^2+2*
    error = 100*abs(y-exact)/exact
end
```

FIGURA 9-32
Programa de MATLAB para el método de serie de Taylor de tres términos.

TABLA 9-8

Comparación de los resultados de la serie de Taylor de tres términos para la solución de $y' = 5y - 25x^2 + 2$, $y(0) = 2$ con los resultados de Euler mejorado y los resultados exactos

x	Taylor de tres términos $h = 0.1$	Euler mejorado $h = 0.1$	Exacto
0.0	2.00000	2.00000	2.00000
0.1	3.50000	3.48750	3.54744
0.2	5.88125	5.84844	6.03656
0.3	9.63203	9.56621	10.01338
0.4	15.54580	15.42634	16.37810
0.5	24.91193	24.70531	26.61499
0.6	39.82563	39.47738	43.17107
0.7	63.69165	63.11324	70.08091
0.8	102.0427	101.0903	113.9963
0.9	163.8693	162.3092	185.8842
1.0	263.7814	261.2337	303.8263

Repaso de la sección

9-13C ¿Por qué en la práctica no son populares los métodos de serie de Taylor para resolver ecuaciones diferenciales?

9-14 Usando una calculadora y el método de serie de Taylor de tres términos, determine la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de *a*) un paso y *b*) dos pasos, con un tamaño de paso $h = 0.2$. También resuelva analíticamente el problema de valor inicial y determine el error relativo en los resultados numéricos:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0$$

(*Respuesta:* la solución exacta es $y(x) = e^x - x - 1$; después de un paso, el error relativo es 6.5%. Después de dos pasos, el error relativo es 3.7%.)

9-7 ▪ MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Reconsidere el problema de valor inicial de primer orden

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{9-43}$$

que resolvimos antes con los métodos de Euler y Euler mejorado, usando un tamaño de paso h. Ambos métodos son casos especiales de una técnica general de un solo paso que se llama **método de Runge-Kutta**, que recibe su nombre de los matemáticos alemanes C. D. Runge (1856-1927) y M. W. Kutta (1867-1944).

En la sección anterior vimos que es posible obtener resultados bastante exactos usando métodos de serie de Taylor de orden superior. Por desgracia, tales métodos necesitan la evaluación de derivadas de orden superior de la función $f(x, y)$, lo cual es bastante tedioso y a menudo los resultados son expresiones demasiado largas. Por tanto, los métodos de serie de Taylor no son prácticos a pesar de su potencial para obtener gran exactitud.

La belleza de los métodos de Runge-Kutta es que ofrecen la misma exactitud que los métodos de serie de Taylor sin necesidad de evaluar ninguna derivada. Las deducciones formales de las fórmulas de Runge-Kutta son complicadas y no se dan aquí, pero pueden encontrarse en la mayoría de libros sobre métodos numéricos.

Como los métodos de serie de Taylor, los métodos de Runge-Kutta tienen diferentes órdenes, y cada uno tiene diferentes versiones. Cuanto más alto es el orden mejor es la exactitud del método. Algunas versiones del método de Runge-Kutta son más populares que otras, y no hay uno estándar. El método Runge-Kutta de primer orden equivale al método de Euler y al de serie de Taylor de dos términos (de primer orden). El método de Runge-Kutta de segundo orden es esencialmente equivalente al método de Euler mejorado y al método de serie de Taylor de tres términos (segundo orden) (figura 9-33).

Método de Runge–Kutta	Método equivalente
Primer orden	Euler Serie de Taylor de primer orden
Segundo orden	Euler mejorado Euler modificado Serie de Taylor de segundo orden
Tercer orden	Serie de Taylor de tercer orden
Cuarto orden	Serie de Taylor de cuarto orden

FIGURA 9-33
Los métodos numéricos considerados hasta ahora para resolver ecuaciones diferenciales son casos especiales de los métodos de Runge-Kutta.

Los métodos de Runge-Kutta más populares son los de cuarto orden, los cuales tienen varias versiones. El más conocido es el **método de Runge-Kutta clásico de cuarto orden**, que se expresa como

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{9-44a}$$

donde

$$k_1 = f(x_n, y_n) \tag{9-44b}$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \tag{9-44c}$$

```
x = 0;
y = 2;
h = 0.1;
nstep = 10;
% Enter f here.
f = @(x,y)(5*y-25*x^2+2);
for n = 1:nstep
    k1 = f(x,y);
    k2 = f(x+h/2,y+h*k1/2);
    k3 = f(x+h/2,y+h*k2/2);
    k4 = f(x+h,y+h*k3);
    y = y + h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
    x = n*h
    exact = 2*exp(5*x)+5*x.^2+2*x
    error = 100*abs(y-exact)/exact
end
```

FIGURA 9-34
Programa de MATLAB para el método de Runge-Kutta clásico de cuarto orden.

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \qquad \textbf{(9-44}\textbf{\textit{d}}\textbf{)}$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \qquad \textbf{(9-44}\textbf{\textit{e}}\textbf{)}$$

Observe que, en este método, la pendiente promedio de la función $f(x, y)$ en el intervalo entre x_n y x_{n+1} está representada por $(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$; y que k_1 aparece en la ecuación para k_2, la cual aparece en la ecuación para k_3, y ésta aparece en la ecuación para k_4. Tal anidamiento es típico de los métodos de Runge-Kutta y los hace muy adecuados para aplicaciones de computadora.

Los errores de discretización local y global de los métodos de Runge-Kutta de cuarto orden son proporcionales a h^5 y h^4, respectivamente. Esto no sorprende, ya que el orden de un método indica el grado del tamaño de paso al cual es proporcional el error global. Reducir a la mitad el tamaño de paso h reduce el error local por un factor de $1/32$, y el error global por un factor de $1/16$. Por tanto, reducir a la mitad el tamaño de paso una vez en los métodos de Runge-Kutta de cuarto orden para aumentar la exactitud es tan eficaz como reducirlo a la mitad sucesivamente cuatro veces en el método de Euler.

La notable exactitud y simplicidad del método clásico de Runge-Kutta lo hace uno de los métodos de un solo paso más extensamente utilizados para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. La fórmula de Runge-Kutta parece ser más complicada que las fórmulas de Euler y Euler mejorado; sin embargo, su alta exactitud y facilidad de uso a menudo lo hacen el método preferido. La figura 9-34 muestra el programa de MATLAB para el método clásico de Runge-Kutta para resolver el problema del ejemplo 9-8. Este programa es suficientemente general y puede modificarse fácilmente para otros problemas cambiando la condición inicial en y en el segundo renglón, el tamaño de paso h y el número de pasos en `nstep` en los renglones 3 y 4, y la definición de la función en el sexto renglón.

EJEMPLO 9-8 Método de Runge-Kutta

Usando el método de Runge-Kutta clásico de cuarto orden con un tamaño de paso $h = 0.5$, determine la solución del problema de valor inicial

$$y' = 5y - 25x^2 + 2, \quad y(0) = 2$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Compare los resultados con los valores exactos de solución.

Solución Tenemos $f(x, y) = 5y - 25x^2 + 2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ y $h = 0.5$. Las soluciones en los puntos $x_1 = 0.5$ y $x_2 = 1$ se obtienen aplicando la fórmula de Runge-Kutta dos veces (ecuaciones 9-44). Para $n = 0$,

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0, 2) = 12$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) = f\left(0 + \frac{1}{2} \times 0.50, 2 + \frac{1}{2} \times 0.5 \times 12\right)$$
$$= f(0.25, 5) = 25.4375$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) = f\left(0 + \frac{1}{2} \times 0.50, 2 + \frac{1}{2} \times 0.5 \times 25.4375\right)$$
$$= f(0.25, 8.359375) = 42.234375$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = f(0 + 0.50, 2 + 0.5 \times 42.234375)$$
$$= f(0.50, 23.1171875) = 111.3359375$$

Entonces, $$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 2 + \frac{0.5}{6}(12 + 2 \times 25.4375 + 2 \times 42.234375 + 111.3359375) \\ &= 23.55664 \end{aligned}$$

Por tanto, el método de Runge-Kutta predice que la solución en $x_1 = 0.5$ será $y_1 = 23.55664$. La solución exacta en este punto se determina por la ecuación 9-22 como 26.61499. Por tanto, el valor obtenido por el método de Runge-Kutta tiene un error de $100 \times (26.61499 - 23.55664)/26.61499 = 11.49\%$.

Repitiendo los cálculos para $n = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_1, y_1) = f(0.5, 23.55664) = 113.5332 \\ k_2 &= f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}hk_1\right) = f\left(0.5 + \frac{1}{2} \times 0.50, 23.55664 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \times 0.5 \times 113.5332\right) \\ &= f(0.75, 51.93994) = 247.6372 \\ k_3 &= f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}hk_2\right) = f\left(0.5 + \frac{1}{2} \times 0.50, 23.55664 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \times 0.5 \times 247.6372\right) \\ &= f(0.75, 85.46594) = 415.2672 \\ k_4 &= f(x_1 + h, y_1 + hk_3) = f(0.5 + 0.50, 23.55664 + 0.5 \times 415.2672) \\ &= f(1, 231.19024) = 1\,132.9512 \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 23.55664 + \frac{0.5}{6}(113.5332 + 2 \times 247.6372 \\ &\quad + 2 \times 415.2672 + 1\,132.9512) \\ &= 237.9144 \end{aligned}$$

que difiere del valor exacto de 303.8263 en 21.69%. Estos errores son grandes debido al gran tamaño de paso.

Usar un tamaño más pequeño de paso da buenos resultados. Los cálculos para $h = 0.1$ y $h = 0.01$ también se realizaron usando el programa de MATLAB que se muestra en la figura 9-34. Los resultados se muestran en la tabla 9-9, junto con los resultados exactos y los obtenidos usando el método de Euler con $h = 0.01$, y el método de Euler mejorado con $h = 0.1$, para comparación. Observe que, incluso para $h = 0.1$, los resultados de Runge-Kutta son prácticamente idénticos a los resultados exactos.

También vale la pena observar que los resultados de Runge-Kutta obtenidos con dos pasos ($h = 0.5$) son casi tan exactos como los de Euler mejorado con 10 pasos ($h = 0.1$) y los resultados de Euler con 100 pasos ($h = 0.01$). Esto es muy significativo, porque los resultados obtenidos por los métodos Euler mejorado y Euler necesitan aproximadamente 2.5 y 12.5 veces más cálculos, respectivamente. Por tanto, el método de Runge-Kutta, en general, da los resultados más exactos para el mismo número de cálculos.

TABLA 9-9

Comparación de resultados obtenidos usando un método de Runge-Kutta de cuarto orden con los obtenidos por Euler y Euler mejorado, y los resultados exactos para $y' = 5y - 25x^2 + 2$, $y(0) = 2$

x	Euler	Euler mejorado	Método de Runge-Kutta			Exactos
	$h = 0.01$	$h = 0.1$	$h = 0.5$	$h = 0.1$	$h = 0.01$	
0.0	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000
0.1	3.50150	3.48750		3.54675	3.54744	3.54744
0.2	5.89006	5.84844		6.03435	6.03656	6.03656
0.3	9.66066	9.56621		10.00805	10.01338	10.01338
0.4	15.61958	15.42634		16.36666	16.37811	16.37810
0.5	25.08012	24.70531	23.55664	26.59178	26.61498	26.61499
0.6	40.18158	39.47738		43.12578	43.17106	43.17107
0.7	64.40859	63.11324		69.99471	70.08087	70.08091
0.8	103.4373	101.0903		113.8353	113.9962	113.9963
0.9	166.5134	162.3092		185.5877	185.8841	185.8842
1.0	268.6975	261.2337	237.9144	303.2863	303.8461	303.8263

Caso especial: $f = f(x)$

Cuando la función $f(x, y)$ depende solo de x, tenemos $k_2 = k_3$, y la fórmula del método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden se reduce a

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left[f(x_n) + 4f\left(x_n + \frac{1}{2}h\right) + f(x_n + h)\right] \tag{9-45}$$

que es la regla de Simpson (ecuación 9-12) para integración numérica. Por tanto, los errores de discretización locales y globales (acumulados) para la regla de Simpson también son proporcionales a h^5 y h^4, respectivamente, lo cual hace que ésta sea una de las técnicas de integración numérica más exactas y sencillas.

Runge-Kutta Fehlberg

Una alternativa de la reducción a la mitad del tamaño de paso para obtener un estimado de error es repetir los cálculos con dos métodos de Runge-Kutta de diferente orden y tomar sus diferencias. Este procedimiento tiene el inconveniente obvio de aumentar mucho el número de computaciones. Por ejemplo, si repetimos los cálculos usando un método de Runge-Kutta de quinto orden, necesitaremos evaluar la función $f(x, y)$ seis veces adicionales, lo cual da un número total de evaluaciones de función de diez para el método clásico de Runge-Kutta. Una ingeniosa técnica llamada **método de Runge-Kutta Fehlberg** logra este objetivo al requerir las evaluaciones de $f(x, y)$ un total de solo seis veces. Los detalles de esta técnica pueden encontrarse en los libros estándar de métodos numéricos.

Finalmente, todos los métodos de un solo paso, incluyendo el método clásico de Runge-Kutta, permiten la variación de tamaño de paso durante los cálculos. Esta flexibilidad permite a los programadores optimizar el número de computaciones y obtener resultados suficientemente exactos en menos tiempo. Esto se logra aumentando automáticamente el tamaño de paso cuando la pendiente de la función $f(x, y)$ cambia suavemente, y disminuyéndolo cuando la pendiente cambia rápidamente.

Repaso de la sección

9-15C ¿Por qué es muy popular el método Runge-Kutta clásico de cuarto orden?

9-16 Usando una calculadora y el método Runge-Kutta clásico de cuarto orden, determine la solución numérica del siguiente problema de valor inicial después de *a*) un paso y *b*) dos pasos con un tamaño de paso $h = 0.2$. También resuelva el problema de valor inicial analíticamente y encuentre el error relativo en el resultado numérico:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0$$

(*Respuesta:* la solución exacta es $y(x) = e^x - x - 1$; después de un paso, el error relativo es 0.00%. Después de dos pasos, el error relativo es 0.00%.)

9-8 ▪ MÉTODOS DE PASOS MÚLTIPLES Y PREDICTORES-CORRECTORES

Todos los métodos numéricos explicados hasta ahora para resolver el problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{9-46}$$

usan la solución en un solo punto x_n para predecir la solución x_{n+1} en el siguiente punto x_{n+1}, y es correcto llamarlos *métodos de un solo paso*. Después de aplicar cualquiera de estos métodos varias veces tendremos la solución del problema en varios puntos. Es natural preguntarse si podemos usar la información correspondiente a estos diversos puntos precedentes en vez de la información correspondiente sólo al último punto x_n para predecir la solución y_{n+1} en el siguiente punto x_{n+1}. Los métodos que se basan en usar la solución en dos o más puntos precedentes para predecir la solución en el siguiente punto se llaman **métodos de pasos múltiples** (figura 9-35).

Considere un método de pasos múltiples que usa la información de cuatro puntos anteriores para predecir la solución del siguiente punto. La condición inicial proporciona la información en el primer punto x_0, pero necesitamos saber la solución en tres puntos más x_1, x_2 y x_3 antes de poder aplicar el método de pasos múltiples. Estas soluciones pueden determinarse solo mediante un método de un solo paso. Por tanto, un método de pasos múltiples no puede resolver por sí mismo todo el problema, y debe apoyarse en un método de un solo paso para la solución de los primeros puntos. Por esta razón, los métodos de un solo paso se llaman *métodos de inicio*, y los métodos de pasos múltiples se llaman *métodos de continuación.*

Es posible usar cualquier método de inicio para obtener la solución de los primeros puntos. Sin embargo, tenga presente que un procedimiento de solución es tan exacto como su eslabón más débil y, por tanto, el método inicial seleccionado debe ser al menos tan exacto como el método de pasos múltiples. Por ejemplo, si el error de discretización local del método de pasos múltiples es proporcional a h^5, entonces debemos usar un método de Runge-Kutta de cuarto orden como método inicial, ya que su error local es del mismo orden de magnitud.

Las fórmulas de pasos múltiples se obtienen integrando la ecuación diferencial dada numéricamente después de aproximarse a $f(x, y)$ con una función adecuada. Integrando $y' = f(x, y)$ entre x_n y x_{n+1} obtenemos

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f[x, y(x)]dx \tag{9-47}$$

Normalmente no podemos realizar esta integración porque no conocemos la función de solución $y(x)$ que aparece en el integrando. De modo que necesitamos una aproximación.

Ahora nos aproximamos a la función $f(x, y(x))$ mediante un polinomio llamado **polinomio de interpolación**, que pasa por algunos puntos específicos. Escogimos

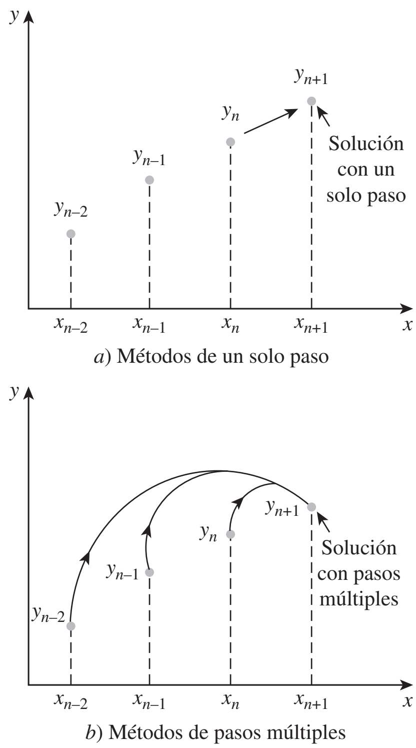


FIGURA 9-35
Representación geométrica de los métodos de *a*) un solo paso y *b*) de pasos múltiples.

un polinomio para la función de interpolación porque los polinomios son funciones continuas fáciles de integrar. Si el método de pasos múltiples debe incorporar la solución en los $m + 1$ puntos precedentes, se usa un polinomio de grado m como polinomio de interpolación. Observe que un polinomio de grado m que pasa por $m + 1$ puntos es único. Por ejemplo, una y solo una línea recta (un polinomio de grado uno) pasa por dos puntos específicos. Del mismo modo, fijar cuatro puntos especifica de modo único un polinomio de tercer grado que pasa por ellos. Los detalles de la determinación del polinomio de interpolación pueden encontrarse en libros de métodos numéricos. Una vez que se determina, podemos integrarlo entre x_n (u otro punto) y x_{n+1} y sustituir en la ecuación 9-47. El resultado es una fórmula de pasos múltiples. Observe que cuanto mayor sea la cantidad de puntos que se usan en el método de pasos múltiples, mayor será el orden del polinomio de interpolación.

Uno de los métodos de pasos múltiples más conocidos es el método de cuarto orden de **Adams-Bashforth**, cuyo nombre hace honor a J. C. Adams (1819-1892) y F. Bashforth (1819-1912). Este método utiliza la solución en los cuatro puntos anteriores x_n, x_{n-1}, x_{n-2} y x_{n-3}. Utiliza un polinomio de tercer grado como polinomio de interpolación que pasa por los puntos (x_n, f_n), (x_{n-1}, f_{n-1}), (x_{n-2}, f_{n-2}) y (x_{n-3}, f_{n-3}), donde hemos usado la siguiente notación:

$$f_k = f[x_k, y(x_k)] = y'(x_k) \tag{9-48}$$

para cualquier entero k. Sustituyendo el polinomio de interpolación obtenido en la ecuación 9-47, y evaluando la integral (figura 9-36) obtenemos la fórmula de pasos múltiples

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \tag{9-49}$$

que se conoce como **fórmula de Adams-Bashforth** de cuarto orden. Tiene un error de discretización local proporcional a h^5. Es decir, es una fórmula de cuarto orden, como el nombre implica. Observe que esta fórmula contiene solo una nueva evaluación de la función $f(x, y)$ en cada paso. Los valores de esta función en los otros tres puntos están disponibles a partir de los pasos anteriores.

Es posible obtener diferentes fórmulas de pasos múltiples con el mismo polinomio de interpolación integrando la ecuación diferencial entre puntos diferentes. Por ejemplo, si cambiamos el límite inferior de integración de x_n a x_{n-3}, la integración del polinomio de integración de tercer grado recién obtenido dará

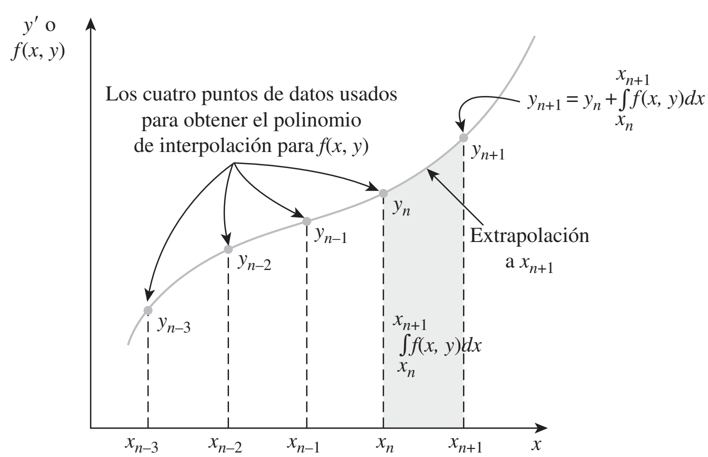


FIGURA 9-36
Desarrollo de la fórmula de cuarto orden de Adams-Bashforth.

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}) \quad \text{(9-50)}$$

la cual se conoce como **fórmula predictora de Milne**. Esta fórmula tiene un error de discretización local proporcional a h^5 y, por tanto, también es un método de cuarto orden. Sin embargo, su constante de proporcionalidad es mucho menor que la de la fórmula de Adam-Bashforth y, por tanto, la fórmula de Milne usualmente da resultados más exactos. Además, implica menos cálculos para lograr esta alta exactitud.

Las fórmulas de Adam-Bashforth y de Milne son las fórmulas explícitas de pasos múltiples más extensamente utilizadas (su lado derecho no incluye la incógnita y_{n+1}). Sin embargo, usualmente se utilizan como las ecuaciones predictoras en combinación con los dos métodos populares predictores-correctores que se explicarán. Incluso en sí mismas, son tan exactas como el método de cuarto orden de Runge-Kutta; pero no son bastante competitivas, ya que deben apoyarse en un método inicial de cuarto orden (como el de Runge-Kutta) para los valores de solución en los tres primeros puntos. Usualmente no es práctico escribir dos programas cuando basta con uno. Éste es especialmente el caso para problemas pequeños en los que el tiempo de computación no es motivo de mucha preocupación.

Métodos predictores-correctores

Obtuvimos las fórmulas de Adams-Bahsforth y Milne utilizando un polinomio de interpolación de tercer grado que pasa por los cuatro puntos (x_n, f_n), (x_{n-1}, f_{n-1}), (x_{n-2}, f_{n-2}) y (x_{n-3}, f_{n-3}). Las soluciones en todos estos puntos están disponibles y, por tanto, el polinomio de interpolación resultante no incluyó ninguna función incógnita. Como resultado, obtuvimos expresiones explícitas para y_{n+1} cuando realizamos la integración en la ecuación 9-47.

Ahora nos gustaría avanzar un paso más e incluir los puntos futuros (x_{n+1}, f_{n+1}) en la determinación del polinomio de interpolación. En otras palabras, forzamos el polinomio de tercer grado a pasar por los cuatro puntos (x_{n+1}, f_{n+1}), (x_n, f_n), (x_{n-1}, f_{n-1}) y (x_{n-2}, f_{n-2}). Como usted esperaría, esta vez el polinomio de interpolación incluirá f_{n+1}, que no se conoce. Sustituyendo este nuevo polimonio de interpolación en la ecuación 9-47 y evaluando la integral (figura 9-37) obtenemos la **fórmula correctora de Adams-Moulton**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \quad \text{(9-51)}$$

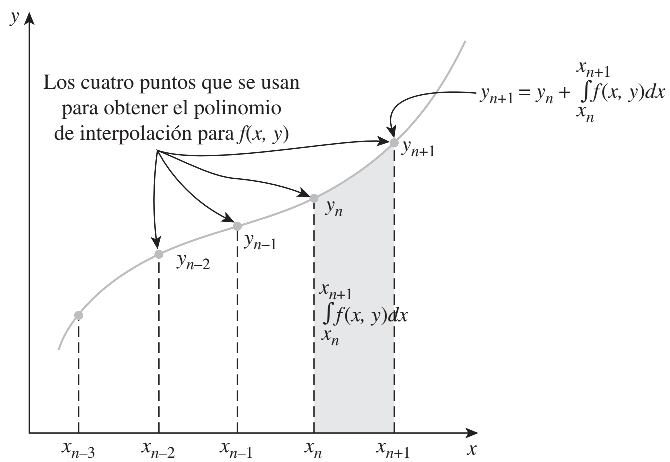


FIGURA 9-37
Desarrollo de la fórmula predictora de cuarto orden de Adams-Moulton.

la cual también tiene un error de discretización local proporcional a h^5. Este algoritmo recibe su nombre de Adams y F. R. Moulton (1872-1952). Sin embargo, su constante de proporcionalidad es alrededor de $1/13$ de la que encontramos en la fórmula de Adams-Bashforth y, por tanto, puede usarse para mejorar los resultados obtenidos por la fórmula de Adams-Bashforth.

Las fórmulas de Adams-Bashforth y de Adams-Moulton forman una mancuerna natural porque la segunda puede dar resultados más exactos, pero necesita un estimado inicial razonablemente bueno para f_{n+1} (y por tanto la solución y_{n+1}), porque es una fórmula implícita. Este estimado lo da la fórmula Adams-Bashforth. En otras palabras, el valor de solución y_{n+1} que predice la fórmula Adams-Bashforth lo corrige en seguida la fórmula de Adams-Moulton. Los métodos basados en este principio se llaman **métodos predictor-corrector**. En este caso, la fórmula Adams-Bashforth es la predictora y la fórmula Adams-Moulton es la correctora. Entonces podemos expresar el método predictor corrector de Adams-Moulton como

$$\text{Predictor: } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \tag{9-49}$$

$$\text{Corrector: } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \tag{9-51}$$

Una vez que las soluciones y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1} y y_n en los puntos x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1} y x_n están disponibles, podemos calcular $f_{n-3}, f_{n-2}, f_{n-1}$ y f_n usando la función $f(x, y)$ en la ecuación diferencial dada. En seguida usamos la fórmula predictora para obtener una primera predicción exacta de la solución y_{n+1} y sustituimos este valor en la relación $f(x, y)$ para obtener el valor de f_{n+1} para usarlo en la fórmula correctora. El valor mejorado de y_{n+1} de la fórmula correctora usualmente es muy exacto; pero puede mejorarse todavía más tratándolo como valor predicho y aplicando una vez más la ecuación correctora. Este proceso se llama *iteración interna*. Como regla general, es mejor reducir el tamaño de paso si se necesitan más de dos iteraciones internas para cumplir los criterios de error específicos. El procedimiento de solución recién descrito es aplicable a cualquier método predictor-corrector.

EJEMPLO 9-9 Método predictor-corrector de Adams-Moulton

Usando el método predictor-corrector de Adams-Moulton con un tamaño de paso $h = 0.1$, determine la solución del problema de valor inicial

$$y' = 5y - 25x^2 + 2, \quad y(0) = 2$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Compare estos resultados con los valores de solución exactos.

Solución Tenemos $f(x, y) = 5y - 25x^2 + 2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ y $h = 0.1$. La condición inicial nos da la solución en un punto, pero el método de Adams-Moulton necesita la solución en cuatro puntos antes de poderse aplicar. Por tanto, necesitamos determinar las soluciones en $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$ y $x_3 = 0.3$ usando un método de inicio (como el método de Runge-Kutta). En este caso, estos resultados están disponibles en el ejemplo 9-8, y son

$$y_1 = 3.54675$$

$$y_2 = 6.03435$$

$$y_3 = 10.00805$$

La solución en otros puntos se obtiene aplicando primero la fórmula predictora y luego la correctora (ecuaciones 9-49 y 9-51). Para $n = 3$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
y_4 &= y_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0) \\
&= y_3 + \frac{h}{24}[55f(x_3, y_3) - 59f(x_2, y_2) + 37f(x_1, y_1) - 9f(x_0, y_0)] \\
&= 10.00805 + \frac{0.1}{24}[55f(0.3, 10.00805) - 59f(0.2, 6.03435) \\
&\quad +37f(0.1, 3.54675) - 9f(0, 2)] \\
&= 10.00805 + \frac{0.1}{24}[55 \times 49.79025 - 59 \times 31.17175 \\
&\quad + 37 \times 19.48375 - 9 \times 12] \\
&= 16.309010
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
y_4 &= y_3 + \frac{h}{24}(9f_4 + 19f_3 - 5f_2 + f_1) \\
&= y_3 + \frac{h}{24}[9f(x_4, y_4) + 19f(x_3, y_3) - 5f(x_2, y_2) + f(x_1, y_1)] \\
&= 10.00805 + \frac{0.1}{24}[9f(0.4, 16.309005) + 19f(0.3, 10.00805) \\
&\quad -5f(0.2, 6.03435) + f(0.1, 3.54675)] \\
&= 10.00805 + \frac{0.1}{24}[9 \times 79.545050 + 19 \times 49.79025 \\
&\quad - 5 \times 31.17175 + 19.48375] \\
&= 16.364490
\end{aligned}
$$

Entonces, el método de Adams-Moulton predice la solución en $x_4 = 0.4$ como $y_4 = 16.364490$. La solución exacta en este punto se determina por la ecuación 9-22 como 16.37810. Por tanto, el valor obtenido por el método de Adams-Moulton tiene un error de $100 \times (16.37810 - 16.364490)/16.37810 = 0.08\%$.

Repitiendo los cálculos para $n = 4$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
y_5 &= y_4 + \frac{h}{24}(55f_4 - 59f_3 + 37f_2 - 9f_1) \\
&= y_4 + \frac{h}{24}[55f(x_4, y_4) - 59f(x_3, y_3) + 37f(x_2, y_2) - 9f(x_1, y_1)] \\
&= 16.364490 + \frac{0.1}{24}[55f(0.4, 16.364490) - 59f(0.3, 10.00805) \\
&\quad + 37f(0.2, 6.03435) - 9f(0.1, 3.54675)] \\
&= 16.364490 + \frac{0.1}{24}[55 \times 79.822450 - 59 \times 49.79025 \\
&\quad + 37 \times 31.17175 - 9 \times 19.48375] = 26.492029
\end{aligned}
$$

y $$y_5 = y_4 + \frac{h}{24}(9f_5 + 19f_4 - 5f_3 + f_2)$$

$$= y_4 + \frac{h}{24}[9f(x_5, y_5) + 19f(x_4, y_4) - 5f(x_3, y_3) + f(x_2, y_2)]$$

$$= 16.364490 + \frac{0.1}{24}[9f(0.5, 26.492029) + 19f(0.4, 16.364490)$$

$$- 5f(0.3, 10.00805) + f(0.2, 6.03435)]$$

$$= 16.364490 + \frac{0.1}{24}[9 \times 128.2102 + 19 \times 79.822450 - 5 \times 49.79025$$
$$+ 31.17175] = 26.584240$$

que difiere del valor exacto de 26.614980 en 0.11%.

Los cálculos para $n = 5, 6, \ldots, 9$ también se realizaron usando el sencillo programa de MATLAB que se muestra en la figura 9-38. Los resultados se muestran en la tabla 9-10, junto con los resultados exactos y de Runge-Kutta, para comparación. Observe que ambos métodos dan resultados muy exactos, pero en este caso los del método de Runge-Kutta son ligeramente mejores que los del método de Adams-Moulton; sin embargo, el método de Adams-Moulton necesita menos cálculos. También observe que usar la fórmula correctora una vez más mejora considerablemente los resultados, haciéndolos más exactos que los de Runge-Kutta. Para usar el programa dado en la figura 9-38 para resolver otras ecuaciones, simplemente cambie los primeros cinco renglones y borre los renglones tercero (desde el último) y segundo (desde el último).

```
h = 0.1;
nstep = 10;
x = 0;
y = 2;
fnc = @(x,y)(5*y-25*x^2+2);
f(1) = fnc(x,y);
for n = 1:3
   k1 = fnc(x,y);
   k2 = fnc(x+h/2,y+h*k1/2);
   k3 = fnc(x+h/2,y+h*k2/2);
   k4 = fnc(x+h,y+h*k3);
   y = y + h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
   x = n*h;
   f(n+1) = fnc(x,y);
end
for n = 3:nstep-1
   x = (n+1)*h;
   y1 = y+h*(55*f(n+1)-59*f(n)+37*f(n-1)-9*f(n-2))/24;
   f(n+2) = fnc(x,y1);
   y = y + h*(9*f(n+2)+19*f(n+1)-5*f(n)+f(n-1))/24
   exact = 2*exp(5*x)+5*x.^2+2*x
   error = 100*abs(y-exact)/exact;
end
```

FIGURA 9-38
Programa de MATLAB para el método predictor-corrector de Adams-Moulton de cuarto orden.

TABLA 9-10

Comparación entre los resultados obtenidos usando las fórmulas predictoras-correctoras de Adams-Moulton y los obtenidos usando las fórmulas de Runge-Kutta de cuarto orden; con los resultados exactos para $y' = 5y - 25x^2 + 2$, $y(0) = 2$

		Adams-Moulton		
x	Runge-Kutta $h = 0.1$	Sin iteración $h = 0.1$	Una iteración $h = 0.1$	Exacto
0.0	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000
0.1	3.54675	3.54675	3.54675	3.54675
0.2	6.03435	6.03435	6.03435	6.03435
0.3	10.00805	10.00805	10.00805	10.00805
0.4	16.36666	16.36449	16.37489	16.37810
0.5	26.59178	26.55036	26.61424	26.61499
0.6	43.12578	42.99005	43.17822	43.17107
0.7	69.99471	69.67645	70.10674	70.08091
0.8	113.8353	113.1554	114.0617	113.9963
0.9	185.5877	184.1990	186.0297	185.8842
1.0	303.2863	300.5559	304.1282	303.8263

Si el polinomio de interpolación de tercer orden que se usa en el método de Adams-Moulton se integrara de x_{n-1} a x_{n+1} obtendríamos la **fórmula correctora de Milne**, que es idéntica a la regla de Simpson. Por tanto, el método predictor-corrector de Milne puede expresarse como

$$\text{Predictor: } y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}) \qquad \textbf{(9-50)}$$

$$\text{Corrector: } y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}) \qquad \textbf{(9-52)}$$

La ecuación predictora es de cuarto orden y, por tanto, su error de discretización local es proporcional a h^5. La fórmula correctora es de segundo orden, pero su constante de proporcionalidad es 1/8 de la que encontramos en la fórmula predictora; por tanto, es muy eficaz para mejorar los resultados obtenidos por dicha fórmula.

De los métodos predictores-correctores presentados, el método de Milne da resultados más exactos y lo hace con menos cálculos. Esto puede hacer que alguien llegue a la conclusión de que el método de Milne es superior al de Adams-Moulton. Sin embargo, el método de Milne tiene una debilidad inherente: algunas veces muestra un comportamiento inestable. Es decir, la solución oscila alrededor de la solución exacta con un error exponencialmente creciente, como se muestra en la figura 9-39. Debido a esta posibilidad, usualmente se prefiere el método de Adams-Moulton.

La inestabilidad del método de Milne tiene su origen en su corrector, y puede suprimirse modificando la ecuación correctora. Una modificación que se usa comúnmente se debe a Hamming, y se llama **método de Hamming**, por R. W. Hamming (1915-1998). Usa el predictor Milne con el corrector modificado

$$y_{n+1} = \frac{1}{8}(9y_n - y_{n-2}) + \frac{3h}{8}(f_{n+1} + 2f_n - f_{n-1}) \qquad \textbf{(9-53)}$$

que es estable, de tercer orden y tiene un error de discretización local proporcional a h^4.

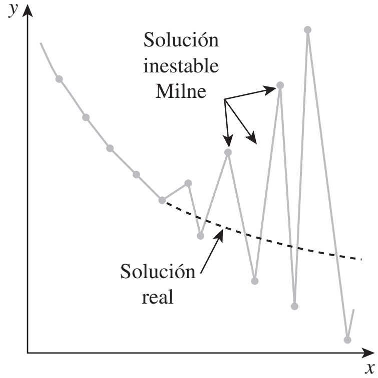


FIGURA 9-39
Inestabilidad del método de Milne; ocurre durante la solución de algunas ecuaciones diferenciales con ciertos tamaños de paso.

Hay otros métodos predictores-correctores disponibles en la literatura. El método de Euler mejorado del que antes hablamos es un método predictor-corrector de segundo orden, y el polinomio de interpolación de la fórmula correctora es un polinomio de primer grado. O sea, es la línea recta que pasa por los puntos (x_n, f_n) y (x_{n+1}, f_{n+1}). La integración de este polinomio de interpolación es equivalente a la regla trapezoidal. El mayor inconveniente de los métodos de pasos múltiples es que no son autoiniciados. En los dos métodos presentados, por ejemplo, debemos tener los valores de la función $f(x, y)$ en los primeros cuatro puntos equidistantes, que deben obtenerse mediante un método independiente. Entonces, quizá se pregunte para qué nos molestamos con las engorrosas fórmulas de pasos múltiples cuando los métodos de Runge-Kutta de un solo paso son tan exactos y definitivamente mucho más sencillos. La razón es la eficiencia computacional. El método clásico de Runge-Kutta necesita la evaluación de la función $f(x, y)$ en cuatro puntos durante cada paso, mientras que el método de Adams-Bashforth necesita la evaluación de dicha función solo en dos puntos para cada paso. Entonces, el método predictor-corrector de Adams Moulton necesitaría la evaluación de $f(x, y)$ dos veces durante cada paso. Para pequeños problemas con funciones simples $f(x, y)$, la diferencia quizá ni siquiera se note. Sin embargo, en funciones $f(x, y)$ complicadas, la diferencia en tiempo de computadora puede ser muy significativa.

Repaso de la sección

9-17C ¿En qué se distinguen los métodos de pasos múltiples de los métodos de un solo paso?

9-18 Usando una calculadora y el método predictor-corrector de Adams-Moulton, determine la solución numérica del siguiente problema de valor inicial después de *a*) un paso y *b*) dos pasos, con un tamaño de paso $h = 0.2$. También resuelva analíticamente el problema de valor inicial y determine el error relativo de los resultados numéricos:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0$$

(*Respuesta:* la solución exacta es $y(x) = e^x - x - 1$; después de un paso, el error relativo es 0.00%. Después de dos pasos, el error relativo es 0.00%.)

9-9 ▪ SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

Hasta ahora, consideramos la resolución numérica de problemas individuales de valor inicial de primer orden; sin embargo, la mayoría de los problemas que se encuentran en la ciencia y la ingeniería implican ecuaciones diferenciales de orden segundo o superior o sistemas de ecuaciones de primer orden, en vez de solo una sola ecuación, y con frecuencia es necesario resolver numéricamente dichas ecuaciones.

En esta sección consideraremos solo sistemas de ecuaciones de primer orden, porque cualquier ecuación diferencial de orden n siempre puede expresarse como un sistema de ecuaciones de primer orden. Por ejemplo, el problema de valor inicial de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{9-54}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

puede expresarse como un sistema de dos problemas de valor inicial de primer orden definiendo una nueva variable como $z = y'$. Entonces $y'' = z'$ y $y'(x_0) = z(x_0) = z'_0$; por tanto

$$y' = z, \quad y(x_0) = y_0 \tag{9-55a}$$

$$z' = f(x, y, z), \quad z(x_0) = z_0 \tag{9-55b}$$

Aquí x es la variable independiente y y y z son las dos variables dependientes. Los signos de prima denotan la derivación con respecto a x. Este proceso puede extenderse a ecuaciones de órdenes superiores. La figura 9-40 da un ejemplo que incluye una ecuación de tercer orden.

La mayoría de los programas comerciales de resolución de ecuaciones diferenciales usan este enfoque para resolver ecuaciones diferenciales de orden superior. Observe que se deben especificar n condiciones iniciales para acompañar una ecuación diferencial de orden n.

Todos los métodos de resolución explicados hasta ahora para ecuaciones individuales de primer orden también son aplicables a un sistema de ecuaciones de primer orden; sin embargo, en este caso, debemos aplicar el método a cada ecuación durante cada paso antes de iniciar el siguiente paso (figura 9-41). Es decir, debemos escrutar todas las ecuaciones una por una en cada paso.

Algunos problemas importantes de ingeniería pueden incluir cientos de ecuaciones simultáneas de primer orden. Sin embargo, por simplicidad, consideraremos un sistema de dos ecuaciones de primer orden con condiciones iniciales específicas:

$$y' = f(x, y, z), \quad y(x_0) = y_0 \tag{9-56a}$$

$$z' = g(x, y, z), \quad z(x_0) = z_0 \tag{9-56b}$$

Supondremos que las funciones f y g y sus primeras derivadas son continuas en el intervalo que interesa que contiene el punto x_0, de modo que existe una solución única en ese intervalo. El procedimiento que se explicará para un sistema de dos ecuaciones puede extenderse fácilmente a un sistema de tres o más ecuaciones de primer orden.

Método de Euler

Aplicando el método de Euler a las ecuaciones 9-56 con un tamaño de paso h obtenemos la solución en $x_1 = x_0 + h$ como

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0, z_0) \tag{9-57a}$$

$$z_1 = z_0 + hg(x_0, y_0, z_0) \tag{9-57b}$$

Esta solución puede usarse después para obtener la solución en el siguiente punto $x_2 = x_1 + h$.

Generalizando (figura 9-41), tenemos

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n, z_n) \tag{9-58a}$$

$$z_{n+1} = z_n + hg(x_n, y_n, z_n) \tag{9-58b}$$

Método clásico de Runge-Kutta

La solución de los sistemas de dos ecuaciones de primer orden (ecuaciones 9-56) usando el método de Runge-Kutta puede expresarse como

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{9-59a}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \tag{9-59b}$$

donde
$$k_1 = f(x_n, y_n, z_n)$$
$$l_1 = g(x_n, y_n, z_n)$$

a) Problema de valor inicial de tercer orden:

$y''' = 2y'' - xy$

$y(0) = 0$
$y'(0) = -2$
$y''(0) = 5$

b) Su sistema equivalente de tres problemas de valor inicial de primer orden:

$y' = z$, $y(0) = 0$
$z' = w$, $z(0) = -2$
$w' = Zw - Xy$, $w(0) = 5$
$z' = 2w - xy$

FIGURA 9-40
Un problema de valor inicial de orden n puede expresarse como un sistema de n problemas de valor inicial de primer orden.

Sistema de dos ecuaciones:

$y' = f(x, y, z), \qquad y(x_0) = y_0$
$z' = g(x, y, z), \qquad z(x_0) = z_0$

Solución por el método de Euler:

$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n, z_n)$
$z_{n+1} = z_n + hg(x_n, y_n, z_n)$

FIGURA 9-41
Los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden se resuelven mediante cualquier método numérico aplicándolo a cada ecuación durante cada paso.

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1, z_n + \frac{1}{2}hl_1\right)$$
$$l_2 = g\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1, z_n + \frac{1}{2}hl_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2, z_n + \frac{1}{2}hl_2\right)$$
$$l_3 = g\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2, z_n + \frac{1}{2}hl_2\right)$$
$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hl_3)$$
$$l_4 = g(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hl_3)$$

Observe que los cálculos deben ejecutarse en el orden dado durante cada paso; por ejemplo, k_1 y l_1 deben determinarse antes de k_2.

Método predictor-corrector de Adams-Moulton

La solución del sistema de dos ecuaciones de primer orden (ecuaciones 9-56) usando el método predictor-corrector de Adams-Moulton puede expresarse como

Predictoras:
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \tag{9-60a}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{24}(55g_n - 59g_{n-1} + 37g_{n-2} - 9g_{n-3}) \tag{9-60b}$$

Correctoras:
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \tag{9-61a}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{24}(9g_{n+1} + 19g_n - 5g_{n-1} + g_{n-2}) \tag{9-61b}$$

Estas ecuaciones también pueden extenderse a un sistema de tres o más ecuaciones.

EJEMPLO 9-10 **Sistema de dos ecuaciones**

Usando *a*) el método de Euler y *b*) el método de Runge-Kutta con un tamaño de paso $h = 0.1$, determine la solución del problema de valor inicial

$$y' = -y + 9z - 9, \quad y(0) = 6$$
$$z' = y - z + 1, \qquad z(0) = 1$$

en el intervalo $0 \le x \le 1$. Compare estos resultados con los valores de solución exactos obtenidos de

$$y = 3(e^{2x} + e^{-4x}) \quad \text{y} \quad z = e^{2x} - e^{-4x} + 1$$

Solución *a*) En este caso, tenemos $x_0 = 0$, $y_0 = 6$, $z_0 = 1$ y $h = 0.1$. También

$$f(x, y, z) = -y + 9z - 9$$
$$g(x, y, z) = y - z + 1$$

```
x = 0;
y = 6;
z = 1;
h = 0.1;
nstep = 10;
fnf = @(x,y,z)(-y+9*z-9);
fng = @(x,y,z)(y-z+1);
for n = 1:nstep
    y_previous = y;
    y = y + h*fnf(x,y,z)
    z = z + h*fng(x,y_previous,z)
    x = n*h
    y_exact = 3*exp(2*x)+3*exp(-4*x)
    z_exact = exp(2*x)-exp(-4*x)+1
end
```

FIGURA 9-42
Programa de MATLAB para resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden usando el método de Euler.

Entonces las soluciones en los puntos $x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, \ldots, x_{10} = 1$ se obtienen aplicando repetidamente las fórmulas de Euler (ecuaciones 9-58). Para $n = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0, z_0) \\ &= 6 + 0.1f(0, 6, 1) = 6 + 0.1 \times (-6) \\ &= 5.4 \\ z_1 &= z_0 + hg(x_0, y_0, z_0) \\ &= 1 + 0.1g(0, 6, 1) = 1 + 0.1 \times 6 \\ &= 1.6 \end{aligned}$$

Entonces, el método de Euler predice las soluciones en $x_1 = 0.1$ como $y_1 = 5.4$ y $z_1 = 1.6$. Las soluciones exactas en este punto son 5.675 y 1.551, respectivamente. Las soluciones en otros puntos también se obtienen usando el programa de MATLAB dado en la figura 9-42, y se enlistan en la tabla 9-11.

b) Las soluciones de Runge-Kutta del sistema de estas dos ecuaciones de primer orden se obtienen aplicando repetidamente las fórmulas de Runge-Kutta (ecuaciones 9-59). Para $n = 0$ tenemos

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0, z_0) = f(0, 6, 1) = -6 \\ l_1 &= g(x_0, y_0, z_0) = g(0, 6, 1) = 6 \\ k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_1, z_0 + \frac{1}{2}hl_1\right) \\ &= f\left(0 + \frac{1}{2} \times 0.1, 6 + \frac{1}{2} \times 0.1 \times (-6), 1 + \frac{1}{2} \times 0.1 \times 6\right) \\ &= f(0.05, 5.7, 1.3) = -3 \\ l_2 &= g\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_1, z_0 + \frac{1}{2}hl_1\right) \\ &= g\left(0 + \frac{1}{2} \times 0.1, 6 + \frac{1}{2} \times 0.1 \times (-6), 1 + \frac{1}{2} \times 0.1 \times 6\right) \\ &= g(0.05, 5.7, 1.3) = 5.4 \\ k_3 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_2, z_0 + \frac{1}{2}hl_2\right) \\ &= f\left(0 + \frac{1}{2} \times 0.1, 6 + \frac{1}{2} \times 0.1 \times (-3), 1 + \frac{1}{2} \times 0.1 \times 5.4\right) \\ &= f(0.05, 5.85, 1.27) = -3.42 \\ l_3 &= g\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_2, z_0 + \frac{1}{2}hl_2\right) \\ &= g\left(0 + \frac{1}{2} \times 0.1, 6 + \frac{1}{2} \times 0.1 \times (-3), 1 + \frac{1}{2} \times 0.1 \times 5.4\right) \\ &= g(0.05, 5.85, 1.27) = 5.58 \\ k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + hk_3, z_0 + hl_3) \\ &= f(0 + 0.1, 6 + 0.1 \times (-3.42), 1 + 0.1 \times 5.58) \\ &= f(0.1, 5.658, 1.558) = -0.636 \end{aligned}$$

$$l_4 = g(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hl_3)$$
$$= g(0 + 0.1, 6 + 0.1 \times (-3.42), 1 + 0.1 \times 5.58)$$
$$= g(0.1, 5.658, 1.558) = 5.1$$

```
x = 0;
y = 6;
z = 1;
h = 0.1;
nstep = 10;
fnf = @(x, y, z)(-y+9*z-9);
fng = @(x, y, z)(y-z+1);
for n = 1:nstep
      K1 = fnf(x, y, z);
      L1 = fng(x, y, z);
      K2 = fnf(x+h/2, y+h*K1/2, z+h*L1/2);
      L2 = fng(x+h/2, y+h*K1/2, z+h*L1/2);
      K3 = fnf(x+h/2, y+h*K2/2, z+h*L2/2);
      L3 = fng(x+h/2, y+h*K2/2, z+h*L2/2);
      K4 = fnf(x+h, y+h*K3, z+h*L3);
      L4 = fng(x+h, y+h*K3, z+h*L3);
      y = y + h*(K1+2*K2+2*K3+K4)/6
      z = z + h*(L1+2*L2+2*L3+L4)/6
      x = n*h
      y_exact = 3*exp(2*x) + 3*exp(-4*x)
      z_exact = exp(2*x)-exp(-4*x)+1
end
```

FIGURA 9-43
Programa de MATLAB para resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden usando el método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden.

Sustituyendo, obtenemos

$$y_1 = 6 + \frac{0.1}{6}(-6 + 2(-3) + 2(-3.42) - 0 \cdot 636) = 5.6754$$

$$z_1 = 1 + \frac{0.1}{6}(5.4 + 2 \times 5.4 + 2 \times 5.58 + 5.1) = 1.551$$

Los cálculos para $n = 1, 2, 3, \ldots, 9$ también se realizan usando el programa MATLAB dado en la figura 9-43. Los resultados se enlistan en la tabla 9-11, junto con los resultados exactos para comparación. Observe que, como se esperaba, los resultados Runge-Kutta son mucho más cercanos a los resultados exactos.

TABLA 9-11

Comparación de los resultados obtenidos usando el método de Euler y el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con los resultados exactos para un sistema de problemas de valor inicial de primer orden $y' = -y + 9z - 9$, $y(0) = 6$ y $z' = y - z + 1$, $z(0) = 1$

x	Método de Euler $h = 0.1$		Método de Runge-Kutta $h = 0.1$		Solución exacta	
	y	z	y	z	y	z
0.0	6.00000	1.00000	6.00000	1.00000	6.00000	1.00000
0.1	5.40000	1.60000	5.67540	1.55100	5.67517	1.55108
0.2	5.40000	2.08000	5.82376	2.04238	5.82346	2.04250
0.3	5.83200	2.51200	6.37023	2.52081	6.36994	2.52098
0.4	6.60960	2.94400	7.28254	3.02353	7.28231	3.02365
0.5	7.69824	3.41056	8.56100	3.58284	8.56085	3.58295
0.6	9.09792	3.93933	10.23256	4.22929	10.23251	4.22940
0.7	10.83352	4.55519	12.34799	4.99428	12.34803	4.99439
0.8	12.94984	5.28302	14.98123	5.91214	14.98138	5.91227
0.9	15.50958	6.14970	18.23063	7.02217	18.23091	7.02232
1.0	18.59335	7.18569	22.22168	8.37055	22.22212	8.37074

Repaso de la sección

9-19C ¿Cuál es el procedimiento para reducir un problema de valor inicial de orden n a un sistema de n problemas de valor inicial de primer orden?

9-20 Usando una calculadora y el método de Euler, determine la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de *a*) un paso y *b*) dos pasos, con un tamaño de paso $h = 0.2$:

$$y' = 2y - 3z, \quad y(0) = 2$$
$$z' = 4y - 5z, \quad z(0) = 3$$

(*Respuesta:* después de un paso, $y(0.2) = 1$ y $z(0.2) = 1.6$. Después de dos pasos, $y(0.4) = 0.44$ y $z(0.4) = 0.8$.)

9-10 ▪ SOLUCIONES NUMÉRICAS CON PROGRAMAS COMERCIALES

Al usar un método numérico para resolver una ecuación para la cual no hay disponible ninguna solución analítica, existen varias maneras de verificar la corrección de la solución numérica. Algunas, tales como disminuir el tamaño de paso para ver si la solución cambia, ya se han expuesto. Primero, usted debe probar el método numérico en una ecuación analíticamente resoluble que sea similar a la ecuación que está en estudio. Una manera de hacer esto es linealizar una ecuación no lineal; otra es usar nuestra perspicacia física para percibir resultados obviamente incorrectos. También podemos revisar la ecuación para encontrar singularidades que podrían afectar el procedimiento numérico.

Estos enfoques pueden usarse con cualquier programa, pero ahora los ilustramos usando el programa de resolución numérica de MATLAB. Al final de la sección hay un resumen de las funciones adecuadas de Maple, Mathematica y MuPAD.

Programas de resolución MATLAB ODE

Además de las muchas variaciones de los algoritmos predictores-correctores y de Runge-Kutta que se han desarrollado, hay algoritmos más avanzados que usan un tamaño variable de paso. Estos algoritmos "adaptables" usan tamaños de paso más grandes cuando la solución cambia con mayor lentitud. MATLAB proporciona diversas funciones, llamadas *solucionadores*, que implementan el método de Runge-Kutta y otros métodos con tamaño variable de paso. Dos de estos métodos son las funciones `ode45` y `ode15s`. La función `ode45` usa una combinación de los métodos de Runge-Kutta de cuarto y quinto orden. Es un solucionador de aplicación general, mientras que `ode15s` es adecuada para ecuaciones más difíciles llamadas ecuaciones "rígidas". Estos solucionadores son más que suficientes para resolver los problemas en este texto. Se le recomienda probar primero `ode45`. Si la ecuación resulta ser difícil de resolver (como lo indicaría un tiempo de resolución prolongado o un mensaje de alerta o error), entonces use `ode15s`. Usaremos `ode45` en nuestros ejemplos; la sintaxis para `ode15s` y los demás solucionadores de MATLAB es la misma.

Cuando se usa para resolver la ecuación $y' = f(x, y)$, la sintaxis básica es (usando como ejemplo `ode45`),

```
[x,y] = ode45(@ydot, xspan, y0)
```

donde `@ydot` es el identificador del archivo de funciones cuyas entradas deben ser x y y, y cuya salida debe ser un vector de columna que representa a dy/dx, es decir, $f(x, y)$. El número de *renglones* en este vector de columna debe ser igual al *orden* de la ecuación. El vector `xspan` contiene los valores inicial y final de la variable independiente x y, opcionalmente, cualesquiera valores intermedios de x donde se desee la solución.

Por ejemplo, si no se especifican valores intermedios, `xspan` es `[x0, xfinal]`, donde `x0` y `xfinal` son los valores inicial y final deseados del parámetro independiente x. Como ejemplo adicional, usar `xspan = [0, 5, 10]` le ordena a MATLAB buscar la solución en $x = 5$ y en $x = 10$.

El parámetro `y0` es el valor inicial $y(0)$. El archivo de funciones debe tener sus dos primeros argumentos de entrada como x y y, en ese orden, incluso para ecuaciones en las que $f(x, y)$ no es una función de x. Usted no necesita usar operaciones de arreglo en el archivo de funciones, porque los solucionadores ODE llaman al archivo con valores escalares para los argumentos.

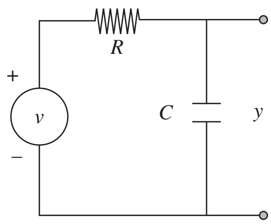


FIGURA 9-44
Circuito *RC*.

EJEMPLO 9-11 **Respuesta de un circuito *RC***

El modelo del circuito *RC* que se muestra en la figura 9-44 puede encontrarse por la ley de voltaje y conservación de carga de Kirchhoff. Ésta es $RCy' + y = v(x)$, donde x representa el tiempo. Suponga que el valor de RC es 0.1 s. Use un método numérico para encontrar la respuesta libre para el caso en que el voltaje aplicado es cero y el voltaje inicial del capacitor es $y(0) = 2$ V. Compare los resultados con la solución analítica, que es $y(x) = 2e^{-10x}$.

Solución La ecuación para el circuito resulta $0.1y' + y = 0$ si solo despejamos la respuesta libre. Primero, despeje y' para obtener $y' = -10y$. En seguida defina el lado derecho como una función. Usted puede hacer esto estableciéndolo como una función anónima o en un archivo de funciones, que es el método más general. El primer método trabaja solo para funciones simples, de modo que ahora ilustramos el método de archivo.

Cree y guarde el siguiente archivo de funciones. Observe que el orden de los argumentos de entrada debe ser x y y, aun cuando x no aparezca en el lado derecho de la ecuación.

```
function yprime = RC_circuit(x,y)
yprime = -10*y;
```

El tiempo inicial es $x = 0$ de modo que ajuste `x0` para que sea cero. Aquí sabemos, por la solución analítica, que $y(x)$ será cercana a cero para $t \geq 0.5$ s, de modo que hacemos que `xfinal` sea 0.5. En otros problemas generalmente no tenemos una buena conjetura para `xfinal`, de modo que debemos probar varios valores crecientes de `xfinal` hasta que veamos suficiente porción de la respuesta en la gráfica.

A la función `ode45` se entra como sigue, y las soluciones se grafican junto con la solución analítica `y_true`:

```
[x,y] = ode45(@RC_circuit,[0,0.5],2);
y_true = 2*exp(-10*x);
plot(x,y,'o',x,y_true),xlabel('Time(s)'),...
    ylabel('Capacitor Voltage')
```

Observe que no necesitamos generar el arreglo `x` para evaluar `y_true`, porque `x` es generada por la función `ode45`. La figura 9-45 muestra la gráfica. La solución numérica está marcada por los círculos y la solución analítica la indica la línea continua. Es claro que la solución numérica da una respuesta exacta. Observe que no necesitamos especificar el tamaño de paso porque la función `ode45` lo seleccionó automáticamente.

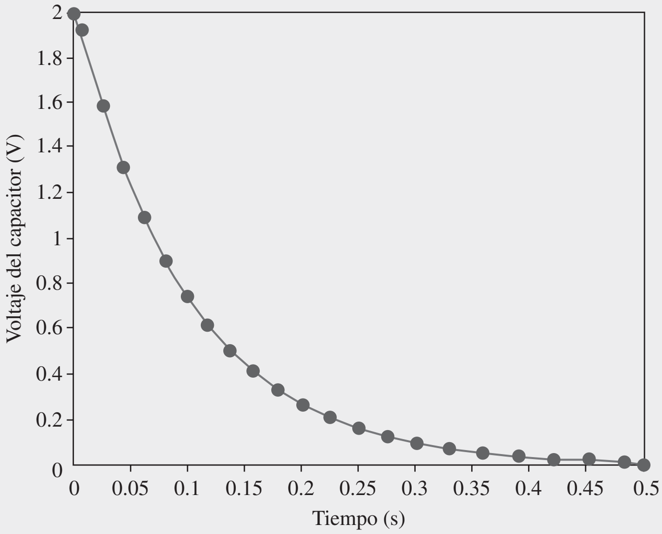


FIGURA 9-45
Respuesta libre de un circuito *RC*.

EJEMPLO 9-12 Error de redondeo y ecuaciones inestables

Considere la siguiente ecuación:

$$y' = y - 2e^{-x} \tag{9-62}$$

Su solución analítica es

$$y = e^{-x} + [1 - y(0)]e^{x} \tag{9-63}$$

Suponga que $y(0) = 1$. Obtenga la solución numéricamente.

Solución Para $y(0) = 1$, la solución analítica resulta $y = e^{-x}$. Ignorando el hecho de que tenemos la solución exacta, suponga que resolvemos la ecuación numéricamente para $0 \leq x \leq 12$. Mediante el siguiente programa de MATLAB obtenemos las soluciones exacta y numérica graficadas en la figura 9-46. Observe que en este programa usamos una función anónima para definir el lado derecho de la ecuación diferencial.

```
% Exact solution
x = [0:0.01:12]; yexact = exp(-x);
% Runge-Kutta solution
f = @(x,y)(y - 2*exp(-x));
[x1,y1] = ode45(f,[0,12],1);
plot(x,yexact,x1,y1),xlabel('x'),ylabel('y')
```

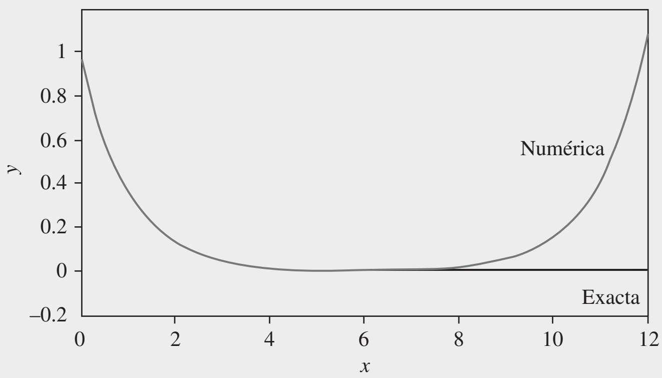


FIGURA 9-46
Solución numérica y exacta de la ecuación $y' = y - 2e^{-x}$ para $y(0) = 1$.

Es claro que la solución numérica tiene un error que aumenta bastante después de cierto punto. ¿Qué es lo que salió mal y cómo podríamos haber detectado el error si no hubiéramos tenido la solución analítica?

Si examinamos la ecuación 9-62, vemos que el término e^{-x} desaparece para $x > 4$ aproximadamente, y la ecuación diferencial se vuelve aproximadamente $y' = y$, cuya solución tiene la forma $y = Ce^x$. De modo que la solución tenderá a $+\infty$ o a $-\infty$ a menos que $C = 0$, en cuyo caso la solución tiende a cero cuando $x \to \infty$. Resulta que $C = 0$ solo si $y(0) = 1$.

Por la solución general dada por la ecuación 9-63, vemos que si $y(0) = 1$, el término e^x no aparece en la solución; sin embargo, el término de e^x sí aparece en la solución para cualquier condición inicial que no sea igual a 1. El término de e^x corresponde a la raíz característica inestable $\lambda = 1$. Esto ilustra la sensibilidad de la ecuación diferencial a cambios en la condición inicial.

¿Qué nos dice esto acerca de nuestra solución numérica? Suponga que resolviéramos la ecuación 9-62 para $x \geq x_1$ con la condición $y(x_1) = y_1$. La solución es

$$y = e^{-x} + [e^{-x_1}y(x_1) - e^{-2x_1}]e^x \qquad \textbf{(9-64)}$$

Considere esto como la solución generada por un método numérico comenzando en x_1 con el valor $y(x_1)$. La diferencia entre esta solución y la verdadera para $y(0) = 1$ es

$$\Delta(x) = e^{-x} + [e^{-x_1}y(x_1) - e^{-2x_1}]e^x - e^{-x} = [e^{-x_1}y(x_1) - e^{-2x_1}]e^x = De^x$$

Ahora, si la solución numérica $y(x_1)$ no es igual a la verdadera solución para $y(0) = 1$, entonces $y(x_1) \neq e^{-x_1}$, y $D \neq 0$. De modo que el error $\Delta(x)$ aumenta exponencialmente con x.

La razón por la que la solución numérica $y(x_1)$ no será igual a la verdadera es el error de redondeo. El efecto del error de redondeo se ilustra en la figura 9-47. Suponga que, debido al error de redondeo, la solución en $x = 1$ se desvía de la solución exacta e^{-1} por una pequeña cantidad, digamos 0.001. La solución exacta de la ecuación 9-62 con la condición inicial $y(1) = e^{-1} + 0.001$ es $y = 0.001e^{-1}e^{-x} + e^x$. Esto da la curva superior en la figura 9-47. Observe cómo se desvía rápidamente de la solución para $y(0) = 1$, aun cuando la diferencia inicial sea de sólo 0.001.

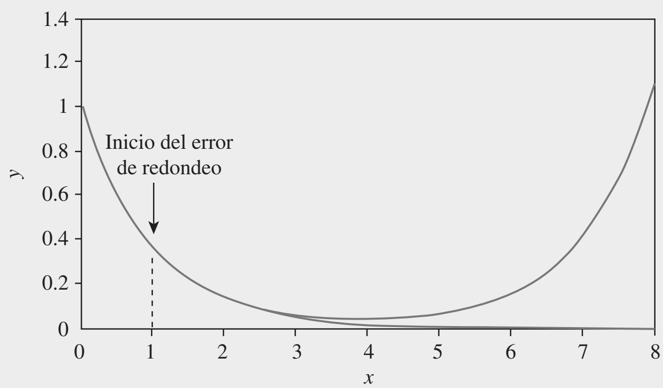


FIGURA 9-47
Sensibilidad al error de redondeo. Gráficas de las soluciones exactas de $y' = y - 2e^{-x}$ para $y(0) = 1$ (curva inferior, e^{-x}) y para $y(1) = e^{-1} + 0.001$ (curva superior).

¿Por qué el efecto del error de redondeo sigue creciendo? La razón es porque la ecuación 9-62 es *inestable*. Una característica de tales ecuaciones es que sus soluciones son muy sensibles a las condiciones iniciales. Por ejemplo, todas las soluciones de la ecuación 9-62 crecen exponencialmente para cualquier condición inicial que no sea $y(0) = 1$. Esto se ilustra en la figura 9-48, que muestra la solución exacta para tres condiciones iniciales ligeramente diferentes.

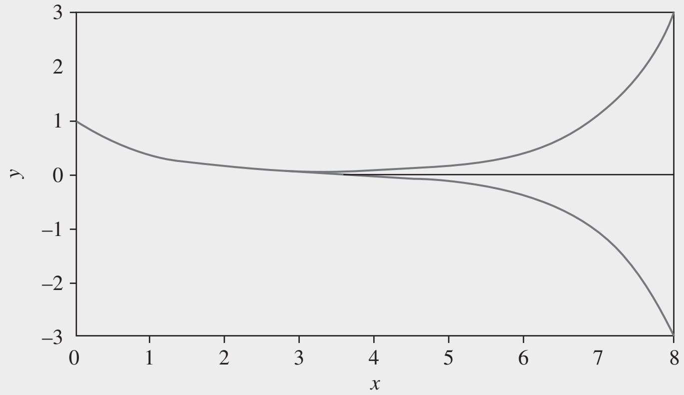


FIGURA 9-48
Sensibilidad de una ecuación inestable ante cambios ligeros en las condiciones iniciales. Gráficas de las soluciones exactas de $y' = y - 2e^{-x}$ para $y(0) = 1$ (curva media), $y(0) = 1.001$ (curva superior) y $y(0) = 0.999$ (curva inferior).

Concluimos este ejemplo observando que resolvimos la ecuación diferencial en ausencia de cualquier información acerca de sus aplicaciones previstas; es decir, su contexto físico o de ingeniería. Tal información quizá nos haya dicho que necesitábamos la solución sólo dentro de un intervalo más corto, digamos $0 \leq x \leq 2$. En tal caso, el error de redondeo no sería tan grande, y el solucionador numérico no necesitaría ser tan exacto.

Antes se observó que una manera de verificar una solución numérica es disminuir el tamaño de paso y ver si la solución cambia. Sin embargo, no es posible hacer esto con métodos adaptables, porque el tamaño de paso cambia; tampoco es posible lograrlo con programas comerciales cuyo código no es accesible. El siguiente ejemplo ilustra cómo verificar la exactitud de una solución numérica al usar MATLAB. Hay disponibles métodos similares para los demás paquetes populares de computadora.

EJEMPLO 9-13 Reducción de los efectos del error de redondeo

Explique cómo verificar la exactitud de una solución numérica en MATLAB cuando no es posible cambiar el tamaño de paso. Use la siguiente ecuación y la siguiente condición inicial:

$$y' = y - 2e^{-x}, \quad y(0) = 1 \tag{9-65}$$

Solución En el ejemplo 9-12 y en la figura 9-46 vimos que la forma básica del solucionador `ode45` dio un gran error para $x > 7$ aproximadamente. Podemos reducir este error usando un argumento opcional en el solucionador `ode45` que controla la tolerancia al error relativo usada por el solucionador. Ésta es una cantidad escalar que se usa para probar la exactitud de la solución. Falla en 10^{-3} en todos los solucionadores cuando el argumento opcional no se especifica; lo cual corresponde a una exactitud de 0.1%.

Es posible especificar un valor diferente de la tolerancia al error relativo con el comando `odeset`, que debe preceder al comando `ode45`. El siguiente código muestra cómo se hace esto para disminuir la tolerancia a 10^{-5}.

```
% Exact solution
x = [0:0.01:12]; yexact = exp(-x);
f = @(x,y)(y - 2*exp(-x));
% Runge-Kutta solution using default value of the
% relative error tolerance(0.001)
[x1,y1] = ode45(@f,[0,12],1);
% Runge-Kutta solution using a smaller
% relative error tolerance of 0.00001
```

```
options = odeset('RelTol',1e-5);
[x2,y2] = ode45(@f,[0,12],1,options);
plot(x,yexact,x1,y1,x2,y2),xlabel('x'),ylabel('y')
```

El resultado se muestra en la figura 9-49. La curva más baja visible se generó usando la menor tolerancia al error, y es visiblemente idéntica al valor exacto para $x < 9$. La solución obtenida con el valor predeterminado de tolerancia (curva superior) se desvía mucho de la solución exacta para $x > 8$.

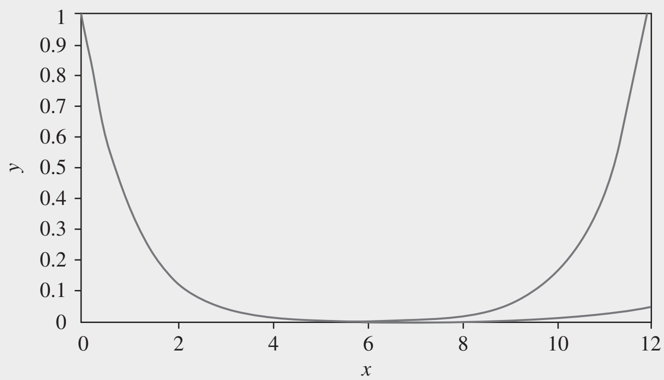


FIGURA 9-49
Efectos de la tolerancia al error. Gráficas de la solución de $y' = y - 2e^{-x}$ para $y(0) = 1$: una que usa una tolerancia al error relativo de 10^{-3} (curva superior) y una que usa tolerancia al error relativo de 10^{-5} (curva inferior).

Concluimos que cuando se usa un programa comercial cuyo tamaño de paso no puede cambiarse, una manera de verificar la exactitud es modificar cualesquiera parámetros que use el programa para especificar la tolerancia al error. Los programas comercialmente disponibles permiten hacer esto. No suponga que los valores predeterminados son aceptables a menos que tenga otras razones para no dudar de la exactitud de la solución numérica.

Cuando la ecuación diferencial es no lineal, a menudo no tenemos una solución analítica que usar para verificar nuestros resultados numéricos. En tales casos, podemos usar el discernimiento físico para protegernos contra resultados obviamente incorrectos. También podemos verificar si en la ecuación hay singularidades que podrían afectar el procedimiento numérico. Finalmente, a veces podemos usar una aproximación para reemplazar la ecuación no lineal por una lineal que se pueda resolver analíticamente. Aunque la aproximación lineal no dé la respuesta exacta, puede usarse para ver si nuestra respuesta numérica es aproximada. El siguiente ejemplo ilustra este enfoque.

EJEMPLO 9-14 Altura de líquido en un tanque esférico

La figura 9-50 muestra un tanque esférico para almacenar agua. El tanque se llena por un agujero en la parte superior y se drena por un agujero en el fondo. Si el radio del tanque es r, usted puede usar la integración para demostrar que el volumen del agua en el tanque como función de su altura h está dado por

$$V(h) = \pi r h^2 - \pi \frac{h^3}{3} \tag{9-66}$$

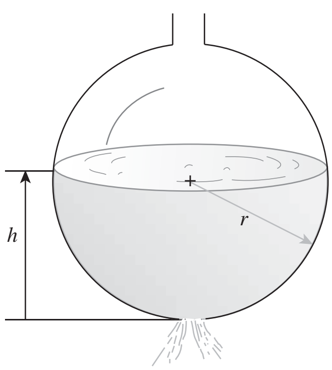


FIGURA 9-50
Drene de un tanque esférico.

El *principio de Torricelli* establece que el caudal del líquido por el agujero es proporcional a la raíz cuadrada de la altura h. Estudios posteriores de mecánica de fluidos han identificado la relación con más precisión, y el resultado es que el caudal volumétrico por el orificio está dado por

$$q = C_d A\sqrt{2gh} \tag{9-67}$$

donde A es el área del orificio, g es la aceleración debida a la gravedad y C_d es un valor determinado experimentalmente que depende parcialmente del tipo de líquido. Para agua, $C_d = 0.6$ es un valor común.

Podemos usar el principio de conservación de la masa para obtener una ecuación diferencial para la altura h. Aplicado a este tanque, el principio dice que la rapidez de cambio del volumen de líquido en el tanque debe ser igual al caudal de salida del tanque; es decir,

$$\frac{dV}{dt} = -q \tag{9-68}$$

Por la ecuación 9-66, tenemos

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi rh - \pi h^2 \frac{dh}{dt} = \pi h(2r - h)\frac{dh}{dt}$$

Sustituyendo ésta y la ecuación 9-67 en la ecuación 9-68, obtenemos la ecuación necesaria para h,

$$\pi h(2r - h)\frac{dh}{dt} = -C_d A\sqrt{2gh} \tag{9-69}$$

Use MATLAB para resolver esta ecuación y determinar cuánto tardará el tanque en vaciarse si la altura inicial es 9 pies. El tanque tiene un radio $r = 5$ pies, y tiene un orificio de 1 pulgada de diámetro en el fondo. Use $C_d = 0.6$ y $g = 32.2$ pies/s^2. Explique cómo verificar la solución.

Solución Con $r = 5$, $g = 32.2$ y $A = \pi(1/24)^2$, la ecuación 9-69 se vuelve

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{0.0334\sqrt{h}}{10h - h^2} \tag{9-70}$$

Podemos verificar primero si en esta expresión para dh/dt hay singularidades. El denominador no se vuelve cero a menos que $h = 0$ o $h = 10$, que corresponden a un tanque vacío o lleno en su totalidad. De modo que evitaremos las singularidades si $0 < h < 10$.

Podemos usar la siguiente aproximación para estimar el tiempo de vaciado. Reemplace h en el lado derecho de la ecuación 9-70 por su valor promedio, es decir, $(9 - 0)/2 = 4.5$ pies. Esto da $dh/dt = -0.00286$, cuya solución es $h(t) = h(0) - 0.00286t = 9 - 0.00286t$. De acuerdo con esta ecuación, el tanque estará vacío en $t = 9/0.00286 = 3\,147$ s, o 52 min. Usaremos este valor como "prueba de veracidad" de nuestra respuesta.

El archivo de función basado en la ecuación 9-70 es

```
function hdot = height(t,h)
hdot = -(0.0334*sqrt(h))/(10*h-h^2);
```

El archivo se llama de la siguiente manera, usando el solucionador `ode45`:

```
[t, h] = ode45(@height,[0, 2475],9);
plot(t,h),xlabel('Time(sec)'),ylabel('Height(ft)')
```

En la figura 9-51 se muestra la gráfica resultante. Observe cómo la altura cambia con mayor rapidez cuando el tanque está casi lleno o casi vacío. Esto es de esperarse, debido a los efectos de la curvatura del tanque. El tanque se vacía en 2 475 s, o 41 min. Este valor no es exageradamente diferente de nuestro estimado grueso de 52 minutos, de modo que debemos sentirnos cómodos al aceptar los resultados numéricos. También podríamos disminuir la tolerancia al error relativo y ejecutar nuevamente el programa. El valor del tiempo final de 2 475 s se encontró ejecutando el programa con valores crecientes del tiempo final hasta que la gráfica mostró que la altura disminuyó hasta cero.

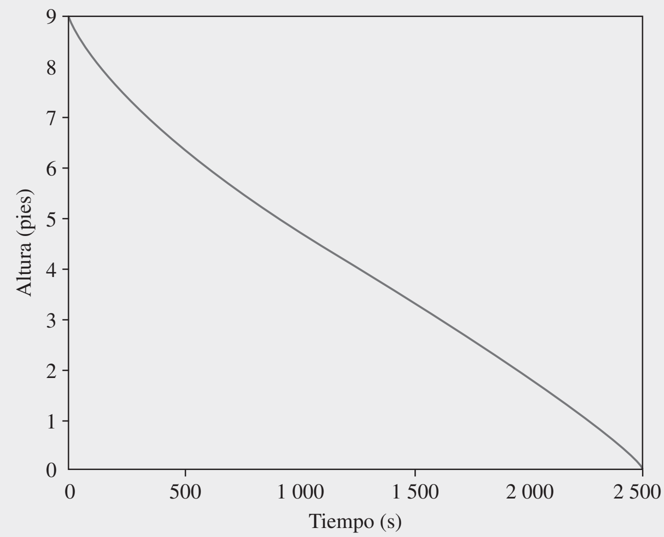


FIGURA 9-51
Gráfica de altura de agua en un tanque esférico.

Ecuaciones diferenciales de orden superior

Para usar los solucionadores ODE para resolver una ecuación de orden mayor que uno usted primero debe escribir la ecuación como un conjunto de ecuaciones de primer orden.

EJEMPLO 9-15 Solución de una ecuación de segundo orden

Considere la ecuación de segundo orden:

$$5y'' + 7y' + 4y = f(x) \tag{9-71}$$

Resuélvala numéricamente para el caso en que $0 \leq x \leq 6$ con las condiciones iniciales $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$ y $f(x) = \text{sen}\, x$.

Solución Primero despeje de la ecuación 9-71 la derivada más alta:

$$y'' = \frac{1}{5}f(x) - \frac{4}{5}y - \frac{7}{5}y' \tag{9-72}$$

Defina dos nuevas variables z_1 y z_2 como $z_1 = y$ y $z_2 = y'$. Entonces,

$$z_1' = z_2$$

y

$$z_2' = \frac{1}{5}f - \frac{4}{5}z_1 - \frac{7}{5}z_2$$

Ahora escriba un archivo de función que calcule el lado derecho de ambas ecuaciones y las almacene en un vector *de columna*. Para hacer esto, primero debemos especificar una función para $f(x)$. Como $f(x) = \text{sen}\, x$, el archivo necesario es

```
function zprime = example_1(x,z)
% Computes the derivatives of two equations
zprime(1) = z(2);
zprime(2) = (1/5)*(sin(x)-4*z(1)-7*z(2));
zprime = [zprime(1); zprime(2)];
```

Observe que `zprime (1)` representa a z_1', `zprime(2)` representa a z_2', `z(1)` representa a z_1 y `z(2)` representa a z_2. Observe que la salida devuelta, `zprime`, debe ser un vector *de columna*.

Cuando se haya familiarizado con la notación para la forma de variable de estado verá que el código anterior se podría reemplazar por la forma más corta:

```
function zprime = example_1(x,z)
zprime = [z(2); (1/5)*(sin(x)-4*z(1)-7*z(2))];
```

Queremos resolver la ecuación 9-72 para $0 \leq x \leq 6$ con las condiciones iniciales $y(0) = z_1(0) = 3$, $y'(0) = z_2(0) = 9$. Entonces la condición inicial para el *vector* z es `[3, 9]`. Para usar `ode45` teclee

```
[x,z] = ode45(@example_1,[0, 6],[3; 9]);
plot(x,z),xlabel('x'),gtext('z_1'),gtext('z_2')
```

En la figura 9-52 se muestra la gráfica resultante. Cada renglón del vector `z` corresponde a un tiempo devuelto en el vector de columna `x`. Si usted teclea `plot(x, z)` obtendrá una gráfica tanto de z_1 como de z_2 contra x. Observe que z es una matriz con dos columnas; la primera contiene los valores de z_1 en los diversos tiempos generados por el solucionador; la segunda columna contiene los valores de z_2. Entonces, para graficar solo z_1, teclee `plot (x, z(:, 1))`. Para graficar solo z_2, teclee `plot (x, z(:, 2))`.

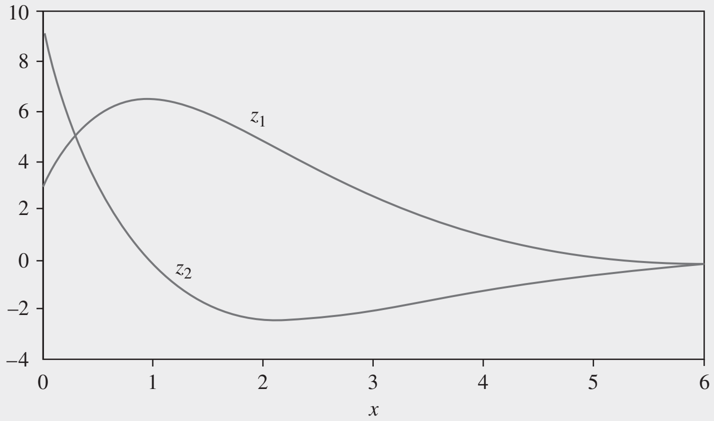


FIGURA 9-52
Gráfica de la solución de la ecuación 9-71, donde $z_1 = y$ y $z_2 = y'$.

Cuando resolvemos ecuaciones no lineales, a veces es posible verificar los resultados numéricos usando una aproximación que reduzca la ecuación a una lineal. El siguiente ejemplo ilustra tal procedimiento con una ecuación de segundo orden.

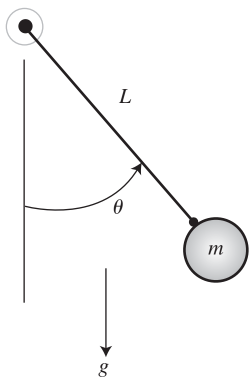


FIGURA 9-53
Péndulo.

EJEMPLO 9-16 Modelo de péndulo no lineal

El péndulo que se muestra en la figura 9-53 consiste en una masa concentrada m fijada a una varilla cuya masa es pequeña comparada con m. La longitud de la varilla es L. La ecuación de movimiento para este péndulo es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\text{sen}\,\theta = 0 \tag{9-73}$$

Suponga que $L = 1$ m y $g = 9.81$ m/s^2. Use MATLAB para resolver esta ecuación para $\theta(t)$ para dos casos: $\theta(0) = 0.5$ rad y $\theta(0) = 0.8$ rad. En ambos casos, la velocidad inicial es cero. Explique cómo verificar la exactitud de los resultados.

Solución Observe que la variable independiente ahora es t. Si usamos la aproximación para ángulos pequeños $\text{sen}\,\theta \approx \theta$, la ecuación se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \tag{9-74}$$

que es lineal y tiene la solución $\theta(t) = \theta(0)\cos\sqrt{g/Lt}$ si la velocidad inicial es cero. Entonces la amplitud de la oscilación es $\theta(0)$, y el periodo es $P = 2\pi\sqrt{L/g}$. Podemos usar esta información para seleccionar un tiempo final y verificar nuestros resultados numéricos.

Primero reescriba la ecuación del péndulo (9-74) como dos ecuaciones de primer orden. Para hacer esto, sea $x_1 = \theta$ y $x_2 = d\theta/dt$. Entonces

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\text{sen}\ x_1$$

El siguiente archivo de función se basa en las dos últimas ecuaciones. Recuerde que la salida `xdot` debe ser un vector *de columna*.

```
function dxdt = pendulum(t,x)
g = 9.81; L = 1;
dxdt = [x(2); -(g/L)*sin(x(1))];
```

Este archivo se llama como sigue. Los vectores `ta` y `xa` contienen los resultados para el caso en que $\theta(0) = 0.5$. Los vectores `tb` y `xb` contienen los resultados para $\theta(0) = 0.8\pi$. En ambos casos, la velocidad inicial es cero.

```
[ta, xa] = ode45(@pendulum,[0,5],[0.5;0]);
[tb, xb] = ode45(@pendulum,[0,5],[0.8*pi;0]);
plot(ta,xa(:,1),tb,xb(:,1)),xlabel('Time (s)'), . . .
    ylabel('Angle(rad)'),gtext('Case 1'),gtext('Case 2')
```

Los resultados se muestran en la figura 9-54. Para el caso en que $\theta(0) = 0.5$, la amplitud permanece constante, como se predijo por el análisis de ángulo pequeño. El periodo es un poco mayor que 2 s, que es el valor predicho por el análisis de ángulo pequeño. De modo que podemos confiar hasta cierto grado en el procedimiento numérico.

Para el caso en que $\theta(0) = 0.8\pi$, el periodo de la solución numérica es cercano a 3.3 s. Esto ilustra una importante propiedad de las ecuaciones diferenciales no lineales. La respuesta libre de una ecuación lineal tiene el mismo periodo para cualquier condición inicial; sin embargo, la forma (y, por tanto, el periodo) de la respuesta libre de una ecuación no lineal a menudo depende de los valores específicos de las condiciones iniciales.

En este ejemplo, los valores de g y de L se codificaron en la función `pendulum (t, x)`. Ahora suponga que quiere obtener la respuesta del péndulo para diferentes longitudes L o diferentes aceleraciones gravitacionales g. Podría usar el comando `global` para declarar g y L como variables globales, o podría pasar los valores de parámetros a través de una lista de argumentos en la función `ode45`; pero, a partir de MATLAB 7, el método preferido es usar una *función compuesta*. El siguiente programa muestra cómo hacer esto para dos valores diferentes de g y L. El tiempo final se ajustó para mostrar aproximadamente tres periodos de oscilación usando la fórmula del periodo del análisis de ángulo pequeño.

```
function pendula
g = 9.81; L = 0.75; % First case.
% Set the final time tF to approximately 3 periods.
tF = 6*pi*sqrt(L/g);
[t1, x1] = ode45(@pendulum,[0,tF],[0.4; 0];
%
g = 1.63; L = 2.5; % Second case.
% Set the final time tF to approximately 3 periods.
tF = 6*pi*sqrt(L/g);
[t2, x2] = ode45(@pendulum,[0,tF],[0.2; 0];
plot(t1,x1(:,1),t2,x2(:,1)), . . . .
     xlabel('Time(s)'),ylabel('Angle(rad)')
% Nested function.
     function xdot = pendulum(t,x)
     xdot = [x(2);-(g/L)*sin(x(1))];
end
end
```

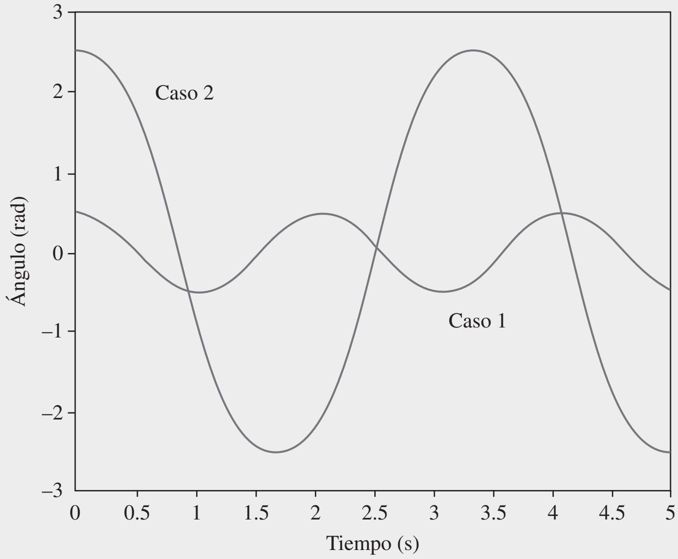


FIGURA 9-54
El ángulo del péndulo como función del tiempo para dos posiciones iniciales.

Soluciones numéricas con Maple

Para resolver el problema de valor inicial

$$y' = y - 2e^{-x}, \quad y(0) = 1$$

con Maple en el intervalo $0 \leq t \leq 12$, teclee

```
with(plots):
s:=dsolve({D(y)(x)=y(x)-2*exp(-x),y(0)=1},type=numeric,range=0..12):
odeplot(s)
```

Para las ecuaciones del péndulo con $g = 9.81$, $L = 1$, $x_1(0) = 0.5$ y $x_2(0) = 0$, tenemos

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = x_2$$

y

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen} x_1$$

Para graficar la solución para $x_1(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 5$, teclee

```
sys:={diff(x1(t),t)=x2(t),diff(x2(t),t)= -(9.81/1)*sin(x1(t)),x1(0)=0.5,x2(0)=0}:
s:=dsolve(sys,type=numeric,range=0..5):
odeplot(s)
```

Los solucionadores numéricos de Maple para problemas de valor inicial controlan el error de discretización mediante las opciones `abserr`, `relerr`, `minstep`, `maxstep` e `initstep`. El parámetro `abserr` es una tolerancia de error absoluto, y `relerr` es la tolerancia de error relativo. El significado exacto de estas tolerancias depende del solucionador específico.

Soluciones numéricas con Mathematica

Para resolver el problema de valor inicial

$$y' = y - 2e^{-x}, \qquad y(0) = 1$$

con Mathematica en el intervalo $0 \leq t \leq 12$, teclee

```
s=NDSolve[{y'[x]==y[x]-2*Exp[-x],y[0]==1},y,{x,0,12}];
Plot[Evaluate[y[x]/.s],{x,0,12},PlotRange->All]
```

Para las ecuaciones del péndulo con $g = 9.81$, $L = 1$, $x_1(0) = 0.5$ y $x_2(0) = 0$, tenemos

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = x_2$$

y

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen} x_1$$

Para graficar la solución para $x_1(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 5$, teclee

```
s=NDSolve[{x1'[t]==x2[t],x2'[t]==(9.81/1)*Sin[x1[t]],x1[0]==0.5,x2[0]==0},{x1,x2},{t,0,5}];
Plot[Evaluate[x1[t]/.s],{t,0,5},PlotStyle->Automatic]
```

El solucionador detecta automáticamente las ecuaciones rígidas y las maneja. Usted puede especificar un método si lo desea, digamos de Runge-Kutta, incluyendo `Method-> "ExplicitRungeKutta"` en los argumentos de `NDSolve`. El parámetro `AccuracyGoal` es una opción para varias operaciones numéricas que especifica cuántos dígitos efectivos de exactitud deben buscarse en el resultado final. Para disminuir el error relativo, incluya `AccuracyGoal->∞` en los argumentos de `NDSolve`.

Soluciones numéricas con MuPAD

MuPAD proporciona dos funciones para obtener soluciones numéricas de problemas de valor inicial. La función `numeric::odesolve` devuelve una aproximación numérica de la solución en un punto específico. El tecleo `numeric:: odesolve2` devuelve una función que representa una aproximación numérica de la solución. Esta función es útil para graficar la solución. Para aplicar `numeric:: odesolve2` use los siguientes pasos:

1. Defina su problema de valor inicial como una lista o un conjunto.
2. Establezca un conjunto de campos en los que usted quiere obtener la solución.
3. Convierta el problema de valor inicial y los campos en un procedimiento aceptable por `numeric:: odesolve2`. La función `numeric:: ode2vectorfield` genera el procedimiento necesario.
4. Llame `numeric:: odesolve2` para aproximarse a la solución.
5. Use `plotfunc2d` para graficar la solución.

Por ejemplo, para resolver el problema de valor inicial

$$y' = y - 2e^{-x}, \qquad y(0) = 1$$

con MuPAD en el intervalo $0 \leq t \leq 12$, teclee

```
IVP := {y'(x) = y(x)-2*exp(-2*x),y(0) = 1}:
fields := [y(x)]:
ODE := numeric::ode2vectorfield(IVP, fields):
numApprox := numeric::odesolve2(ODE):
plotfunc2d(numApprox(x)[1], x = 0..12)
```

Para las ecuaciones del péndulo con $g = 9.81$, $L = 1$, $x_1(0) = 0.5$ y $x_2(0) = 0$, tenemos

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = x_2$$

y

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen} x_1$$

Para graficar la solución para $x_1(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 5$, teclee

```
IVP:={x1'(t)=x2(t),x2'(t)=-(9.81/1)*sin(x1(t)),x1(0)=0.5,x2(0)=0}:
fields:=[x1(t),x2(t)]:
ODE:=numeric::ode2vectorfield(IVP, fields):
numApprox:=numeric::odesolve2(ODE):
plotfunc2d(numApprox(t)[1],t=0..5)
```

La variable `DIGITS` controla la precisión numérica. El control adaptivo del tamaño de paso mantiene los errores relativos locales de discretización más pequeños que rtol $= 10^{-\text{DIGITS}}$, a menos que se especifique una tolerancia diferente con la opción `RelativeError = rtol`. Para valores pequeños del vector de solución, el error absoluto de discretización puede delimitarse por el umbral `atol` específico mediante la poción `AbsoluteError = atol`. Si no se especifica `AbsoluteError`, los errores relativos de discretización solo se controlan y mantienen por debajo de `rtol`. El control de errores puede desactivarse especificando un tamaño de paso fijo, `Stepsize = h`. Observe que el mecanismo adaptivo solo controla los errores locales. No proporciona ningún control del error global.

9-11 ▪ RESUMEN

Los métodos numéricos se usan frecuentemente en la práctica para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales. Los métodos numéricos dan las soluciones de ecuaciones diferenciales en puntos específicos, en vez dar una función continua en un intervalo. Cualquier ecuación diferencial de orden superior puede expresarse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y, por tanto, en este capítulo se enfatizaron los problemas de valor inicial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$$

Resolver ecuaciones diferenciales para $f(x, y) = f(x)$. Cuando la función f en la ecuación diferencial solo depende de x, la solución del problema de primer orden de valor inicial puede determinarse de manera progresiva a partir de

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx = y_n + I_n \tag{9-18}$$

para $n = 0, 1, 2;$ ... usando cualquier fórmula de integración. En este caso, la solución puede determinarse por integración numérica usando cualquiera de las técnicas estándar de integración numérica.

Si el intervalo de integración específico se divide en N segmentos de igual anchura h, el valor de la integral puede determinarse hallando las áreas de estos segmentos y sumándolas. En el *método de franjas rectangulares*, la altura promedio de un segmento se toma como el valor de la función $f(x)$ en el punto medio; en la *regla trapezoidal*, se toma como la media aritmética de los valores de la función en los puntos terminales; en la *regla de Simpson*, se determina de manera más precisa pero compleja. Usando estos métodos, es posible determinar el área de un segmento general entre los puntos x_n y x_{n+1}, con uno de los tres métodos siguientes:

Método de franjas rectangulares:

$$I_n \cong (x_{n+1} - x_n) f\left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}\right) \tag{9-4}$$

Regla trapezoidal:

$$I_n \cong (x_{n+1} - x_n)\frac{f(x_{n+1}) + f(x_n)}{2} \tag{9-9}$$

Regla de Simpson:

$$I_n \cong \frac{x_{n+1} - x_n}{6}\left[f(x_n) + 4f\left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}\right) + f(x_{n+1})\right] \tag{9-12}$$

La regla de Simpson es una mejor aproximación que las otras dos y da resultados mucho más exactos. Aquí $h = x_{n+1} - x_n$ se llama *tamaño de paso*.

Error relativo. En general, el valor obtenido por un método numérico tendrá una diferencia respecto al valor exacto; esta diferencia se llama *error* y usualmente se expresa en términos de *error relativo* o *porcentual* definido como

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{\text{valor exacto} - \text{valor aproximado}}{\text{valor exacto}}\right| \times 100\ (\%) \tag{9-7}$$

Resolver ecuaciones diferenciales para $f(x, y) = f(x, y)$. Cuando la función f depende tanto de x como de y, el procedimiento de solución numérica se basa en el hecho de que la función $f(x, y)$ representa la pendiente de la función de solución y en cualquier punto (x, y), y considera esta pendiente como constante para cada paso. La solución entonces se expresa como

Nuevo valor = valor anterior + pendiente × tamaño de paso

o

$$y_{n+1} = y_n + s_n h \tag{9-20}$$

Los métodos numéricos se distinguen uno de otro principalmente por la manera de estimar la pendiente s_n.

Método de Euler. En el método de Euler, que es el más simple de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales, esta pendiente se considera como el valor de la función $f(x, y)$ al principio de cada paso. Entonces el método de Euler se expresa como

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{9-28}$$

Entonces, si la solución se conoce en el punto x_n, el valor de la función $f(x, y)$ en ese punto y la solución en el siguiente punto x_{n+1} pueden determinarse por la ecuación 9-28.

Método de Euler mejorado. En el método de Euler mejorado, la pendiente se toma como la media aritmética de los valores de $f(x, y)$ en los puntos terminales del paso; el método se expresa como

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \widetilde{y}_{n+1})}{2} \tag{9-37a}$$

donde

$$\widetilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{9-37b}$$

El método de Euler mejorado pertenece a una clase de técnicas numéricas conocida como métodos predictores-correctores. La ecuación 9-37*b* predice primero el valor de y_{n+1}; luego la ecuación 9-37*a* lo corrige. Observe que la ecuación predictora en este caso es simplemente la fórmula de Euler y, por tanto y_{n+1} es la solución que obtendríamos usando el método de Euler. En el método de Euler mejorado, el resultado obtenido por el método de Euler se trata como un valor intermedio y se refina usando la ecuación correctora. Cuando la función $f(x, y)$ depende solo de x, el método de Euler mejorado se reduce a la regla trapezoidal.

Métodos de serie de Taylor. El método de serie de Taylor de tres términos, o de segundo orden, se basa en expresar la función de solución $y(x)$ como una serie de Taylor, que es una serie infinita de potencias, y luego retener solo los tres primeros términos de la serie para aproximarse a la función de solución. Después de algunas manipulaciones, resulta

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] \tag{9-42}$$

donde f_x y f_y son derivadas parciales de $f(x, y)$ con relación a x y a y, respectivamente. El método de serie de Taylor necesita la evaluación de las derivadas parciales de la función $f(x, y)$, que en general no es sencillo realizar. Los métodos de serie de Taylor de orden superior dan resultados muy exactos pero son engorrosos para usarse en la práctica porque necesitan la evaluación de derivadas de orden superior de la función $f(x, y)$.

Métodos de Runge-Kutta. Los métodos de Runge-Kutta ofrecen la exactitud de los métodos de serie de Taylor sin necesidad de evaluar ninguna derivada. Como los métodos de serie de Taylor, los métodos de Runge-Kutta tienen diferentes órdenes, y cada uno tiene diferentes versiones; cuanto mayor es el orden, mayor es la exactitud del método. El método de Runge-Kutta de primer orden es equivalente al método de Euler y al método de serie de Taylor de dos términos (primer orden). El método de Runge-Kutta de segundo orden es esencialmente equivalente al método de Euler mejorado y al método de serie de Taylor de tres términos (segundo orden).

Los métodos de Runge-Kutta más populares son los de cuarto orden, que tienen varias versiones, de los cuales, el más conocido y usado es el método de Runge-Kutta clásico de cuarto orden, que se expresa como

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad \textbf{(9-44}\boldsymbol{a}\textbf{)}$$

donde

$$k_1 = f(x_n, y_n) \qquad \textbf{(9-44}\boldsymbol{b}\textbf{)}$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \qquad \textbf{(9-44}\boldsymbol{c}\textbf{)}$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \qquad \textbf{(9-44}\boldsymbol{d}\textbf{)}$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \qquad \textbf{(9-44}\boldsymbol{e}\textbf{)}$$

Cuando la función $f(x, y)$ solo depende de x, tenemos $k_2 = k_3$, y la fórmula del método de Runge-Kutta clásico de cuarto orden se reduce a la regla de Simpson de integración numérica. La notable exactitud y simplicidad del método de Runge-Kutta clásico lo ha hecho uno de los métodos de un solo paso más extensamente utilizados para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Métodos de pasos múltiples. Todos los métodos numéricos explicados hasta ahora usan la solución en un solo punto x_n para predecir la solución y_{n+1} en el siguiente punto x_{n+1}, y apropiadamente se llaman *métodos de un solo paso*. También hay métodos que se basan en usar la solución de dos o más puntos precedentes para predecir la solución en el siguiente punto. Tales métodos se llaman métodos de paso múltiple. Las fórmulas de pasos múltiples se obtienen encontrando un polinomio que pase por las soluciones en varios puntos e integrando este polinomio entre dos puntos adecuados. Los métodos de puntos múltiples más conocidos son los métodos predictores-correctores que incluyen dos fórmulas: el primero predice el valor de la solución en el siguiente punto, y el segundo refina y corrige dicha solución. Uno de los métodos predictores-correctores de mayor popularidad es el método de Adams-Moulton, que se expresa como

$$\text{Predictor: } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \qquad \textbf{(9-49)}$$

$$\text{Corrector: } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \qquad \textbf{(9-51)}$$

Otro método predictor-corrector popular es el método de Milne, que se expresa como

$$\text{Predictor: } y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}) \qquad \textbf{(9-50)}$$

$$\text{Corrector: } y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}) \qquad \textbf{(9-52)}$$

En general, el método de Milne da resultados más exactos que el método de Adams-Moulton; sin embargo, el método de Milne a veces exhibe un comportamiento inestable. Por tanto, usualmente se prefiere el método de Adams-Moulton.

Resolución de sistemas de ecuaciones. Todos los métodos de resolución para ecuaciones individuales de primer orden también son aplicables a un sistema de ecuaciones de primer orden; sin embargo, en este caso, el método se aplica a cada ecuación durante cada paso antes de comenzar el siguiente paso. Por ejemplo, la solución del sistema de dos ecuaciones de primer orden con condiciones iniciales específicas dado como

$$y' = f(x, y, z), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(9-56}\boldsymbol{a}\textbf{)}$$

$$z' = g(x, y, z), \qquad z(x_0) = z_0 \qquad \textbf{(9-56}\boldsymbol{b}\textbf{)}$$

puede expresarse usando el método de Euler como

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n, z_n) \qquad \textbf{(9-58}\boldsymbol{a}\textbf{)}$$

$$z_{n+1} = z_n + hg(x_n, y_n, z_n) \qquad \textbf{(9-58}\boldsymbol{b}\textbf{)}$$

También es posible aplicar otros métodos a un sistema de dos o más ecuaciones.

Error de discretización y de redondeo. Los resultados obtenidos por cualquier método numérico son aproximaciones a los valores verdaderos de solución, y debe tenerse cuidado en su interpretación. El error en los métodos numéricos es resultado de dos efectos: uno de ellos es el *error de truncamiento* o *discretización*, que se debe a las aproximaciones hechas durante la formulación numérica del problema. El otro es el *error de redondeo*, que se produce al retener un número limitado de dígitos para representar el número durante los cálculos.

El error de discretización que se produce durante un solo paso se llama *error de discretización local*, el cual se acumula al aumentar el número de pasos, y el error total de discretización en cualquier paso se llama *error de discretización global o acumulado*.

El error de discretización aumenta al incrementarse el tamaño de paso h. Si el error de discretización local en un método numérico es proporcional a h^k, entonces el error de discretización global o acumulado es proporcional a h^{k-1}. El error de discretización local es proporcional a h^2 en el método de Euler, a h^3 en el método de Euler mejorado y en el método de serie de Taylor de tres términos, y a h^5 en los métodos de Runge-Kutta de cuarto orden, de Adams-Moulton y de Milne. Por tanto, reducir a la mitad el tamaño de paso reduce el error local por un factor de $1/4$ en el método de Euler, por un factor de $1/8$ en el método de Euler mejorado y en el método de serie de Taylor de tres términos, y por un factor de 1/32 en los métodos de Runge-Kutta de cuarto orden, de Adams-Moulton y de Milne.

Los programas informáticos comerciales modernos disponibles contienen implementaciones y extensiones altamente desarrolladas de los métodos descritos en este capítulo. Son sencillos de usar y suficientemente poderosos para manejar ecuaciones del tipo que se encuentran en este texto. Ilustramos cómo usar estas herramientas y cómo verificar la exactitud de sus resultados.

PERSPECTIVA HISTÓRICA

John Couch Adams (1819-1892). Matemático y astrónomo británico. Predijo la existencia y la posición de Neptuno a partir de los movimientos de otros planetas, usando sólo matemáticas. Desarrolló los métodos de Adams-Bashforth para resolver un modelo de ecuación diferencial de acción capilar propuesto por Bashforth.

Francis Bashforth (1819-1912). Matemático inglés. Llevó a cabo una serie de experimentos balísticos sistemáticos e inventó un cronógrafo para medir la velocidad de proyectiles. También realizó investigación sobre construcción de puentes y sobre los efectos de la tensión superficial en la forma de gotas de líquidos.

Leonhard Euler (1707-1783). Matemático y físico suizo. Hizo importantes descubrimientos en cálculo infinitesimal y teoría de gráficas. Contribuyó a la mecánica, la dinámica de fluidos, la óptica y la astronomía.

Richard Wesley Hamming (1915-1998). Matemático estadounidense. Su investigación condujo a la invención de los códigos Hamming de corrección de errores y a desarrollos en la ciencia de computadoras, procesamiento de señales y telecomunicaciones.

Martin Wilhelm Kutta (1867-1944). Matemático y aerodinámico alemán. Además de desarrollar de manera conjunta el método de Runge-Kutta, también desarrolló el perfil aerodinámico Zhukovsky-Kutta, el teorema Kutta-Zhukovsky y la condición Kutta en aerodinámica.

Forest Ray Moulton (1872-1952). Astrónomo estadounidense. Junto con Thomas Chamberlin propuso lo que ahora se conoce como hipótesis planetesimal Chamberlin-Moulton, la cual plantea que los planetas se fusionaron a partir de cuerpos más pequeños que ellos denominaron planetesimales.

Carl David Runge (1867-1927). Matemático, físico y espectroscopista alemán. Además de su obra en análisis numérico, llevó a cabo experimentos sobre líneas espectrales de diversos elementos con aplicaciones a la espectroscopía astronómica.

PROBLEMAS

9-1 Integración numérica

9-21C ¿Cuál es la utilidad de la integración numérica en la resolución de ecuaciones diferenciales?

9-22C ¿En qué se basa la integración numérica? ¿Cuándo será la integración numérica equivalente a la integración analítica?

9-23C ¿En qué se distinguen entre sí las técnicas de integración numérica?

9-24C ¿Cuál es la base del método de integración en cuadrícula?

9-25C ¿En qué se distingue la regla trapezoidal del método de franjas rectangulares de integración numérica? ¿Cuál de estos métodos es más exacto?

9-26C Considere una función lineal $f(x)$ que se va a integrar numéricamente en un intervalo específico usando el método de franjas rectangulares y la regla trapezoidal dividiendo el intervalo en dos segmentos iguales. ¿Cuál sería su respuesta si el intervalo se divide en cuatro segmentos iguales?

9-27C Considere un polinomio de segundo grado $f(x)$ que va a integrarse numéricamente en un intervalo específico usando la regla trapezoidal dividiendo el intervalo de integración en 10 segmentos iguales. Ahora la integración se divide al fragmentar el intervalo en 20 segmentos iguales. ¿Cómo cree usted que cambiarían los resultados obtenidos en ambos casos? ¿Cuál sería su respuesta si se usara la regla de Simpson para la integración numérica en ambos casos?

Cálculos manuales

Evalúe las siguientes integrales usando una calculadora dividiendo el intervalo de integración en a) un segmento y b) dos segmentos, usando los métodos indicados. También realice analíticamente la integración y determine el error relativo de los resultados obtenidos por integración numérica:

9-28 $\int_{-5}^{5}(x+8)\,dx$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal.

9-29 $\int_0^1 xe^{2x}dx$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal.

9-30 $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$. Regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-31 $\int_0^{\pi} e^x(\operatorname{sen} x-1)\,dx$. Regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-32 $\displaystyle\int_2^6 \frac{x}{x^2-1}dx$. Método de franjas rectangulares; regla de Simpson.

9-33 $\int_0^2 (2^{x2}+1)\,dx$. Método de franjas rectangulares; regla de Simpson.

9-34 $\int_1^3 (x^3-1)e^{2x}\,dx$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-35 $\int_0^4 xe^{-x^2}\,dx$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-36 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal; regla de Simpson.

Aplicaciones de computadora

Evalúe las siguientes integrales escribiendo un programa y dividiendo el intervalo de integración en a) 10 segmentos y b) 100 segmentos, usando los métodos indicados. También realice analíticamente la integración y determine el error relativo de los resultados obtenidos por integración numérica:

9-37 $\int_0^2 (x-1)\,dx$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal.

9-38 $\int_{-5}^{5}(x+8)\,dx$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal.

9-39 $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal.

9-40 $\int_0^\pi x\cos x\,dx$. Regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-41 $\int_0^\pi e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx$. Regla trapezoidal; método de franjas rectangulares; regla de Simpson.

9-42 $\displaystyle\int_2^6 \frac{x}{x^2-1}\,dx$. Método de franjas rectangulares; regla de Simpson.

9-43 $\int_0^2 (2x^2+1)\,dx$. Método de franjas rectangulares; regla de Simpson.

9-44 $\int_1^3 (x^3-1)e^{2x}\,dx$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-45 $\int_0^4 xe^{-x^2}\,dx$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-46 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$. Regla de franjas rectangulares; regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-2 Solución numérica de ecuaciones diferenciales

9-47 ¿Cuál es la base de los métodos numéricos que se usan para resolver problemas de valor inicial de primer orden?

9-48 ¿Por qué la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ es más sencilla de resolver numéricamente cuando la función f solo depende de x?

9-49 ¿Cuándo es posible usar técnicas de integración numérica para resolver numéricamente problemas de valor inicial de primer orden?

9-50 ¿En qué se distinguen los métodos numéricos de pasos múltiples de los de un solo paso?

9-51 ¿Cómo se define el error relativo correspondiente a la solución numérica de ecuaciones diferenciales?

Cálculos manuales

Usando una calculadora, determine la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) un paso y b) dos pasos, usando un tamaño de paso $h = 0.2$. Use los métodos indicados para la integración numérica. También resuelva analíticamente los problemas de valor inicial y determine el error relativo de los resultados numéricos:

9-52 $y' = x^2 + 1$, $y(0) = 2$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal.

9-53 $y' = (x-1)e^x$, $y(1) = 3$. Regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-54 $y' = x\cos 2x$, $y(0) = 1$. Regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-55 $y' = \dfrac{x}{x^2+1}$, $y(2) = -1$. Método de franjas rectangulares; regla de Simpson.

9-56 $y' = \dfrac{1}{x^{0.2}}$, $y(1) = 4$. Método de franjas rectangulares; regla de Simpson.

9-57 $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $y(0) = 1$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-58 $y' = 2xe^{-x^2}$, $y(0) = 2$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal; regla de Simpson.

Aplicaciones de computadora

Escribiendo un programa, determine la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) 10 pasos, con un tamaño de paso $h = 0.2$, y b) 20 pasos, con un tamaño de paso $h = 0.1$. Use los métodos indicados para la integración numérica. También resuelva analíticamente los problemas de valor inicial, y determine el error relativo de los resultados numéricos:

9-59 $y' = x - 1$, $y(0) = 1$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal.

9-60 $y' = x^2 + 1$, $y(0) = 2$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal.

9-61 $y' = (x-1)e^x$, $y(1) = 3$. Regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-62 $y' = x\cos 2x$, $y(0) = 1$. Regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-63 $y' = \dfrac{x}{x^2+1}$, $y(2) = -1$. Método de franjas rectangulares; regla de Simpson.

9-64 $y' = \dfrac{1}{x^{0.2}}$, $y(1) = 4$. Método de franjas rectangulares; regla de Simpson.

9-65 $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $y(0) = 1$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-66 $y' = 2xe^{-x^2}$, $y(0) = 1$. Método de franjas rectangulares; regla trapezoidal; regla de Simpson.

9-3 Método de Euler

9-67 ¿En qué se basa el método de Euler? ¿Cómo se usa para resolver el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$?

9-68 En un diagrama y-x, explique cómo se obtiene la solución de un problema de valor inicial de primer orden en x_1 por el método de Euler usando una condición inicial en x_0.

9-69 En el método de Euler, ¿por qué usamos el valor de la función $f(x, y)$ en el punto terminal izquierdo en vez de en el punto medio de un intervalo al resolver la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$?

Cálculos manuales

Usando una calculadora, determine la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) un paso y b) dos pasos, usando un tamaño de paso $h = 0.2$, usando el método de Euler. También resuelva analíticamente los problemas de valor inicial y determine el error relativo de los resultados numéricos:

9-70 $y' = x^2 - \dfrac{x}{y} + 2$, $y(0) = 5$

9-71 $y' = 5y$, $y(0) = 1$

9-72 $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 2$

9-73 $y' = x^2y^3$, $y(0) = 3$

9-74 $y' = 4xy$, $y(1) = 0$,

9-75 $y' = x(y^2 - 1)$, $y(1) = 1$

9-76 $y' = \dfrac{x^2}{y^2}, y(1) = -2$

9-77 $y' = \dfrac{x^2}{y^2 + 1}, y(1) = 4$

9-78 $y' = \sqrt{x} - 1, y(1) = 2$

Aplicaciones de computadora

Escribiendo un programa, determine la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) 10 *pasos con un tamaño de paso* $h = 0.2$ *y b)* 20 *pasos con un tamaño de paso* $h = 0.1$*, usando el método de Euler. También resuelva analíticamente los problemas de valor inicial y determine el error relativo de los resultados numéricos:*

9-79 $y' = x^2 + 2y, y(0) = 0$

9-80 $y' = y x^2, y(1) = 1$

9-81 $y' = 3ye^{x}, y(0) = -2$

9-82 $y' = 2y - 3x + 4, y(2) = 4$

9-83 $y' = y, y(1) = 1$

9-84 $y' = y - x, y(0) = 3$

9-85 $y' = 2xy, y(0) = 0$

9-86 $y' = y^1 = x^2 y^{1/2}, y(0) = 1$

9-87 $y' = -xe^{y}, y(0) = 1$

9-88 $y' = x^2 - y, y(0) = 1$

9-89 $y' = e^{-y}, y(0) = 0$

9-90 $y' = x + y + 3, y(1) = 4$

9-91 $y' = \dfrac{4xy}{y^2 + x^2}, y(1) = 2$

9-92 $y' = -y^2, y(0) = 1$

9-93 $y' = x\sqrt{y - 1}, y(1) = 5$

9-4 Errores en métodos numéricos

9-94 ¿Cuál es la causa del error de discretización? ¿En qué se distingue el error de discretización global del local?

9-95 ¿El error global (acumulado) de discretización puede ser menor que el error local durante un paso? Explique.

9-96 ¿Cómo se relaciona la fórmula de Euler con la expansión de serie de Taylor de la función solución?

9-97 Explique por qué el error de discretización local del método de Euler es proporcional a h^2.

9-98 Expliqué por qué el error de discretización global del método de Euler es proporcional al tamaño de paso h.

9-99 ¿A qué se debe el error de redondeo? ¿Qué clase de cálculos son más susceptibles al error de redondeo?

9-100 ¿Qué sucede con los errores de discretización y de redondeo al disminuir el tamaño de paso?

9-101 Sugiera algunas formas prácticas de reducir el error de redondeo.

9-102 ¿Cuál es una manera práctica de verificar si el error de redondeo ha sido importante en los cálculos?

9-103 ¿Cuál es una manera práctica de verificar si el error de discretización ha sido importante en los cálculos?

Cálculos manuales

Usando una calculadora, determine el error de discretización local y global en la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) un paso y b) dos pasos, usando un tamaño de paso $h = 0.2$ *y el método de Euler:*

9-104 $y' = x\sqrt{y}, y(0) = 5$

9-105 $y' = x^2e^{y}, y(2) = -2$

9-106 $y' = 2x(y - 1), y(2) = 2$

9-107 $y' = x^3 - y, y(0) = 0$

9-108 $y' = e^{x} + 2y, y(1) = 0$

Aplicaciones de computadora

Escriba un programa para determinar los errores de discretización local y global en la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) 10 *pasos con un tamaño de paso* $h = 0.2$ *y b)* 20 *pasos con un tamaño de paso* $h = 0.1$*, usando el método de Euler. Enliste los resultados después de cada paso:*

9-109 $y' = 1 - 2x - 3y, y(0) = 0$

9-110 $y' = x\sqrt{y}, y(0) = 4$

9-111 $y' = x^2e^{y}, y(0) = -2$

9-112 $y' = 2x(y - 1), y(2) = 2$

9-113 $y' = x^3 - y, y(0) = 0$

9-114 $y' = e^{x} + 2y, y(1) = 0$

Escriba un programa para determinar el mayor tamaño de paso para usarse con el método de Euler que garantice que el resultado numérico en $x = 1$ *redondeado a tres dígitos significativos es idéntico a la solución exacta. (Sugerencia: comience con el tamaño de paso* $h = 0.1$ *y manténgase reduciendo a la mitad el tamaño de paso hasta que los primeros tres dígitos de los resultados ya no cambien.)*

9-115 $y' = x + 2y, y(0) = 2$

9-116 $y' = 3x^2y, y(0) = 1$

9-117 $y' = 2y, y(0) = 5$

9-118 $y' = 2y - y^2, y(0) = 4$

9-119 $y' = x^3(y + 2), y(0) = 3$

9-120 $y' = e^{x} - y, y(0) = 0$

9-5 Método de Euler mejorado

9-121 ¿Por qué el método de Euler mejorado se clasifica como un predictor-corrector? ¿Por qué la fórmula Euler mejorada necesita una fórmula predictora?

9-122 ¿En qué se distingue el método de Euler modificado del método de Euler mejorado?

9-123 ¿En qué condiciones será idéntica la resolución del problema de valor inicial $y' = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$ por el método de Euler mejorado al resolverlo por integración numérica usando la regla trapezoidal?

9-124 Desarrolle la formulación del método de Euler modificado y dé su interpretación geométrica en un diagrama y-x.

Cálculos manuales

Usando una calculadora, determine la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) un paso y b) dos pasos, usando un tamaño de paso $h = 0.2$ y el método de Euler mejorado. También resuelva analíticamente los problemas de valor inicial y determine el error relativo en los resultados numéricos:

9-125 $y' = \dfrac{y-4}{x^2-1}, y(0) = 5$

9-126 $y' = 5y, y(0) = 1$

9-127 $y' = y^2 + 1, y(0) = 1$

9-128 $y' = x^2y^3, y(0) = 3$

9-129 $y' = 4xy, y(1) = 10$

9-130 $y' = x(y^2 - 1), y(1) = 1$

9-131 $y' = \dfrac{x^2}{y^2}, y(1) = -2$

9-132 $y' = \dfrac{x^2}{y^2+1}, y(1) = 4$

9-133 $y' = \sqrt{x} - 1, y(1) = 2$

Aplicaciones de computadora

Escriba un programa para determinar la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) 10 pasos con un tamaño de paso $h = 0.2$ y b) 20 pasos con un tamaño de paso $h= 0.1$, usando el método de Euler mejorado. También resuelva analíticamente los problemas de valor inicial y determine el error relativo en los resultados numéricos:

9-134 $y' = x^2 + 2y, y(0) = 0$

9-135 $y' = yx^2, y(1) = 1$

9-136 $y' = 3ye^x, y(0) = -2$

9-137 $y' = 2y - 3x + 4, y(2) = 4$

9-138 $y' = y, y(1) = 1$

9-139 $y' = y - x, y(0) = 3$

9-140 $y' = 2xy, y(0) = 0$

9-141 $y' = x^2\sqrt{y}, y(0) = 1$

9-142 $y' = -xe^y, y(0) = 1$

9-143 $y' = x^2 - y, y(0) = 1$

9-144 $y' = e^{-y}, y(0) = 0$

9-145 $y' = x + y + 3, y(1) = 4$

9-146 $y' = \dfrac{4xy}{x^2+y^2}, y(1) = 2$

9-147 $y' = -y^2, y(0) = 1$

9-148 $y' = x\sqrt{y-1}, y(1) = 5$

9-6 Método de serie de Taylor

9-149 ¿Por qué el método de serie de Taylor de tres términos es un método de segundo orden?

9-150 Si el método de serie de Taylor de tres términos da la solución exacta de $y' = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$, determine la forma general de la función $f(x, y)$.

9-151 ¿Qué puede decir acerca de la magnitud del error de discretización local correspondiente al método de serie de Taylor de seis términos?

9-152 Desarrolle la formulación del método de serie de Taylor de cuatro términos para la solución del problema de valor inicial $y' = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$.

Cálculos manuales

Usando una calculadora, determine la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) un paso y b) dos pasos, usando un tamaño de paso $h = 0.2$ y el método de serie de Taylor de tres términos. También resuelva analíticamente los problemas de valor inicial y determine el error relativo en los resultados numéricos:

9-153 $y' = \dfrac{y-4}{x^2-1}, y(0) = 5$

9-154 $y' = 5y, y(0) = 1$

9-155 $y' = y^2 + 1, y(0) = 1$

9-156 $y' = x^2y^3, y(0) = 3$

9-157 $y' = 4xy, y(1) = 10$

Aplicaciones de computadora

Escriba un programa para determinar la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) 10 pasos con un tamaño de paso $h = 0.2$ y b) 20 pasos con un tamaño de paso $h = 0.1$, usando el método de serie de Taylor de tres términos. También resuelva analíticamente los problemas de valor inicial y determine el error relativo en los resultados numéricos:

9-158 $y' = x^2 + 2y, y(0) = 1$

9-159 $y' = yx^2, y(1) = 1$

9-160 $y' = 3ye^x, y(0) = -2$

9-161 $y' = 2y - 3x + 4, y(2) = 4$

9-162 $y' = y, y(1) = 1$

9-163 $y' = y - x, y(0) = 3$

9-164 $y' = 2xy, y(0) = 0$

9-165 $y' = x^2\sqrt{y}, y(0) = 1$

9-7 Método de Runge-Kutta

9-166C Al resolver el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$ con el método de Runge-Kutta clásico, ¿en qué valores de x se evalúa la función $f(x, y)$ durante el paso entre x_n y x_{n-1}?

9-167C ¿Cómo puede usted modificar el programa MATLAB de la figura 9-34 para el método de Runge-Kutta clásico y resolver el problema de valor inicial $y' = x^2 + y^2$ con $y(0) = 2$ desde $x = 0$ hasta 1 usando un tamaño de paso $h = 0.1$? (*Sugerencia:* necesita modificar sólo un renglón.)

9-168C ¿Cuál método numérico cumplirá con los criterios de error especificados con el menor número de cálculos: Euler, Euler mejorado o Runge-Kutta clásico?

9-169C ¿Cómo se relacionan entre sí el método clásico de Runge-Kutta y la regla de Simpson?

9-170C ¿Podríamos modificar el tamaño del paso h durante los cálculos en el método clásico de Runge-Kutta?

Cálculos manuales

Usando una calculadora, determine la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) un paso y b) dos pasos, usando un tamaño de paso $h = 0.2$ y el método de Runge-Kutta clásico de cuarto orden. También resuelva analíticamente los problemas de valor inicial y determine el error relativo en el resultado numérico:

9-171 $y' = \dfrac{y-4}{x^2-1}, y(0) = 5$

9-172 $y' = 5y, y(0) = 1$

9-173 $y' = y^2 + 1, y(0) = 1$

9-174 $y' = x^2y^3, y(0) = 3$

9-175 $y' = 4xy, y(1) = 10$

9-176 $y' = x(y^2 - 1), y(1) = 1$

9-177 $y' = \dfrac{x^2}{y^2}, y(1) = -2$

9-178 $y' = \dfrac{x^2}{y^2+1}, y(1) = 4$

9-179 $y' = \sqrt{x} - 1, y(1) = 2$

Aplicaciones de computadora

Escriba un programa para determinar la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) 10 pasos con un tamaño de paso $h = 0.2$ y b) 20 pasos con un tamaño de paso $h = 0.1$, usando el método de Runge-Kutta clásico de cuarto orden. También resuelva analíticamente los problemas de valor inicial y determine el error relativo de los resultados numéricos:

9-180 $y' = x^2 + 2y, y(0) = 0$

9-181 $y' = yx^2, y(1) = 1$

9-182 $y' = 3ye^x, y(0) = -2$

9-183 $y' = 2y - 3x + 4, y(2) = 4$

9-184 $y' = y, y(1) = 1$

9-185 $y' = y - x, y(0) = 3$

9-186 $y' = 2xy, y(0) = 0$

9-187 $y' = x^2\sqrt{y}, y(0) = 1$

9-188 $y' = -xe^y, y(0) = 1$

9-189 $y' = x^2 - y, y(0) = 1$

9-190 $y' = e^{-y}, y(0) = 0$

9-191 $y' = x + y + 3, y(1) = 4$

9-192 $y' = \dfrac{4xy}{x^2+y^2}, y(1) = 2$

9-193 $y' = -y^2, y(0) = 1$

9-194 $y' = x\sqrt{y-1}, y(1) = 5$

9-8 Métodos de pasos múltiples y predictores-correctores

9-195 ¿Podemos cambiar el tamaño de paso h durante los cálculos al usar el método de pasos múltiples?

9-196 ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de los métodos de pasos múltiples?

9-197 ¿El método de Euler mejorado es de pasos múltiples? ¿Es un método predictor-corrector?

9-198 ¿Qué es el polinomio de interpolación?

9-199 ¿Por qué los métodos de un solo paso también se llaman métodos de inicio?

9-200 Explique cómo se obtienen las fórmulas predictoras de pasos múltiples de tercer orden y cómo se obtienen las fórmulas correctoras de tercer orden.

9-201 El método predictor-corrector de Milne, en general, da resultados más exactos que el método de Adams-Moulton. ¿Por qué, entonces, se prefieren usualmente las fórmulas de Adams-Moulton sobre las de Milne?

9-202 ¿Cómo reconocería usted la inestabilidad en una solución numérica?

9-203 Cuando se tienen las dos fórmulas de un método predictor-corrector, ¿cómo puede distinguirse cuál es la fórmula predictora y cuál es la correctora?

9-204 ¿Como mejora la iteración interna la exactitud de un método predictor-corrector?

Cálculos manuales

Usando una calculadora, determine la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) un paso y b) dos pasos, usando un tamaño de paso $h = 0.2$ y el método predictor-corrector de Adams-Moulton. También resuelva analíticamente los problemas de valor inicial y determine el error relativo en los resultados numéricos:

9-205 $y' = \dfrac{10x+1}{y+4}, y(0) = 5$

9-206 $y' = 5y, y(0) = -1$

9-207 $y' = y^2 + 1, y(0) = -2$

9-208 $y' = x^2y^3, y(0) = -1$

9-209 $y' = 4xy - x, y(1) = 0$

Usando una calculadora, determine la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) un paso y b) dos pasos, usando un tamaño de paso $h = 0.2$ y el método predictor-corrector de Milne. También resuelva analíticamente los problemas de valor inicial y determine el error relativo en los resultados numéricos:

9-210 $y' = x(y^2 - 1), y(1) = 0$

9-211 $y' = \dfrac{x^2}{y^2}, y(1) = -2$

9-212 $y' = \dfrac{x^2}{y^2+1}, y(1) = 4$

9-213 $y' = \sqrt{x} - 1, y(1) = 2$

Aplicaciones de computadora

Escriba un programa para determinar la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) 10 pasos con un tamaño de paso $h = 0.2$ y b) 20 pasos con un tamaño de paso $h = 0.1$, usando el método predictor-corrector de Adams-Moulton. También resuelva analíticamente los problemas de valor inicial y determine el error relativo en los resultados numéricos:

9-214 $y' = x^2 + 2y,\ y(0) = 0$

9-215 $y' = yx^2,\ y(1) = 1$

9-216 $y' = 3ye^x,\ y(0) = -2$

9-217 $y' = 2y - 3x + 4,\ y(2) = 4$

9-218 $y' = y,\ y(1) = 1$

9-219 $y' = y - x,\ y(0) = 3$

9-220 $y' = 2xy,\ y(0) = 0$

9-221 $y' = x^2\sqrt{y},\ y(0) = 1$

Escriba un programa para determinar la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) 10 *pasos con un tamaño de paso h* = 0.2 *y b)* 20 *pasos con tamaño de paso h* = 0.1, *usando el método predictor-corrector de Milne. También resuelva analíticamente los problemas de valor inicial y determine el error relativo en los resultados numéricos:*

9-222 $y' = -xe^y,\ y(0) = 1$

9-223 $y' = x^2 - y,\ y(0) = 1$

9-224 $y' = e^{-y},\ y(0) = 0$

9-225 $y' = x + y + 3,\ y(1) = 4$

9-226 $y' = \dfrac{4xy}{x^2 + y^2},\ y(1) = 2$

9-227 $y' = -y^2,\ y(0) = 1$

9-9 Sistemas de ecuaciones de primer orden

9-228 Explique cómo usaría un método numérico para resolver un problema de valor en la frontera de orden n en el que algunas de las variables se especifican en x_0 y las demás se especifican en x_1.

9-229 Explique cómo aplicaría el método de Euler mejorado a un sistema de tres problemas de valor inicial de primer orden y escriba la formulación.

Cálculos manuales

Usando una calculadora, determine la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) un paso y b) dos pasos, usando un tamaño de paso h = 0.2 *y el método de Euler:*

9-230 $y' = z,\quad y(0) = 0$
$z' = x + y + z,\quad z(0) = 1$

9-231 $y' = z - y - e^{-x},\quad y(0) = 1$
$z' = z + y + 2e^{-x},\quad z(0) = 0$

9-232 $y'' - 4y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$

9-233 $y'' + 2y' + y = 5,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$

Usando una calculadora, determine la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) un paso y b) dos pasos, con un tamaño de paso h = 0.2, *usando el método de Runge-Kutta clásico:*

9-234 $y' = y - 4z,\quad y(0) = 2$
$z' = y + z - 2,\quad z(0) = 1$

9-235 $y' = y + z,\quad y(0) = 0$
$z' = y - z - 1,\quad z(0) = 2$

9-236 $y' = 2z + 3y,\quad y(0) = 2$
$z' = 3z - 2y,\quad z(0) = 0$

9-237 $y'' + y' + y = 5,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$

9-238 $y''' + 3y'' + 3y' + y = 1 + e^{2x},\ y(0) = 0,$
$y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$

Aplicaciones de computadora

Escriba un programa para determinar la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) 10 *pasos con un tamaño de paso h* = 0.2 *y b)* 20 *pasos con un tamaño de paso h* = 0.1, *usando el método de Euler:*

9-239 $y' = 2y - 3z,\quad y(0) = 2$
$z' = 4y - 5z,\quad z(0) = 3$

9-240 $y' = z,\quad y(0) = 0$
$z' = x + y + z,\quad z(0) = 1$

9-241 $y' = z - y - e^{-x},\quad y(0) = 1$
$z' = z + y + 2e^{-x},\quad z(0) = 0$

9-242 $y'' - 4y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$

9-243 $y'' + 2y' + y = 5,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$

Escriba un programa para determinar la solución numérica de los siguientes problemas de valor inicial después de a) 10 *pasos con un tamaño de paso h* = 0.2 *y b)* 20 *pasos con un tamaño de paso h*= 0.1, *usando el método de Runge-Kutta clásico:*

9-244 $y' = y - 4z,\quad y(0) = 2$
$z' = y + z - 2,\quad z(0) = 1$

9-245 $y' = y + z,\quad y(0) = 0$
$z' = y - z - 1,\quad z(0) = 2$

9-246 $y' = 2z + 3y,\quad y(0) = 2$
$z' = 3z - 2y,\quad z(0) = 0$

9-247 $y'' + y' + y = 5,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$

9-248 $y''' + 3y'' + 3y' + y = 1 + e^{2x},\ y(0) = 0,$
$y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$

9-10 Soluciones numéricas con programas comerciales

Use un programa comercial para graficar la solución de los siguientes problemas de valor inicial. Explique cómo seleccionar un valor superior para x y cómo verificar la exactitud de la solución:

9-249 $y' = x^2 + 1,\ y(0) = 2$

9-250 $y' = (x - 1)e^x,\ y(1) = 3$

9-251 $y' = x\cos 2x,\ y(0) = 1$

9-252 $y' = \dfrac{x}{x^2 + 1},\ y(2) = -1$

9-253 $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}},\ y(0) = 1$

9-254 $y' = 2xe^{-x^2},\ y(0) = 2$

9-255 $y' = x^2 + 2y,\ y(0) = 0$

9-256 $y' = y\,x^2,\ y(1) = 1$

9-257 $y' = e^{xy} - 3e^x,\ y(0) = -2$

9-258 $y' = 2y - 3x + 4,\ y(2) = 4$

9-259 $y' = y - x, y(0) = 3$

9-260 $y' = x^3y - e^x + 1, y(0) = 1$

9-261 $y' = xe^y, y(0) = 1$

9-262 $y' = x^2 - y, y(0) = 1$

9-263 $y' = e^{-y}, y(0) = 0$

9-264 $y' = x + y + 3, y(1) = 4$

9-265 $y' = \dfrac{4xy}{y^2 + 1}, y(1) = 2$

9-266 $y' = y^2, y(0) = 1$

9-267 $y' = x\sqrt{y - 1}, y(1) = 5$

9-268 $y' = 1 - 2x - 3y, y(0) = 0$

9-269 $y' = x\sqrt{y}, y(0) = 5$

9-270 $y' = x^2 \ln y, y(2) = 5$

9-271 $y' = 2x(y - 1), y(2) = 2$

9-272 $y' = x^3 - y, y(0) = 0$

9-273 $y' = e^x + 2y, y(1) = 0$

9-274 $y' = x + 2y, y(0) = 2$

9-275 $y' = 2e^{xy}, y(0) = 2$

9-276 $y' = x^3(y + 2), y(0) = 3$

9-277 $y' = e^x - y, y(0) = 0$

9-278 $y' = yx^{2x}, y(1) = 1$

9-279 $y' = 2y - 3z, \quad y(0) = 2$
$z' = 4y - 5z, \quad z(0) = 3$

9-280 $y' = z, \quad y(0) = 0$
$z' = x + y + z, \quad z(0) = 1$

9-281 $y' = z - y - e^{-x}, \quad y(0) = 1$
$z' = z + y + 2e^{-x}, \quad z(0) = 0$

9-282 $y' = y - 4z, \quad y(0) = 2$
$z' = y + z - 2, \quad z(0) = 1$

9-283 $y' = y + z, \quad y(0) = 0$
$z' = y - z - 1, \quad z(0) = 2$

9-284 $y' = 2z + 3y, \quad y(0) = 2$
$z' = 3z - 2y, \quad z(0) = 0$

9-285 $y''' + 3y'' + 3y' + y = 1 + e^{2x}, y(0) = 0,$
$y'(0) = 0, y'''(0) = 0$

9-286 Aun cuando una ecuación sea lineal, puede ser difícil resolverla si la función de fuerza es una función complicada. La ecuación para el voltaje y a través del capacitor de un circuito RC es

$$RC\,\frac{dy}{dt} + y = v(t)$$

donde $v(t)$ es el voltaje aplicado. Suponga que $RC = 0.2$ s y que el voltaje del capacitor es inicialmente 2 V. También suponga que el voltaje aplicado es $v(t) = 10[2 - e^{-t}\,\text{sen}\,(5\pi t)]$ V. Grafique el voltaje $y(t)$ para $0 \leq t \leq 5$ s.

9-287 La ecuación que describe la altura de agua h en un tanque esférico con un desagüe en el fondo es

$$\pi h(2r - h)\frac{dh}{dt} = -C_d A\sqrt{2gh}$$

Suponga que el radio del tanque es $r = 3$ m y el orificio circular de desagüe tiene un radio de 2 cm. Suponga que $C_d = 0.5$ y que la altura inicial del agua es $h(0) = 5$ m. Use $g = 9.81$ m/s^2.

a) Use una aproximación para estimar cuánto tarda el tanque en vaciarse.

b) Grafique la altura del agua como función del tiempo hasta que $h(t) \approx 0$.

9-288 Cierto vehículo terrestre de propulsión por chorro está sujeto a una fuerza de retardo no lineal. Su ecuación de movimiento, en unidades británicas, es

$$50\frac{dv}{dt} = f - (20v + 0.05\,v^2)$$

Use un método numérico para graficar la velocidad del vehículo como función del tiempo si la fuerza del chorro es constante en 8 000 lb y el vehículo parte del reposo.

9-289 El siguiente modelo describe una masa soportada por un resorte templado no lineal. Las unidades son SI. Use $g = 9.81$ m/s^2.

$$y'' = 5g - (900y + 1\,700y^3)$$

Suponga que $y'(0) = 0$. Use un método numérico para graficar la solución para dos condiciones iniciales diferentes.

a) $y(0) = 0.06$ *b*) $y(0) = 0.1$

9-290 La ecuación de Van der Pol se usa para describir muchos procesos oscilatorios. Es

$$y'' + \mu(1 - y^2)y' + y = 0$$

donde $y' = dy/dt$. Grafique $y(t)$ para $\mu = 1$ y $0 \leq t \leq 20$, usando las condiciones iniciales $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$.

9-291 La ecuación de movimiento para un péndulo cuya base acelera horizontalmente con una aceleración $a(t)$ es

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta = a(t)\cos\theta$$

Suponga que $g = 9.81$ m/s^2, $L = 1$ m, y $\theta'(0) = 0$. Grafique $\theta(t)$ para $0 \leq t \leq 10$ s para los siguientes casos:

a) La aceleración es constante: $a = 5$ m/s^2 y $\theta(0) = 0.5$ rad.

b) La aceleración es constante: $a = 5$ m/s^2 y $\theta(0) = 3$ rad.

c) La aceleración es lineal con el tiempo: $a = 0.5t$ m/s^2 y $\theta(0) =$ 3 rad.

9-292 La ecuación de Van der Pol es

$$y'' = \mu(1 - y^2)y' + y = 0$$

donde $y' = dy/dt$. Esta ecuación es rígida para valores grandes del parámetro μ. Compare el desempeño del solucionador numérico básico de su programa seleccionado con la de su solucionador de ecuaciones rígidas (si usted usa MATLAB, éstos son `ode45` y `ode15s`). Use $\mu = 1\,000$ y $0 \leq t \leq 3\,000$, con las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$. Grafique $y(t)$ contra t.

9-293 Aun cuando un conjunto de ecuaciones sea lineal, éstas pueden ser difíciles de resolver si la función de fuerza es una función complicada. Las ecuaciones para un motor de dc controlado por armadura son las siguientes. La corriente del motor es i, y su velocidad de rotación es ω:

$$L\frac{di}{dt} = -Ri - K_b\omega + v(t)$$
$$I\frac{d\omega}{dt} = K_T i - c\omega$$

donde L, R e I son la inductancia, la resistencia y la inercia del motor; K_T y K_b son la constante de par de torsión y la constante de contra-fem; c es una constante de amortiguación viscosa, y $v(t)$ es el voltaje aplicado. Use los valores $R = 0.8\ \Omega$, $L = 0.003$ H, $K_T = 0.05$ N · m/A, $K_b = 0.05$ V · s/rad, $c = 0$, e $I = 8 \times 10^{-5}$ kg · m^2.

a) Suponga que el voltaje aplicado es 20 V. Grafique la velocidad del motor y la corriente contra el tiempo. Elija un tiempo final suficientemente largo para mostrar la velocidad del motor haciéndose constante.

b) Suponga que el voltaje aplicado es trapezoidal:

$$v(t) = \begin{Bmatrix} 400t & 0 \le t < 0.05 \\ 20 & 0.05 \le t \le 2 \\ -400(t - 0.2) + 20 & 0.2 < t \le 0.25 \\ 0 & t > 0.25 \end{Bmatrix}$$

Grafique la velocidad del motor contra el tiempo para $0 \le t \le 0.3$ s y el voltaje aplicado contra el tiempo. ¿Qué tan bien sigue la velocidad del motor un perfil trapezoidal?

9-294 El término *comportamiento caótico* se refiere al comportamiento de un conjunto de ecuaciones muy sensible a las condiciones iniciales. Algunas ecuaciones no lineales muestran comportamiento caótico. Un ejemplo es el *problema de tres cuerpos*, que es un conjunto de ecuaciones que describe el movimiento de tres objetos debido a su atracción gravitacional mutua. Un conjunto más simple de ecuaciones que muestran comportamiento caótico es el *sistema de Lorenz*. Para un conjunto específico de coeficientes, estas ecuaciones son

$$\frac{dx}{dt} = 10(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = 28x - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z + xy$$

a) Grafique la solución para $x(t)$ usando las condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = 4$ y $z(0) = 5$. Luego aumente la condición inicial para $z(0)$ en una pequeña cantidad ε hasta que encuentre un valor de ε para el cual las soluciones de $x(t)$ comiencen a ser significativamente diferentes. Anote el tiempo en el que comienzan a diferir.

b) Repita la parte *a*) usando una tolerancia de error más reducida para su solucionador y anote el tiempo en que las soluciones comienzan a diferir. Compare este tiempo con el valor encontrado en la parte *a*). ¿El resultado es lo que usted esperaría?

ÍNDICE ANALÍTICO

J

K

L

M

U

V

W

Y

Integrales

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1},\; n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$$

$$\int (x+a)^n\,dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1},\quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{x-a}\,dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x \pm a}} = 2\sqrt{x \pm a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2})$$

$$\int \ln\, ax\,dx = x\ln ax - x$$

$$\int \frac{\ln ax}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln ax)^2$$

$$\int \ln(ax+b)\,dx = \left(x + \frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x,\; a \neq 0$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int xe^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax}$$

$$\int \operatorname{sen}\, ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax$$

$$\int \tan^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tan ax - x$$

$$\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\operatorname{sen} ax$$

Integrales

$$\int \cot^2 ax\, dx = -\frac{\cot ax}{a} - x$$

$$\int \sec ax\, dx = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \tan ax)$$

$$\int \csc ax\, dx = \frac{1}{a}\ln(\csc ax - \cot ax)$$

$$\int x\cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\operatorname{sen} ax$$

$$\int x\operatorname{sen} ax\, dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a}$$

$$\int e^{bx}\operatorname{sen} ax\, dx = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{bx}(b\operatorname{sen} ax - a\cos ax)$$

$$\int e^{bx}\cos ax\, dx = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{bx}(a\operatorname{sen} ax + b\cos ax)$$

$$\int \cosh ax\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{senh} ax$$

$$\int \operatorname{senh} ax\, dx = \frac{1}{a}\cosh ax$$

$$\int \tanh ax\, dx = \frac{1}{a}\ln\,\cosh ax$$

Derivadas

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^{ax})' = ae^{ax}$$

$$(a^u)' = (a^u\,\ln\,a)\frac{du}{dx}$$

$$(\ln\,x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a u)' = \frac{\log_a e}{u}\,\frac{du}{dx}$$

$$(\operatorname{sen}\,x)' = \cos x$$

$$(\cos\,x)' = -\operatorname{sen} x$$

$$(\tan\,x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot\,x)' = -\csc^2 x$$

$$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$$

$$(\operatorname{sen}^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\cot^{-1} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

Propiedades básicas de la transformada de Laplace

1. $L\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} =$
   $C_1 L\{f_1(t)\} + C_2 L\{f_2(t)\}$
2. $L\{e^{kt} f(t)\} = F(s - k)$
3. $L\{t^k f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$
4. $L\left\{\dfrac{1}{t} f(t)\right\} = \displaystyle\int_s^\infty F(s)\,ds$
5. $L\left\{\displaystyle\int_0^t f(t)\,dt\right\} = \dfrac{1}{s} F(s)$
6. $L\{f(kt)\} = \dfrac{1}{k} F\left(\dfrac{s}{k}\right)$

Transformadas de Laplace de funciones comunes

$f(t)$	$F(s) = L\{f(t)\}$
$C_1 f(t) + C_2 g(t)$	$C_1 F(s) + C_2 G(s)$
$e^{kt} f(t)$	$F(s - k)$
$f(kt)$	$\dfrac{1}{k} F\left(\dfrac{s}{k}\right)$
$tf(t)$	$-\dfrac{dF(s)}{ds}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$
$\dfrac{1}{t} f(t)$	$\displaystyle\int_s^\infty F(s)\,ds$
$\displaystyle\int_0^t f(t)\,dt$	$\dfrac{1}{s} F(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
$t^a, a > -1$	$\dfrac{\Gamma(a + 1)}{s^{a+1}}$
$t^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^2	$\dfrac{2}{s^3}$
$t^n, n = 1,2,3, \ldots.$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s - a}$
$t^n e^{at}, n = 1,2,3, \ldots.$	$\dfrac{n!}{(s - k)^{n+1}}$

Funciones comunes de la transformada de Laplace

$f(t)$	$F(s) = L\{f(t)\}$
$\operatorname{sen} at$	$\dfrac{a}{s^2 + a^2}$
$e^{kt} \operatorname{sen} at$	$\dfrac{a}{(s-k)^2 + a^2}$
$t \operatorname{sen} at$	$\dfrac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2 + a^2}$
$e^{kt} \cos at$	$\dfrac{s-k}{(s-k)^2 + a^2}$
$t \cos at$	$\dfrac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$\operatorname{senh} at$	$\dfrac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2 - a^2}$
$u(t - t_0)$	$\dfrac{e^{-t_0 s}}{s}$
$u(t - t_0) f(t - t_0)$	$e^{-t_0 s} F(s)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-t_0 s}$
$f(t)$, *función periódica del periodo p*	$\dfrac{1}{1 - e^{-ps}} \displaystyle\int_0^p e^{-st} f(t)\, dt$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$\displaystyle\int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\, d\tau$	$F(s)G(s)$

Identidades

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\qquad$ $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\qquad$ $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ $\qquad$ $\cos(-x) = \cos x$

$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ $\qquad$ $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ $\qquad$ $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

$\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\operatorname{senh} ix = i \operatorname{sen} x$ $\qquad$ $\cosh ix = \cos x$ $\qquad$ $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$